

## 応力、ひずみ関連のテンソルまとめ

まず、応力テンソル、弾性定数テンソル、ひずみテンソルについて簡単にまとめる。  
応力テンソル、弾性定数テンソル、ひずみテンソルには以下の関係がある。

$$[\text{応力テンソル}] = [\text{弾性定数テンソル}] \times [\text{ひずみテンソル}]$$

### 注意点

- ① 応力テンソル、弾性定数テンソル、ひずみテンソルは座標系により値が変わる。
- ② 応力テンソル、ひずみテンソルは対称テンソルであるため $[3 \times 3]$ または $[6]$ で表記される。
- ③ 弾性定数テンソルも同様に $[3 \times 3 \times 3 \times 3]$ で表記される場合と $[6 \times 6]$ で表記される場合がある。(論文の値では $c_{11}$ など $[6 \times 6]$ 表記の方がよく見かける気がする)
- ④ 座標変換を行う場合は $[3 \times 3]$ ,  $[3 \times 3 \times 3 \times 3]$ などの形に直して座標変換を行う必要がある。

続いて座標変換についてまとめる。

ここでは一例として、 $\langle 1-10 \rangle \langle 11-2 \rangle \langle 111 \rangle$ での応力とひずみ関係を求める方法を示す。  
論文などに載っている弾性定数の値は、 $\langle 100 \rangle \langle 010 \rangle \langle 001 \rangle$ における値である場合が多い。  
そのため、指定した $\langle 1-10 \rangle \langle 11-2 \rangle \langle 111 \rangle$ における応力テンソルを満たす $\langle 1-10 \rangle \langle 11-2 \rangle \langle 111 \rangle$ でのひずみテンソルを求めたいような場合には、座標変換する必要がある。ここで考えられる手法は2通りある。

- ① 弾性定数テンソルを $\langle 1-10 \rangle \langle 11-2 \rangle \langle 111 \rangle$ に変換する。
- ② 応力テンソル、 $\langle 100 \rangle \langle 010 \rangle \langle 001 \rangle$ に変換し、求めたひずみを $\langle 1-10 \rangle \langle 11-2 \rangle \langle 111 \rangle$ に変換する。

これらのどちらかの方法を取らなければいけない。

以降では、 $\langle 100 \rangle \langle 010 \rangle \langle 001 \rangle$ での応力、ひずみ、弾性定数を $\sigma$ 、 $\varepsilon$ 、 $C$   
 $\langle 1-10 \rangle \langle 11-2 \rangle \langle 111 \rangle$ での応力、ひずみ、弾性定数を $\sigma'$ 、 $\varepsilon'$ 、 $C'$   
として表記している。

まず、①の弾性定数テンソルの座標変換方法をまとめる。

弾性定数テンソルは[6×6]表示になっている場合が多いので、回転テンソルをかけることができるように、まず[3×3×3×3]になおす。

弾性テンソルの書き換えの前に応力テンソルの書き換えを確認しておく。

$$\sigma_{11} \rightarrow \sigma_1$$

$$\sigma_{22} \rightarrow \sigma_2$$

$$\sigma_{33} \rightarrow \sigma_3$$

$$\sigma_{12}\sigma_{21} \rightarrow \sigma_4 \text{ OR } \sigma_5 \text{ OR } \sigma_6$$

$$\sigma_{23}\sigma_{32} \rightarrow \sigma_4 \text{ OR } \sigma_5 \text{ OR } \sigma_6$$

$$\sigma_{13}\sigma_{31} \rightarrow \sigma_4 \text{ OR } \sigma_5 \text{ OR } \sigma_6$$

(せん断応力の添え字のつけかたは人によって異なるので、自分が使用しているプログラムを確認する必要がある。)

この書き換えと同様に 11⇔1、22⇔2、33⇔3、12⇔4、23⇔5、13⇔6

と書き換える必要がある。

例えば[6×6]表記での  $c_{16}$  は[3×3×3×3]表記では 1⇒11、6⇒13 となり  $c_{1113}$  と表記される。

表記方法を[3×3×3×3]に書き換えると回転テンソルをかけることができるようになる。

4階のテンソルの座標変換は以下のようなになる。

$$C' = R^T R^T C R R$$

すなわち

$$C_{ijkl} = C_{mnpq} R_{mi} R_{nj} R_{pk} R_{ql}$$

座標系を合わせこんだ後は

$$[\text{応力テンソル}] = [\text{弾性定数テンソル}] \times [\text{ひずみテンソル}]$$

の式を使いひずみと応力の関係を求めることができる。

続いて②の応力テンソル、ひずみテンソルを<100><010><001>に変換する方法について解説する。

弾性定数テンソルの座標変換が複雑で面倒であるため、こちらの方法を使うこともある。

まず、先ほど述べた方法で応力テンソル、ひずみテンソルは[3×3]に直して考える。

$$\sigma = R \sigma' R^T$$

として、

$$[\text{応力テンソル}] = [\text{弾性定数テンソル}] \times [\text{ひずみテンソル}] \text{ にあてはめ、 } \varepsilon' \text{ を求める。}$$

$$\varepsilon' = R^T \varepsilon R$$

としてひずみを必要な座標系での値に直す。