

卒業論文

MEMS マイクロミラーの
信頼性設計手法の提案

1p ~ 68p 完

平成 17 年 2 月 4 日 提出

指導教官 泉 聡志 講師

30164 門脇 政幸

目次

第 1 章 序論	7
1.1 研究の背景	7
1.1.1 MEMS マイクロミラー	7
1.1.2 信頼性設計手法	8
1.2 研究の目的	9
1.2.1 MEMS の静的破壊に対する設計手法の提案	9
1.2.2 MEMS の疲労破壊に対する設計手法の提案	9
1.3 構成	9
第 2 章 Weibull 理論及び母数推定	10
2.1 緒言	10
2.2 母数推定法	11
2.2.1 最尤法(Maximum Likelihood Method)	11
2.2.2 Bayes 推定	13
2.2.3 母数推定の例	16
第 3 章 信頼性設計手法	18
3.1 緒言	18
3.2 FORM (first-order reliability method)	19
3.2.1 Rackwitz-Fiessler method	20
3.2.2 非正規確率変数の取り扱い	20
3.2.3 FORM の基本手順	22
3.3 Monte-Carlo method	23
3.3.1 単純モンテカルロ法(crude Monte-Carlo method)	23
3.3.2 重点サンプリング法(Importance sampling method)	24
3.4 FORM 及び Monte-Carlo 法の実験例題	27
第 4 章 計算結果	29

4.1 母数推定.....	29
4.1.1 推定条件.....	29
4.1.2 推定結果.....	31
4.2 母数推定についての考察.....	49
4.2.1 母数の相対誤差について.....	49
4.2.2 区間推定の幅について.....	51
4.3 設計応力評価.....	55
4.3.1 推定結果.....	56
4.4 設計応力についての考察.....	57
第5章 疲労寿命評価.....	59
5.1 緒言.....	59
5.2 寿命評価式のパラメータ推定.....	60
5.3 試験データ及びその評価.....	62
5.4 考察.....	64
第6章 結言.....	65
6.1 静的破壊について.....	65
6.2 疲労破壊について.....	65
参考文献.....	66
あとがき.....	67
6.3 謝辞.....	67

目次

図 1	エコスキャン (株)日本信号提供	7
図 2	マイクロミラーの動作原理	7
図 3	形状母数に伴う分布の形状の変化(尺度母数 1.0)	10
図 4	最尤法により得られた尤度関数の分布	16
図 5	Bayesian-Update により得られた事後分布	17
図 6	限界状態関数と設計点	18
図 7	FORM の概略	19
図 8	Weibull 分布と等価な正規分布	21
図 9	FORM のフローチャート	22
図 10	同時確率密度関数概念図	23
図 11	$I_g(x)$ 概念図	24
図 12	$h(x)$ の考え方	26
図 13	$f_X(x)$ の並行移動による $h(x)$ の設定	26
図 14	例題用不静定梁	27
図 15	FORM 及び Monte-Carlo 法による破壊確率計算結果(実験例題)	28
図 16	尺度母数の推定(解析 1)	31
図 17	形状母数の推定(解析 1)	31
図 18	尺度母数の推定(解析 2)	32
図 19	形状母数の推定(解析 2)	32
図 20	尺度母数の推定(解析 3)	33
図 21	形状母数の推定(解析 3)	33
図 22	尺度母数の推定(解析 4)	34
図 23	形状母数の推定(解析 4)	34
図 24	尺度母数の推定(解析 5)	35
図 25	形状母数の推定(解析 5)	35
図 26	尺度母数の推定(解析 6)	36
図 27	形状母数の推定(解析 6)	36
図 28	尺度母数の推定(解析 7)	37
図 29	形状母数の推定(解析 7)	37

図 30	尺度母数の推定(解析 8).....	38
図 31	形状母数の推定(解析 8).....	38
図 32	尺度母数の推定(解析 9).....	39
図 33	形状母数の推定(解析 9).....	39
図 34	尺度母数の推定(解析 10).....	40
図 35	形状母数の推定(解析 10).....	40
図 36	尺度母数の推定(解析 11).....	41
図 37	形状母数の推定(解析 11).....	41
図 38	尺度母数の推定(解析 12).....	42
図 39	形状母数の推定(解析 12).....	42
図 40	尺度母数の推定(解析 13).....	43
図 41	形状母数の推定(解析 14).....	43
図 42	尺度母数の推定(解析 14).....	44
図 43	形状母数の推定(解析 14).....	44
図 44	尺度母数の推定(解析 15).....	45
図 45	形状母数の推定(解析 15).....	45
図 46	尺度母数の推定(解析 16).....	46
図 47	形状母数の推定(解析 16).....	46
図 48	尺度母数の推定(解析 17).....	47
図 49	形状母数の推定(解析 17).....	47
図 50	尺度母数の推定(解析 18).....	48
図 51	形状母数の推定(解析 18).....	48
図 52	耐力及び設計応力の評価.....	55
図 53	単結晶シリコンの疲労破壊のメカニズム.....	59
図 54	疲労寿命の 99%予測区間.....	63

表目次

表 4-1	シミュレーション用模擬実験データ	29
表 4-2	推定すべき実機の母数	30
表 4-3	サンプル数 3 の場合の相対誤差	49
表 4-4	サンプル数 10 の場合の相対誤差	50
表 4-5	サンプル数 3 個の場合の尺度母数の 95%確信(信頼)区間の幅	51
表 4-6	サンプル数 3 個の場合の形状母数の 95%確信(信頼)区間の幅	52
表 4-7	サンプル数 10 個の場合の尺度母数の 95%確信(信頼)区間の幅	53
表 4-8	サンプル数 10 個の場合の形状母数の 95%確信(信頼)区間の幅	54
表 4-9	サンプル 3 個から推定した設計応力[MPa]	56
表 4-10	サンプル 10 個から推定した設計応力[MPa]	57
表 5-1	疲労寿命試験データ	62

第1章 序論

1.1 研究の背景

1.1.1 MEMS マイクロミラー

MEMS(Micro Electro Mechanical System)は微小加工技術として既に確立された半導体加工技術を用いて作られた、機械的動作を可能とする微小デバイスである。MEMS マイクロミラーはこのMEMSの一種で、光学スイッチやスキャニングなど広く用いられている機能素子である。図1に示すのは日本信号(株)製の「エコスキャン」である。

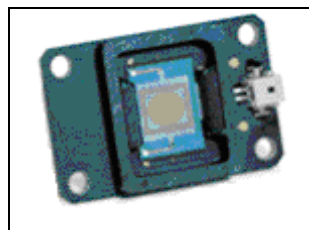


図 1 エコスキャン (日本信号(株)提供)

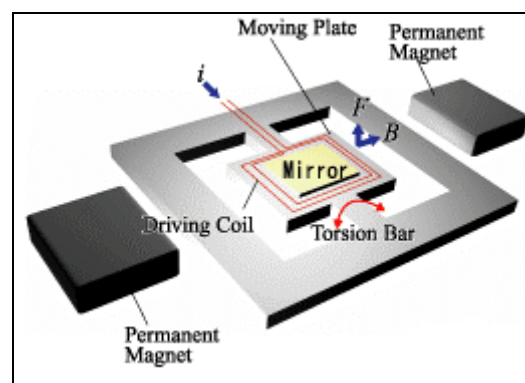


図 2 マイクロミラーの動作原理

図 2 に示すのはマイクロミラーの動作原理である。トーシヨンバーに直交する方向に永

久磁石を用いた磁束密度 B の磁界をかけながら駆動コイルに電流 i を流すと、ローレンツ力 F による回転トルクが生じ、トーションバーの復元力につりあう位置までミラーを傾けることができる。この際に大きな変形を伴うため、構造の主要な支持部であるトーションバーが破壊されてしまう可能性がある。そこで、このデバイスの信頼性及び安全性を評価するにあたっては、トーションバーの材料特性を把握しておく必要がある。

このデバイスは脆性材料である単結晶シリコンを用いて製造されているため、破壊強度が大きくばらつくことが知られており、また、デバイスそのもののスケールが小さいためにエッチングダメージ等の微小欠陥の影響が強く、同じデバイスでも製造工程の違いによってばらつきの傾向が大きく異なる事も現在までの研究で明らかになっている。そのため破壊強度の評価に関して、製造プロセス及び寸法形状等が異なるデバイスについては異なる設計応力を与えなければならない。そこで、設計応力自体の与え方や、その設計応力の安全性を保证するための実機破壊試験の必要サンプル数も議論の対象となってくる。

また、単結晶シリコンは脆性材料であるにも関わらず疲労破壊を起こすことも知られており、寿命のばらつきの取り扱いについても議論を要する。このような事実を踏まえれば、設計の指針としては強度の確率論的取扱いは必須であるといえる。

1.1.2 信頼性設計手法

信頼性設計手法は確率論的手法に基づく設計手法で、欧米の建築・土木分野では 30 年以上前から使われてきた設計法である[1]。この設計法の持つ利点として、

1. 技術的根拠が明確であること。
2. 最新の研究、技術開発成果を容易に取り込める柔軟性を持つこと。
3. 設計で目標とする性能が明快であること。
4. 許容応力度設計法で陥りがちな、システム全体として過度の裕度の設計を避けることができること。

等が挙げられる。このように多くの長所を併せ持つことから、近年では我が国の土木・建築分野でも積極的に取り入れようとする試みが見られ、機械分野においても注目されている。

1.2 研究の目的

1.2.1 MEMS の静的破壊に対する設計手法の提案

脆性材料の強度はバラツキが大きく、評価には大量の実機試験が必要である。そのため、従来手法では非常に多くの実機試験が必要となる。

これを解決するために本研究では、実験室で大量にデータを取って求めた強度分布の母数と実機の少量の強度データをもとに設計応力を効率的に決定する手法を提案する。具体的には、実験室の強度分布をもとにした母数の事前分布を使って、ベイズ推定を行う。

1.2.2 MEMS の疲労破壊に対する設計手法の提案

単結晶シリコンの疲労現象について、実機の疲労破壊データを用いて寿命のパラメータ推定を行う。疲労破壊試験は非常に時間がかかるため、温度、振れ角、湿度をパラメータとした加速寿命試験を行い、通常使用環境における寿命を外挿評価する。推定した寿命自体が大きくバラつくため、信頼性工学に基づき区間推定を行い、その下限値をもって寿命とする設計手法を提案する。

1.3 構成

本論文の構成を以下に示す。

第1章では本研究の背景及び目的を示した。

第2章では Weibull 理論についての概略と母数推定法について述べた。

第3章では信頼性設計手法の基礎理論及び破壊確率評価手法の紹介を行った。

第4章では母数推定、設計応力推定のシミュレーションを行った。

第5章では疲労現象の説明及び疲労寿命評価を行った。

第6章では本研究のまとめを行った。

第2章 Weibull 理論及び母数推定

2.1 緒言

材料の破壊強度は微細な組織や欠陥などの影響を受け、特に最も弱い欠陥によって強度が決まることが多い。脆性材料の脆性破壊強度は、材料あるいは部材の内部に含まれる無数の欠陥のうち、最も弱いものによって決まるので、欠陥強度分布の最小値分布が材料強度の分布になる[2]。このような最小値の漸近分布は幾つか知られているが、今回の研究で用いる MEMS マイクロミラーの脆性破壊強度に関してもそのうちの一つ、Weibull 分布に従うことがこれまでの研究で分かっている[3]。この Weibull 分布の確率密度関数は尺度母数と形状母数 を用いて(1)式のように表される。

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta}\right\} \quad (1)$$

ここで、尺度母数 η は分布のスケールを表す母数で、累積確率 63.2%に対するパーセント点である。また、形状母数 β は分布の形状を決める母数で、この値によって分布の形状が決まる。 β による形状の変化は図 3 を参照されたい。

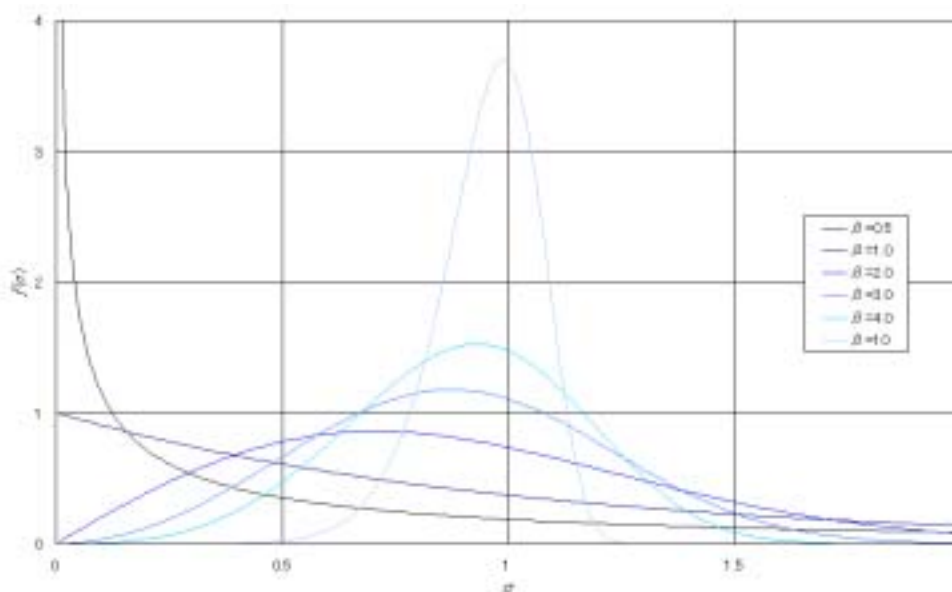


図 3 形状母数に伴う分布の形状の変化(尺度母数 1.0)

2.2 母数推定法

確率分布の母数推定は破壊確率評価に関わる大きな問題である。ここでは本研究で用いた母数推定方法の説明を行う。

2.2.1 最尤法(Maximum Likelihood Method)

母数の推定方法として工学的によく用いられる手法として最尤法があげられる[4]。ここではその概略を説明することにする。

今、 x_1, x_2, \dots, x_n なる n 個のサンプルがある確率密度関数 $f_X(x_i; \theta)$ (θ は推定したい母数列) から得られた場合を想定してみる。(2)式のように n 個のサンプルから得られた確率変数を用いた確率密度関数の積を尤度関数と定義する。この関数は、サンプルが与えられた時点で推定したい母数だけの関数となり、その母数の分布を記述する関数となる。

$$L(\theta | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i; \theta) \quad (2)$$

この尤度関数を最大にする $\theta = \hat{\theta}$ が存在する時、これを最尤推定量(Maximum Likelihood Estimator)と呼ぶ。一般に、この最尤推定量を求める際は計算が簡便になることから対数尤度の値を最大にする θ を求めることが多い。すなわち、最尤方程式

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(\theta | \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3)$$

を満たす θ をもって最尤推定量とする。

さて、次に本研究で用いる Weibull 分布についてこの最尤法を用いてみることにする。ワイブル分布の確率密度関数は先程定義したように(4)式で表される。

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x}{\eta} \right)^{\beta} \right\} \quad (4)$$

推定すべき母数は β, η の 2 つであり、尤度関数は(5)式のとおり。

$$L(\eta, \beta | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x_i}{\eta} \right)^{\beta-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x_i}{\eta} \right)^{\beta} \right\} \quad (5)$$

さらに、上式のと対数をとって母数で微分した最尤方程式は(6)式のとおり。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L(\eta, \beta | \mathbf{x}) &= \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^n \ln \frac{x_i}{\eta} - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\eta} \right)^\beta \ln \left(\frac{x_i}{\eta} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \ln L(\eta, \beta | \mathbf{x}) &= -n \frac{\beta}{\eta} + \frac{\beta}{\eta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\eta} \right)^\beta = 0\end{aligned}\quad (6)$$

(6)式は解析的に解けないため、数値的に解く必要がある。今回は Newton-Raphson 法を用いて解いた。このようにして最尤推定値が1点求まるので、以上の方法を点推定という。

しかし、有限個のサンプルから得られた点推定値はある程度のばらつきを持っていると考えるべきである。このばらつきも確率的に評価するのが区間推定である。

区間推定を行うに先立って、Fisher 情報量行列を定義する必要がある。未知の母数列 θ を持つ母集団からのサンプル列 \mathbf{x} によって得られた尤度関数を $L(\theta | \mathbf{x})$ とするとき、Fisher 情報量行列の (i, j) 成分は(7)式で与えられる。

$$\begin{aligned}[\mathbf{I}(\theta)]_{ij} &= E \left[\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L(\theta | \mathbf{x}) \times \frac{\partial}{\partial \theta_j} \ln L(\theta | \mathbf{x}) \right] \\ &= E \left[-\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln L(\theta | \mathbf{x}) \right]\end{aligned}\quad (7)$$

ここで、Weibull 分布に対する区間推定を考えることにする。上式から分かるように、Fisher 情報量行列を得るには対数尤度のパラメータ 2 階微分が必要となる。それぞれ以下に示すとおり。

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} &= -\frac{n}{\beta^2} - \sum_{i=1}^n \left\{ \ln \left(\frac{x_i}{\eta} \right) \right\}^2 \left(\frac{x_i}{\eta} \right)^\beta \\ \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \eta} &= -\frac{n}{\eta} + \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta} \right)^\beta + \frac{\beta}{\eta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\eta} \right)^\beta \ln \left(\frac{x_i}{\eta} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} &= \frac{n\beta}{\eta} - \frac{\beta}{\eta^2} (1 + \beta) \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\eta} \right)^\beta\end{aligned}\quad (8)$$

よって n 個のサンプルから得られる Fisher 情報量行列は(9)式のとおり。

$$\mathbf{I}(\beta, \eta) = \begin{bmatrix} \frac{n}{\beta^2} + \sum_{i=1}^n \left\{ \ln \left(\frac{x_i}{\eta} \right) \right\}^2 \left(\frac{x_i}{\eta} \right)^\beta & \frac{n}{\eta} - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta} \right)^\beta - \frac{\beta}{\eta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\eta} \right)^\beta \ln \left(\frac{x_i}{\eta} \right) \\ \frac{n}{\eta} - \frac{1}{\eta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\beta} \right)^\beta - \frac{\beta}{\eta} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\eta} \right)^\beta \ln \left(\frac{x_i}{\eta} \right) & -\frac{n\beta}{\eta} + \frac{\beta}{\eta^2} (1 + \beta) \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\eta} \right)^\beta \end{bmatrix}\quad (9)$$

尺度母数及び形状母数の分散・共分散行列は、Fisher 情報量行列の逆行列 $\mathbf{I}^{-1}(\beta, \eta)$ を用いて(10)式のように与えられる。

$$\begin{bmatrix} \text{Var}(\hat{\beta}) & \text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\eta}) \\ \text{Cov}(\hat{\beta}, \hat{\eta}) & \text{Var}(\hat{\eta}) \end{bmatrix} = \mathbf{I}^{-1}(\beta, \eta)\quad (10)$$

こうして得られた分散を用いて、信頼区間は正規分布として近似的に与えられる。これは

以下の式に示すとおりである。

$$\beta_U = \hat{\beta} + K_\alpha \sqrt{\text{Var}(\hat{\beta})} \quad (11)$$

$$\beta_L = \hat{\beta} - K_\alpha \sqrt{\text{Var}(\hat{\beta})} \quad (12)$$

$$\eta_U = \hat{\eta} + K_\alpha \sqrt{\text{Var}(\hat{\eta})} \quad (13)$$

$$\eta_L = \hat{\eta} - K_\alpha \sqrt{\text{Var}(\hat{\eta})} \quad (14)$$

添字の U は信頼区間の上限値(Upper Confidence Bounds)を、 L は下限値(Lower Confidence Bounds)を表し、 K_α は(15)式により定義される。

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{K_\alpha}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = 1 - \Phi(K_\alpha) \quad (15)$$

両側 $\delta\%$ 信頼区間を得たいのならば、 $\alpha = \frac{1-\delta}{2}$ とし、片側 $\delta\%$ 信頼区間を得たいのならば

$\alpha = 1 - \delta$ とすればよい。

なお、最尤法は尺度母数及び形状母数の両方が未知の場合には、サンプル数2個では計算が発散する場合もある。

2.2.2 Bayes 推定

Bayes 母数推定法は、有効な母数の推定を行える程十分にサンプルが取れない場合に用いられる推定法である[5]。この手法はまず、推定したい母数に対し事前分布を与え、それにデータから得られた情報を与えることにより事後分布を得、母数の推定を行うというものである。

(16)に示すのは一般的に母数の推定に用いる Bayes の定理の式である。

$$f_1(\theta) = \frac{L(\theta | \mathbf{x})f_0(\theta)}{\int L(\theta | \mathbf{x})f_0(\theta)d\theta} \quad (16)$$

ここで、 $f_0(\theta)$ は事前分布、 $f_1(\theta)$ は事後分布、 $L(\theta | \mathbf{x})$ は尤度関数、 θ は推定すべき母数ベクトルである。尤度関数に関しては、推定のもととなるモデル関数 $g(x_i | \theta)$ を用いて、

$$L(\theta | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n g(x_i | \theta) \quad (17)$$

と表されるので事後分布は(18)式の形に書き換えられる。

$$f_1(\theta) = \frac{\left\{ \prod_{i=1}^n g(x_i | \theta) \right\} f_0(\theta)}{\int \left\{ \prod_{i=1}^n g(x_i | \theta) \right\} f_0(\theta) d\theta} \quad (18)$$

しかし、この手法は本来客観的であるべき統計に対して主観的であるということで批判を浴びること多い。これは(18)式に用いる事前分布の与え方が任意性を持つためなのだが、この事前分布を適当な形で与えることが出来れば非常に少ないデータからも有効な推定が行えることも事実である。

さて、Bayes の推定式は(18)式で与えたとおりであるが、この式の分母の積分計算は困難であることが多い。そこで用いるのがマルコフ連鎖モンテカルロ法(MCMC)である。マルコフ連鎖モンテカルロ法とは複雑な多次元分布から乱数を発生させる方法である。代表的なものとしては Metropolis-Hastings 法というアルゴリズムがあり[7]、このアルゴリズムによる $\pi(\cdot)$ に従う乱数の発生方法は以下に示すとおりである。

1. 初期値 $\theta^{(0)}$ を与える。
2. $j=1, 2, \dots, i$ まで から の操作を繰り返す。
 - ・ $q(\theta^{(j-1)}, \cdot)$ から $\theta^{candidate}$ を、 $U(0,1)$ から u を発生させる。
 - ・ $u \leq \alpha(\theta^{(j-1)}, \theta^{candidate})$ であれば、 $\theta^{(j)} = \theta^{candidate}$ とする。

ここで、 $\alpha(\theta^{(j-1)}, \theta^{candidate}) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\theta^{candidate})q(\theta^{(j-1)}, \theta^{candidate})}{\pi(\theta^{(j-1)})q(\theta^{(j-1)}, \theta^{candidate})} \right\}$ である。

 - ・ そうでなければ、 $\theta^{(j)} = \theta^{(j-1)}$ とする。
3. 結果、 $\{\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(i)}\}$ を得る。

このアルゴリズムを Bayesian-Update から得られた事後分布に適用するにあたって、発生させる乱数は母数の組、すなわちベクトルである。発生させる乱数はベクトルであっても問題はないのだが、 $q(\theta^{(j-1)}, \cdot)$ から直接 $\theta^{candidate}$ を生成するというステップが可能になる例は多くはないはずである。

そこで、Metropolis-Hastings アルゴリズムで乱数ベクトルを発生させる場合には $\theta^{candidate}$ をスカラーのように扱う工夫が必要となる。本研究では Single-Component Metropolis-Hastings アルゴリズムを用いた。このアルゴリズムを事後分布に適用すれば、以下ようになる。

1. 初期値 $\begin{pmatrix} \theta_1^{(0)} \\ \theta_2^{(0)} \end{pmatrix}$ を与える。
2. $j=1, 2, \dots, i$ まで 、 の操作を繰り返す。

$\theta_1^{(j)}$ を発生させる。

・ $q_1 \left\{ \begin{matrix} \theta_1^{(j-1)} \\ \theta_2^{(j-1)} \end{matrix} \right\}$ から $\theta_1^{candidate}$ を、U(0,1) から u を発生させる。

・ $u \leq \alpha_1(\theta_1^{(j-1)}, \theta_1^{candidate})$ であれば、 $\theta_1^{(j)} = \theta_1^{candidate}$ とする。

ここで、

$$\alpha_1(\theta_1^{(j-1)}, \theta_1^{candidate}) = \min \left[1, \frac{L(\theta_1^{candidate} | \mathbf{x}, \theta_2^{(j-1)}) f_0(\theta_1^{candidate}, \theta_2^{(j-1)}) q_1 \left\{ \begin{matrix} \theta_1^{candidate} \\ \theta_2^{(j-1)} \end{matrix} \right\}, \theta_1^{(j-1)}}{L(\theta_1^{(j-1)} | \mathbf{x}, \theta_2^{(j-1)}) f_0(\theta_1^{(j-1)}, \theta_2^{(j-1)}) q_1 \left\{ \begin{matrix} \theta_1^{(j-1)} \\ \theta_2^{(j-1)} \end{matrix} \right\}, \theta_1^{candidate}} \right]$$

である。

・ そうでなければ、 $\theta_1^{(j)} = \theta_1^{(j-1)}$ とする。

$\theta_2^{(j)}$ を発生させる。

・ $q_2 \left\{ \begin{matrix} \theta_1^{(j)} \\ \theta_2^{(j-1)} \end{matrix} \right\}$ から $\theta_2^{candidate}$ を、U(0,1) から u を発生させる。

・ $u \leq \alpha_2(\theta_2^{(j-1)}, \theta_2^{candidate})$ であれば、 $\theta_2^{(j)} = \theta_2^{candidate}$ とする。

ここで、

$$\alpha_2(\theta_2^{(j-1)}, \theta_2^{candidate}) = \min \left[1, \frac{L(\theta_2^{candidate} | \mathbf{x}, \theta_1^{(j)}) f_0(\theta_1^{(j)}, \theta_2^{candidate}) q_2 \left\{ \begin{matrix} \theta_1^{(j)} \\ \theta_2^{candidate} \end{matrix} \right\}, \theta_2^{(j-1)}}{L(\theta_2^{(j-1)} | \mathbf{x}, \theta_1^{(j)}) f_0(\theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j-1)}) q_2 \left\{ \begin{matrix} \theta_1^{(j)} \\ \theta_2^{(j-1)} \end{matrix} \right\}, \theta_2^{candidate}} \right]$$

である。

・ そうでなければ、 $\theta_2^{(j)} = \theta_2^{(j-1)}$ とする。

3. 結果、 $\left\{ \begin{pmatrix} \theta_1^{(1)} \\ \theta_2^{(1)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \theta_1^{(2)} \\ \theta_2^{(2)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \theta_1^{(i)} \\ \theta_2^{(i)} \end{pmatrix} \right\}$ を得る。

ここで特筆すべきは、このアルゴリズムにより発生させた乱数の度数分布を評価に用いることで、事後密度の規格化(分母の積分計算)を行う必要がないという点である。このように、マルコフ連鎖モンテカルロ法は計算機の性能の向上に伴って、従来積分計算の取り扱いの難しかった Bayes 推定を比較的容易に扱うことを可能とした。

2.2.3 母数推定の例

最尤法と Bayes 推定が漸近的に一致することは定義式及び大数の法則から明らかであるが、サンプルサイズが小さい場合には一般に異なる。ここではその比較結果を示し、95%信頼区間、95%確信区間を定義することにする。

図 4 に示すのはサンプルサイズを 5 個、10 個、50 個とした場合に最尤法により得られた尤度関数の分布の例である。なお、用いたモデル関数は尺度母数 700[MPa]、形状母数 5.0 の Weibull 分布である。

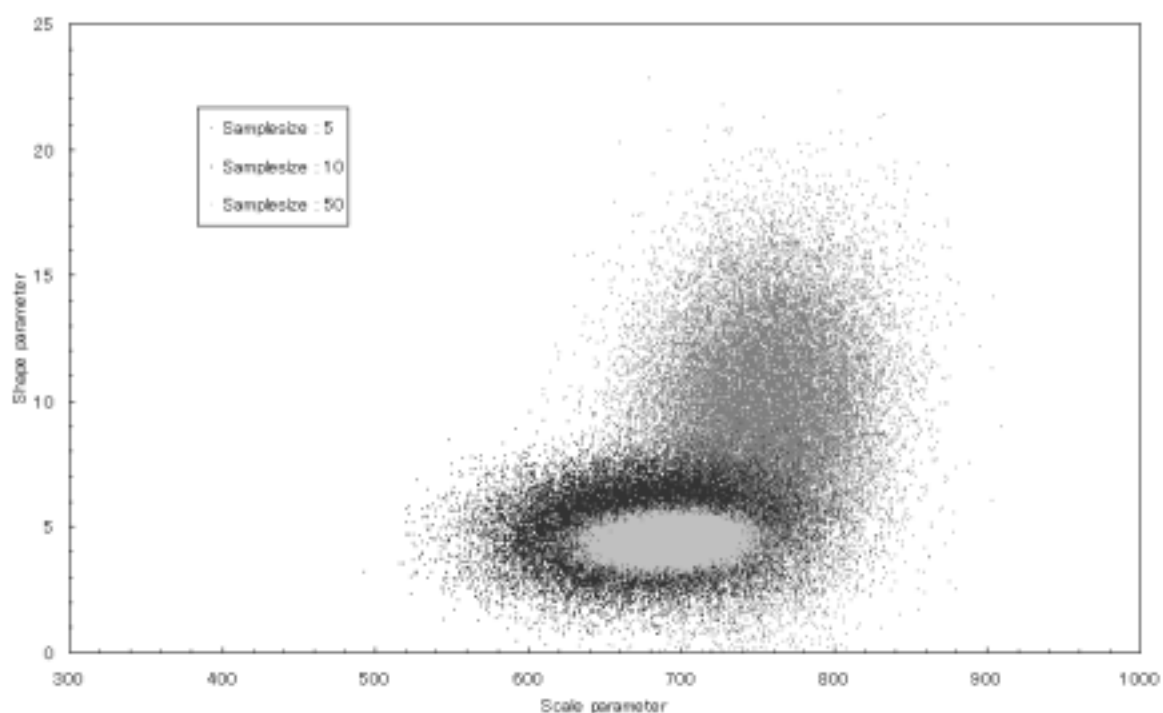


図 4 最尤法により得られた尤度関数の分布

最尤法の 95%信頼区間は区間推定を行う際に正規分布で近似しているので、その正規分布の累積確率の 2.5%点及び 97.5%点の間を 95%確信区間とする。

図 5 に示すのはサンプルサイズを 5 個、10 個、50 個とした場合に Bayesian-Update により得られた事後分布の例である。なお、用いたモデル関数は尺度母数 700[MPa]、形状母数 5.0 の Weibull 分布である。尺度母数の事前分布には平均 700[MPa]、変動係数 0.4 の対数正規分布を、形状母数の事前分布には平均 5.0、変動係数 0.4 の対数正規分布を用いた。

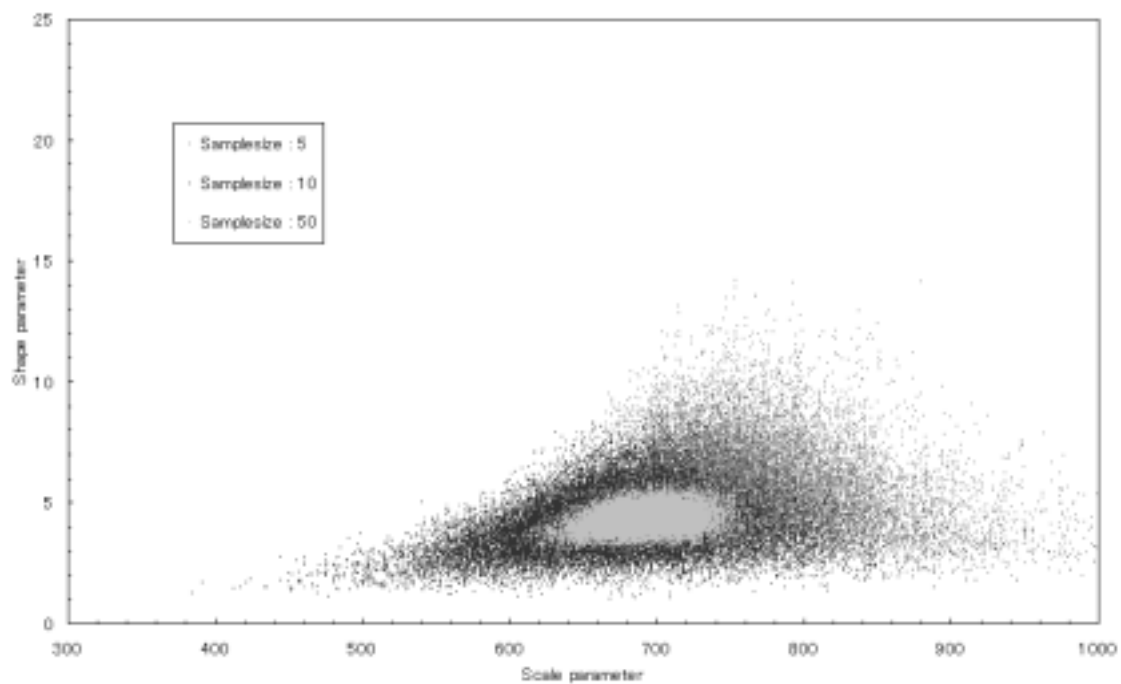


図 5 Bayesian-Update により得られた事後分布

Bayesian-Update については、発生させた母数 100,000 点のうち、上下 2,500 点分を切り捨てた 95,000 点を含む区間を 95%確信区間とした。

なお、信頼区間と確信区間の名称の違いについては、最尤法は客観的確率論に基づくため「信頼できる」区間として与えられ、Bayesian-Update は観測者の主観が入るために「確信を持てる」区間として与えられるためである。

第3章 信頼性設計手法

3.1 緒言

信頼性設計法はシステム全体の目標信頼性を設定し、この目標を達成するための各設計変数を決定する手法である[8]。このために、各確率変数がバラツキを持つ場合の破損確率 P_f を評価する必要がある。 P_f は一般に(19)式から求まる。

$$P_f = \iint_{g(X)<0} \dots \int f_X(X) dx \quad (19)$$

$f_X(X)$ は設計変数の同時確率密度関数で、 $g(X)$ は限界状態関数(limit state function)と呼ばれ、通常、システムの安全性を記述する関数であるが、有害な変形や、人間の快適性などの使用性を表現する関数であっても良い。本研究のケースでは負の時をシステムの破壊とみなす。

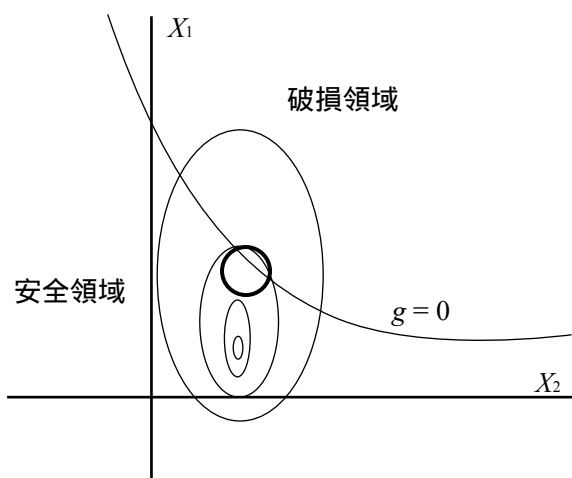


図 6 限界状態関数と設計点

図 6 に示すのは二変数の場合の X_1 - X_2 平面上での確率密度関数及び限界状態関数の様子である。太線の丸で囲んだあたりは限界状態関数上で最も生起確率が高いと考えられ、設計点(design point)と呼ばれる。この設計点座標が分かれば確率密度関数から破壊確率が求まる。しかし、設計点を解析的に求めることが出来る場合は非常に限られており、これを求める計算手法の開発も信頼性工学の主要なテーマの 1 つとなっている。

3.2 FORM (first-order reliability method)

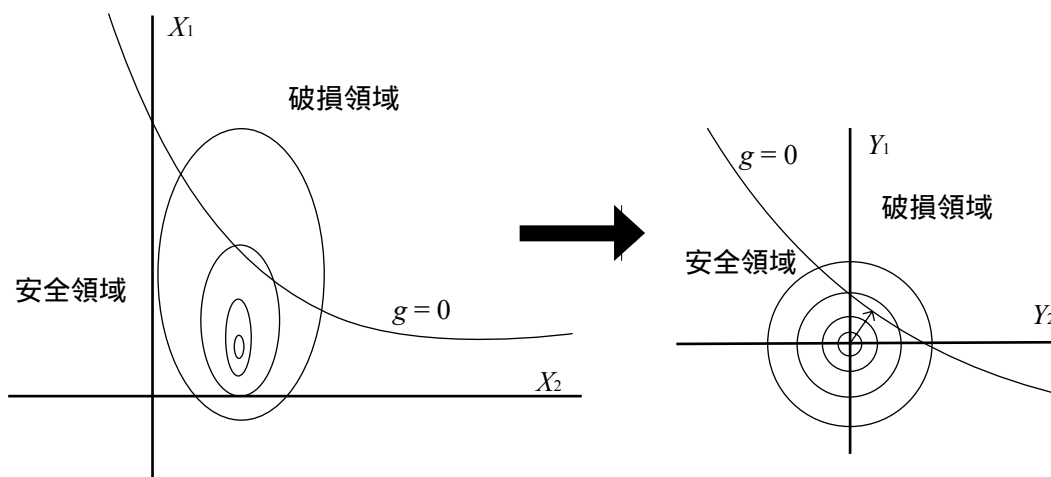


図 7 FORM の概略

ここでは限界状態関数の評価法として広く用いられている手法の一つである FORM について説明する。この手法の概略を図 7 に示す。図では確率変数が二個の場合を示しているが、三次元以上の高次の場合も同様である。

FORM は限界状態関数を線形近似で評価する手法である。 $g(X)$ が線形の場合、評価は比較的簡単であるが、一般的には $g(X)$ は非線形であるため、評価手法は工夫を要す。ここでは簡単のため X_1 及び X_2 はそれぞれ平均 μ_1, μ_2 、標準偏差 σ_1, σ_2 の正規確率変数であるとする。ここで、標準正規確率変数(平均 0、分散 1)への変換 T を(20)式で与える。

$$T: Y_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad (20)$$

すると、図 7 のように確率変数の平均は原点へと移され、同時に限界状態関数 $g=0$ も Y_1 - Y_2 平面上に移される。ここで、 $g(Y_1, Y_2)=0$ と原点との最短距離を信頼性指標 β として定義する。この指標は Hasofer-Lind の信頼性指標として知られている。これは限界状態関数上で最も正規確率が高い(破壊確率が高い)点を示す指標であり、(21)式に示すように破壊確率と一対一に対応する。

$$P(g(y) < 0) = \Phi(-\beta) \quad (21)$$

ここで $\Phi(x)$ は標準正規累積確率関数である。

次に、 $g(y)$ を設計点 y^* まわりで線形近似する方法について説明する。これには(22)式のように Taylor 展開を用いる。

$$g(\mathbf{y}) = g(y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial Y_i} (Y_i - y_i^*) + H.O.T. \quad (22)$$

高次項(H.O.T)については、線形項に比べ十分に小さいとみなし、無視することにする。設計点座標を求める手法については3.2.1で述べることにする。また、確率変数が非正規分布の場合については3.2.2で述べることにする。

3.2.1 Rackwitz-Fiessler method

設計点を求める手法として、広く使われている数値計算法の一つに Newton 型繰り返し計算アルゴリズムである Rackwitz-Fiessler の方法がある。設計点座標は \mathbf{x}^* は(23)式から得られる $\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots, \mathbf{x}^{(n)}, \dots$ の収束値として求めることが出来る。

$$\mathbf{x}^{(i+1)} = \underbrace{\left[\left(\mathbf{x}^{(i)} \cdot \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \right) + \frac{g(\mathbf{x}^{(i)})}{\|\nabla g(\mathbf{x}^{(i)})\|} \right]}_{\beta^{(i)}} \boldsymbol{\alpha}^{(i)} \quad (23)$$

ここで、 $\boldsymbol{\alpha}^{(i)}$ は設計点方向への単位ベクトルで、

$$\boldsymbol{\alpha}^{(i)} = -\frac{\nabla g(\mathbf{x}^{(i)})}{\|\nabla g(\mathbf{x}^{(i)})\|} \quad (24)$$

と表される。この手法を用いる場合、まず $\mathbf{x}^{(0)}$ を与え、(23)式を $\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\| < \epsilon$ となるまで繰り返し計算を行えばよい。反復計算の結果、収束が得られた場合、設計点座標

$$\mathbf{x}^* = \beta \boldsymbol{\alpha}^* \quad (g(\mathbf{x}^*) = 0) \quad (25)$$

が得られる。

3.2.2 非正規確率変数の取り扱い

一般的に、信頼性設計法で取り扱う変数は正規分布だけではない。ここでは非正規確率変数の取り扱いについて説明する。代表的な方法として2パラメータ法を取り上げる。

今、対象とする非正規の確率変数 X_i の分布関数が $F(X_i)$ 、密度関数が $f(X_i)$ で与えられ、繰り返し計算途中の設計点の座標が X_i で与えられているとき、等価な正規分布関数の標準偏差及び平均値を(26)式から算出する。

$$\begin{cases} \sigma_{X_i}^N = \frac{\phi\left\{\Phi^{-1}\left[F_i\left(X_i^*\right)\right]\right\}}{f_i\left(X_i^*\right)} \\ \mu_{X_i}^N = X_i^* - \Phi^{-1}\left[F_i\left(X_i^*\right)\right]\sigma_{X_i}^N \end{cases} \quad (26)$$

ここで、 $\phi(\cdot)$ は標準正規確率密度関数、 $\Phi(\cdot)$ は標準正規確率分布関数である。計算において感心があるのは破損領域の評価であるので、上式においては設計点より外側の裾野領域の累積分布及び確率密度が等しくなる等価な正規分布に変換するという操作を行っている。この例を図8に示した。図では元の分布形を尺度母数 700[MPa]、形状母数 5.0 の Weibull 分布とし、設計点を300[MPa]と与えた。300[MPa]以下の裾野部分の形状がよく合っていることが分かる。

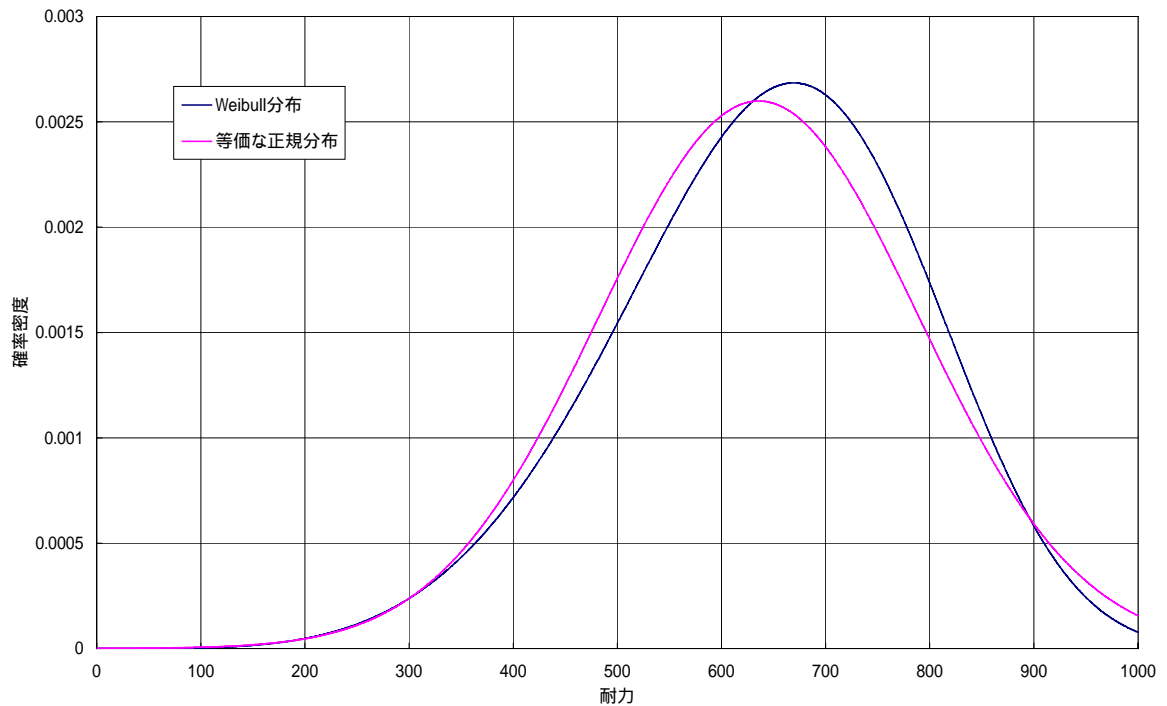


図 8 Weibull 分布と等価な正規分布

このようにして上式より得られた標準偏差及び平均値を用いれば標準正規空間への変換は容易であり、Rackwitz-Fiesler の方法で設計点座標の更新を行うことが出来る。ただし、設計点が更新されるたびに上式によって等価な正規分布を評価し直す必要がある。

あとは設計点が収束するまで繰り返し計算を行えば、破壊確率を評価することが出来る。ただし、この方法では正規分布での近似が困難な場合には発散してしまうこともある。

3.2.3 FORM の基本手順

3.2.1 及び 3.2.2 で説明した FORM の基本手順を図 9 にフローチャートで示す。

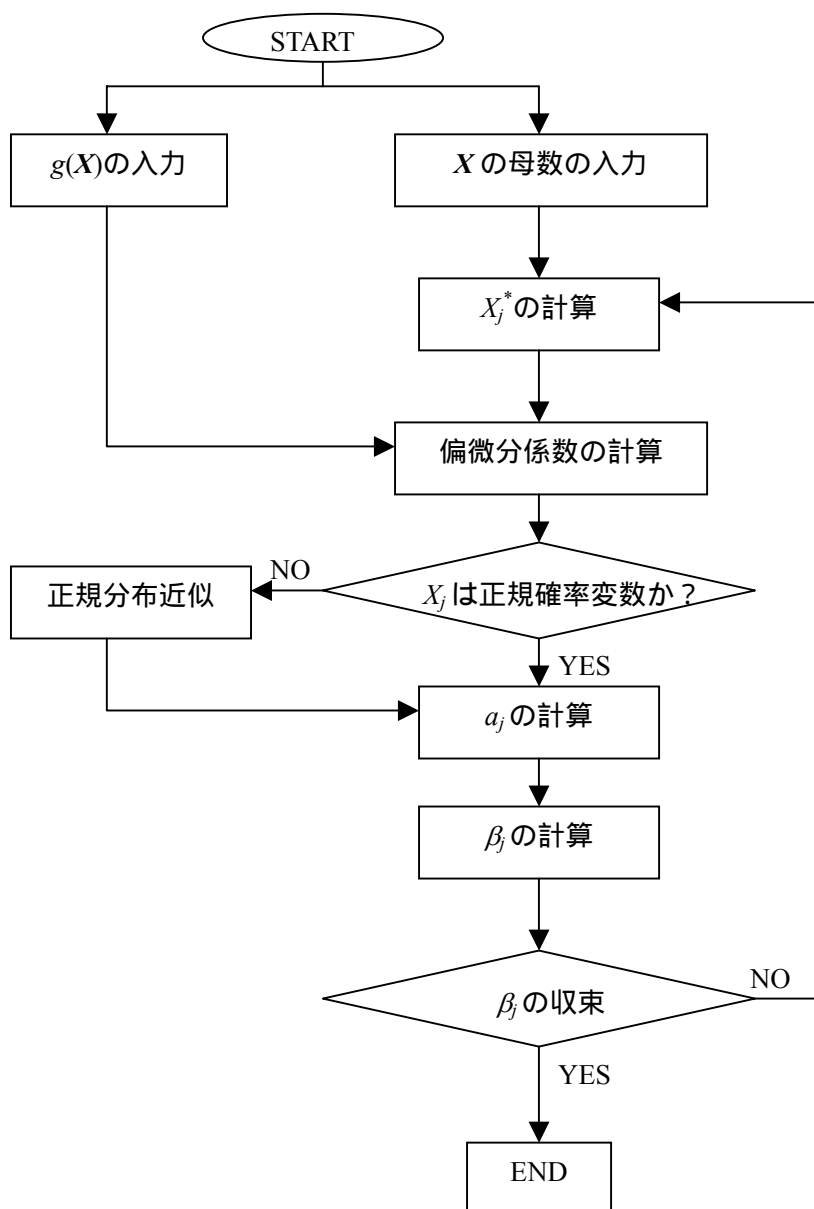


図 9 FORM のフローチャート

3.3 Monte-Carlo method

破壊確率の見積もりには Monte-Carlo 法を応用することも出来る。以下では直接 Monte-Carlo 法、重点サンプリング法の 2 種類の方法について説明する。

3.3.1 単純モンテカルロ法(crude Monte-Carlo method)

いま、設計変数の同時確率密度関数を概念的に図 10 のように表示すると、

$$g(x) < 0 \quad (27)$$

が破壊の発生する領域であり、設計変数とその領域に存在する確率、つまり破壊確率は

$$P_f = \iint_{g(X) < 0} \dots \int f_X(X) dx \quad (28)$$

で与えられる。なお、破壊領域に入る臨界の値を x_0 と表記することにする。

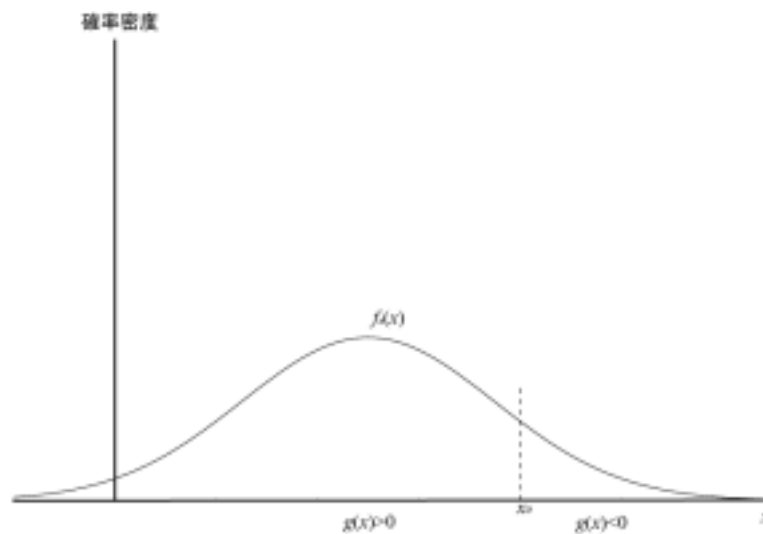


図 10 同時確率密度関数概念図

まず、 P_f を次式のように書き換える。

$$P_f = \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} I_g(x) f_X(x) dx \quad (29)$$

ただし、 $I_g(x)$ は関心のある事象が発生する領域で 1 となる関数で、

$$I_g(x) = \begin{cases} 0 & (\text{if } g(x) > 0) \\ 1 & (\text{if } g(x) < 0) \end{cases} \quad (30)$$

である。この様子を図 311 に示す。

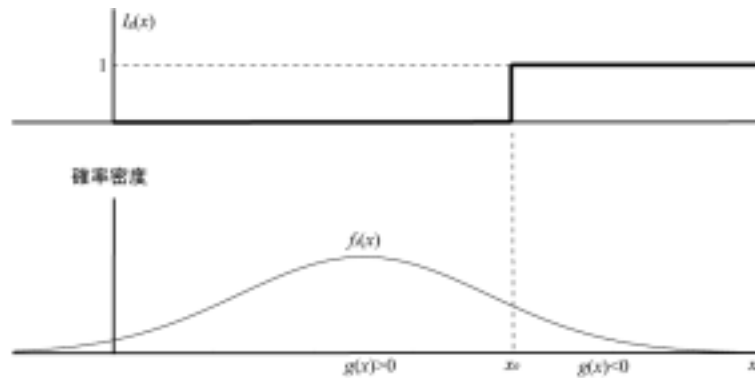


図 11 $I_g(x)$ 概念図

P_f を求めることは $I_g(x)$ の期待値を求めることと同様であるから、Monte-Carlo 法での評価は (31)式で行うことになる。

$$P_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_g(x_i) \quad (31)$$

この評価法は最低でも破壊確率の逆数の 10 倍 ~ 100 倍程度の試行を要する。これは、破壊確率が高い場合には問題ないのだが、極端に低い場合には非常に多くの試行が必要であることを示している。

3.3.2 重点サンプリング法(Importance sampling method)

前節で述べたとおり、単純 Monte-Carlo 法は破壊確率が低い場合にはかなり非効率である。これに対して効率改善を図るための方法が幾つか提案されているが、そのなかでも代表的なものがこの重点サンプリング法(Importance sampling method)である。

まず、 P_f を(32)式のように書き換える。

$$P_f = \int \cdots \int_{-\infty}^{\infty} I_g(x) \frac{f_X(x)}{h(x)} h(x) dx \quad (32)$$

(32)式は前節の P_f の分子、分母に同じ $h(x)$ をかけたただけなので、全く同じものである。したがって、任意の関数 $h(x)$ について上式は成立するのだが、重点サンプリング法に適用するには確率密度の性質を持つことが要求される。この場合、(32)式は

$$I_g(x) \frac{f_X(x)}{h(x)} \quad (33)$$

の期待値を求めることと解釈できる。したがって、Monte-Carlo 法では(34)式を評価することになる。

$$P_f \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_g(x_i) \frac{f_X(x_i)}{h(x_i)} \quad (34)$$

$h(x)$ の決め方によっては極めて少ない回数で効率よく P_f を評価することが出来る。 $h(x)$ の決め方については次のように考える。

破損確率の評価からも予想されるように、Monte-Carlo の試行は、 X の領域全てについて満遍なく行うのではなく、現象が起きる臨界値の近傍、すなわち $g(x)=0$ を満たす領域で、なおかつ発生頻度が高くなることが予想される点 x_0 近傍で実施するのが効率的であることは明らかである。そこで、 $h(x)$ として x_0 の位置でピークとなる図 12 のような確率密度関数を設定してやればよい。図 12 から明らかなように、 x_i のサンプリング値は $f_X(x)$ について発生する場合に比べて破損領域に多くの割合で発生する。ここでは概念的に 1 次元の図示での説明を行ったが、一般的に x_0 としては 3.1 で説明した設計点を考えればよい。この点は MPP (most probable point) と呼ばれることもある。 $h(x)$ と x_0 が適切に設定できた場合には驚くほどの効率改善が見られることが分かっている。しかし、 $h(x)$ と x_0 を適切に求める画一的な方法があるわけではない。特に $h(x)$ については任意性がある。事前に何も情報がなければ $h(x)$ は図 13 のように $f_X(x)$ を平行移動して x_0 の位置にもってこることがよく行われる。これだけでも飛躍的な効率改善が行われることが多い。

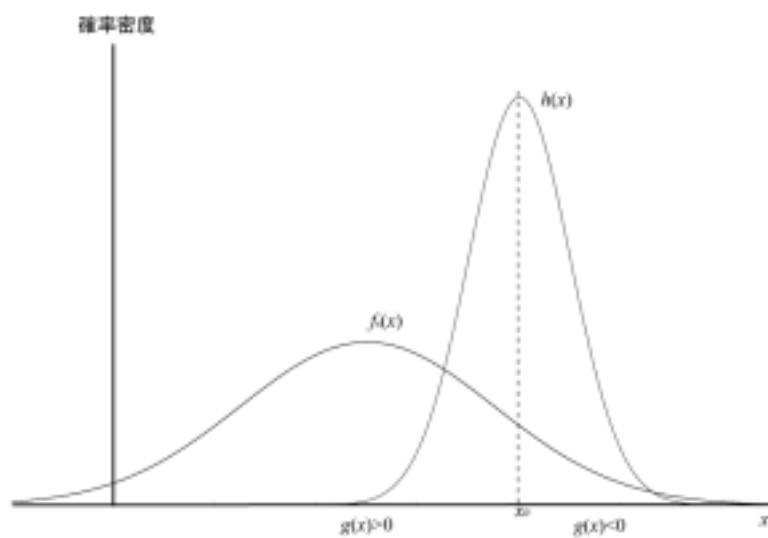


図 12 $h(x)$ の考え方

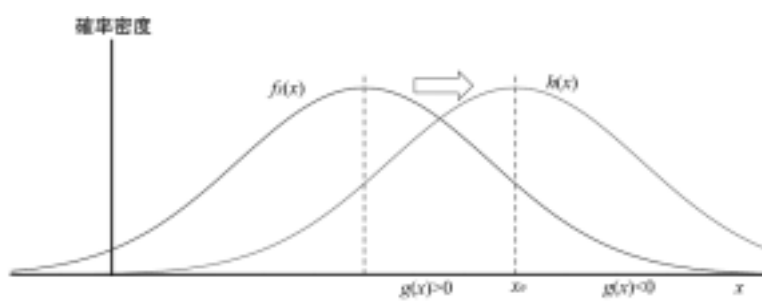


図 13 $f_X(x)$ の並行移動による $h(x)$ の設定

3.4 FORM 及び Monte-Carlo 法の実験例題

FOMR 及び Monte-Carlo 法の出力確認を行うため、以下のような実験例題を用意した。

[例題]

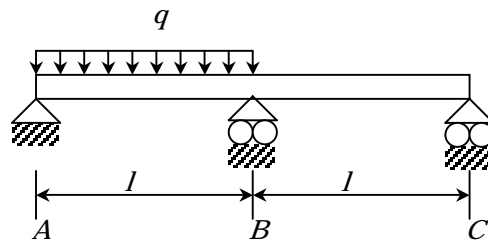


図 14 例題用不静定梁

図 14 のような長さ $2l$ の不静定梁の破壊確率を評価する。破壊は分布荷重 q により発生する最大曲げモーメント M_{\max} が M_{cr} を超えたときに発生するものとする。最大曲げモーメントは A, B の中点で $M_{\max} = \frac{49}{512} ql^2$ をとるので限界状態関数は次式で与えられる。

$$g(\mathbf{X}) = M_{cr} - M_{\max} \\ = M_{cr} - \frac{49}{512} ql^2 \left(= X_1 - \frac{49}{512} X_2 X_3^2 \right)$$

また、各確率変数は次のように与えた。

$$M_{cr} = X_1 = LN(50.0\text{tf/m}, 5.0\text{tf/m})$$

$$q = X_2 = LN(2.0\text{tf/m}, 1.0\text{tf/m})$$

$$l = X_3 = N(10.0\text{m}, 0.3\text{m})$$

ここで、 LN は対数正規分布、 N は正規分布で、括弧内の二つのパラメータはそれぞれ平均値、標準偏差である。計算結果は図に示すとおり。

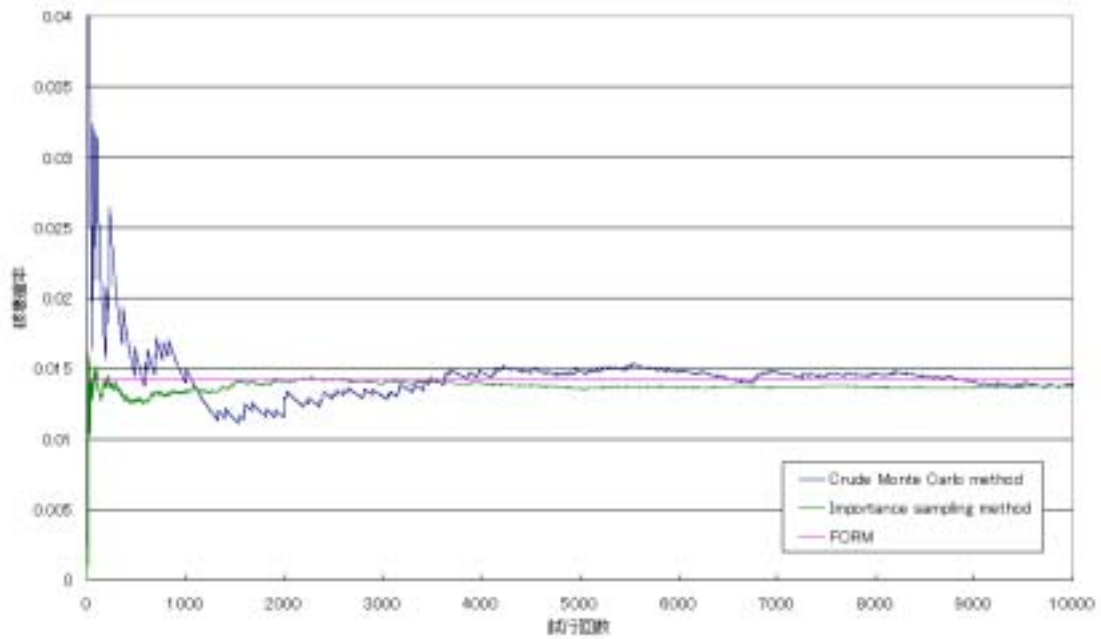


図 15 FORM 及び Monte-Carlo 法による破壊確率計算結果(実験例題)

図 15 から、単純 Monte-Carlo 法に比べ重点サンプリング法の方が収束が早く、穏やかに推移していることがわかる。FORM の出力結果も Monte-Carlo 法の収束値にほぼ一致し、有効な近似が行われていることがわかる。

第4章 計算結果

4.1 母数推定

MEMS マイクロミラーは脆性材料である単結晶シリコンを構造部材として持つ。脆性材料は強度のバラツキが大きく、区間推定をベースとした設計法が必要である。少なくとも現在までの研究で Weibull 分布に従うことが分かっているため、この章では Weibull 分布のパラメータ、形状母数及び尺度母数の推定のシミュレーションを行い、区間推定の有効性についての見当を行う。

4.1.1 推定条件

実機を模した試験片を用いた脆性破壊試験により表 4-1 のような実験結果が得られた[3]。

表 4-1 シミュレーションに用いる実験室データ

	形状母数	尺度母数
実験値 1	5.28	517
実験値 2	4.40	1575

このパラメータを平均値とし、変動係数 0.4 とする対数正規分布を事前分布として与えた場合の Bayesian-Update による母数推定を行う。また、最尤法による母数推定も同時に行う。今回は Bayesian-Update の有効性を検討するために、推定すべき実機の母数を表 4-2 の 1～18 のように仮定してシミュレーションを行った。

なお、乱数によるバラツキを排除するために、今回のシミュレーションは各サンプルサイズにつき 20 回を 1 セットとし、その平均をプロットした。

表 4-2 推定すべき実機の母数

事前分布に用いる母数	実験値 1			実験値 2	
	実機の形状母数	実機の尺度母数		実機の形状母数	実機の尺度母数
解析 1	2.64	258.5	解析 10	2.20	787.5
解析 2	2.64	517	解析 11	2.20	1575
解析 3	2.64	1034	解析 12	2.20	3150
解析 4	5.28	258.5	解析 13	4.40	787.5
解析 5	5.28	517	解析 14	4.40	1575
解析 6	5.28	1034	解析 15	4.40	3150
解析 7	10.56	258.5	解析 16	8.80	787.5
解析 8	10.56	517	解析 17	8.80	1575
解析 9	10.56	1034	解析 18	8.80	3150

4.1.2 推定結果

解析 1 の推定結果を以下に示す。

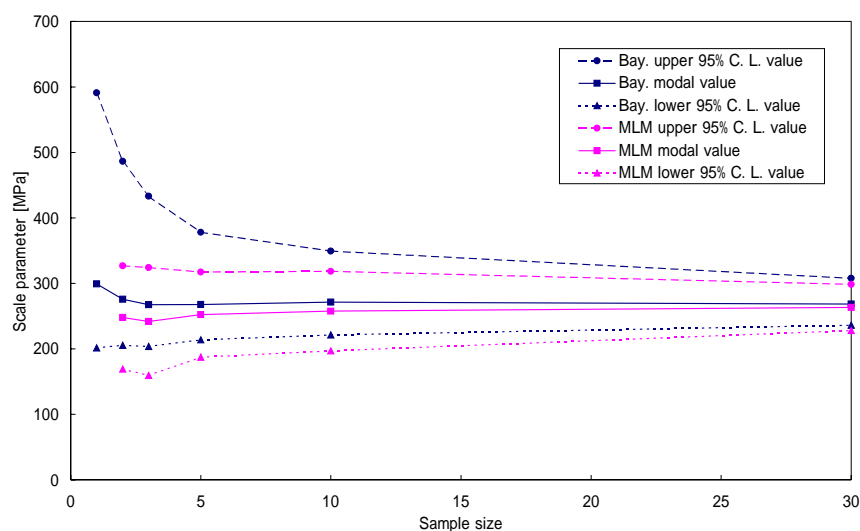


図 16 尺度母数の推定(解析 1)

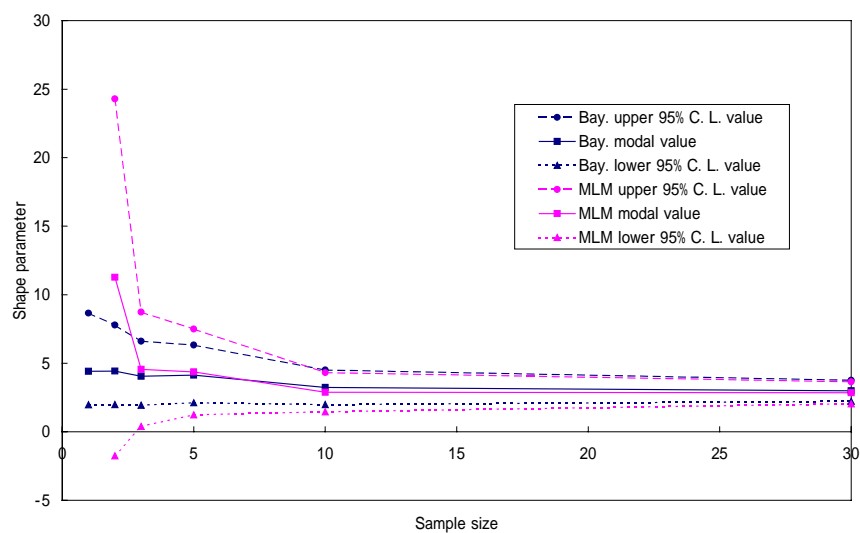


図 17 形状母数の推定(解析 1)

解析 2 の推定結果を以下に示す。

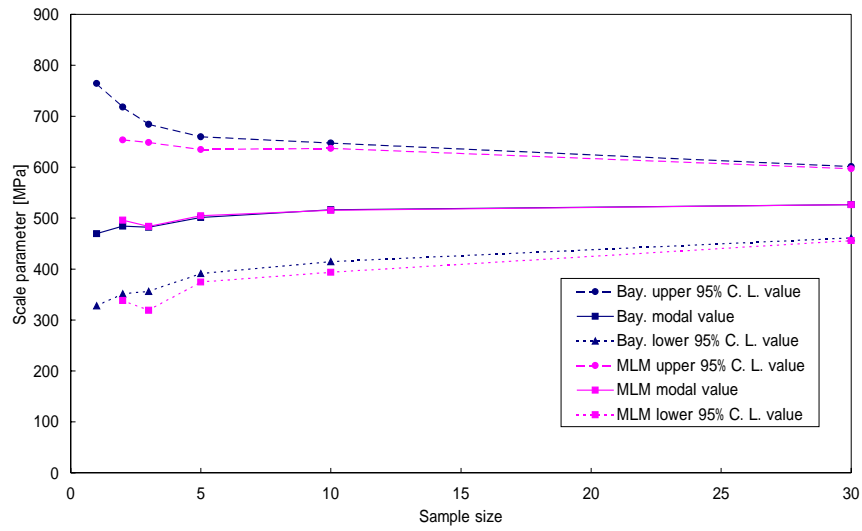


図 18 尺度母数の推定(解析 2)

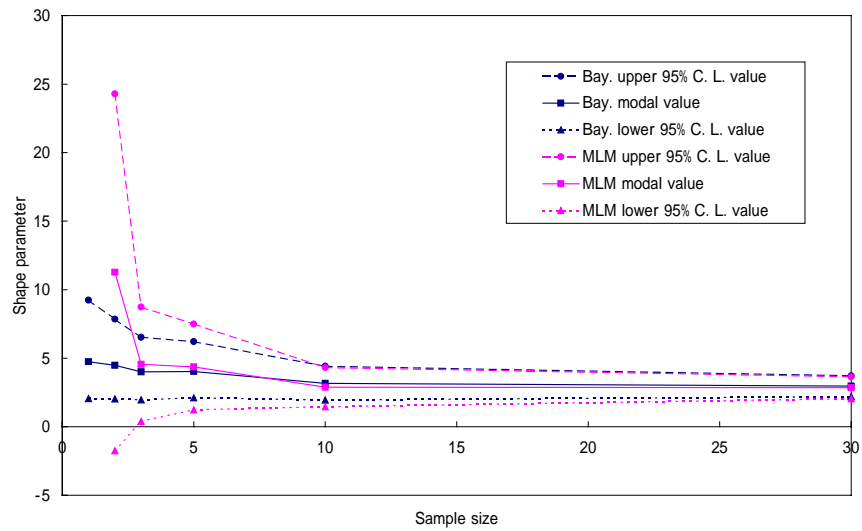


図 19 形状母数の推定(解析 2)

解析 3 の推定結果を以下に示す。

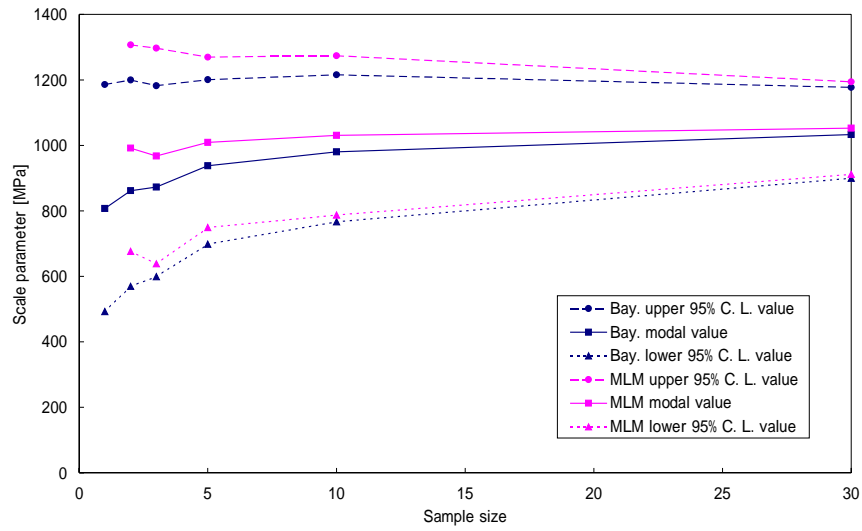


図 20 尺度母数の推定(解析 3)

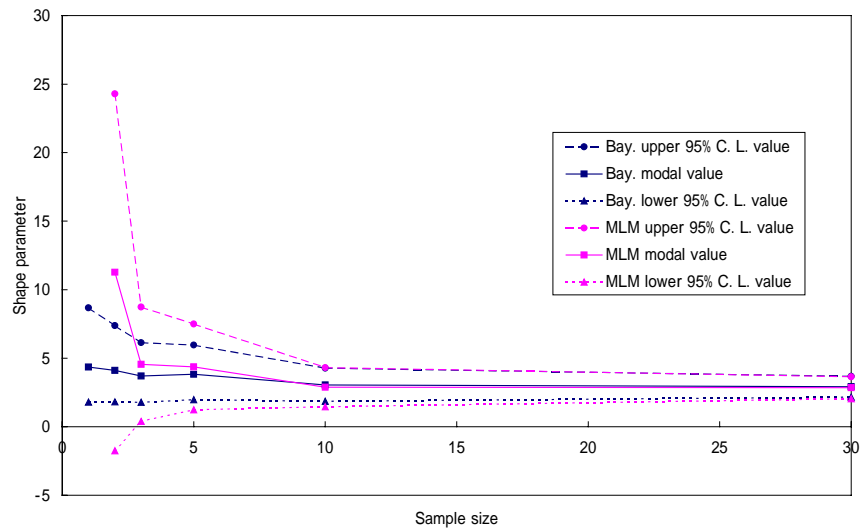


図 21 形状母数の推定(解析 3)

解析 4 の推定結果を以下に示す。

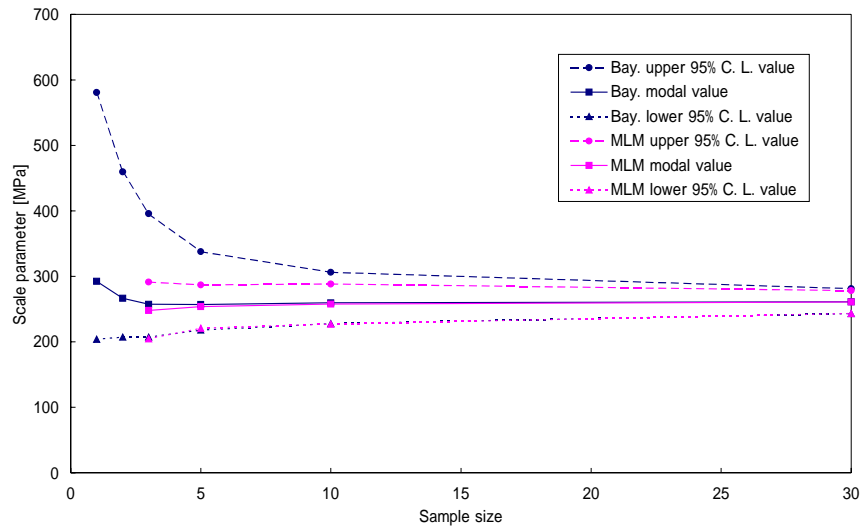


図 22 尺度母数の推定(解析 4)

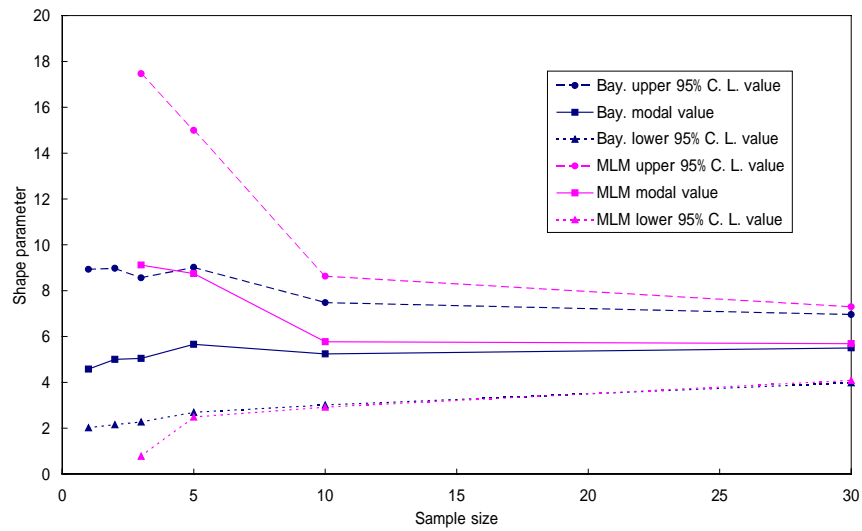


図 23 形状母数の推定(解析 4)

解析 5 の推定結果を以下に示す。

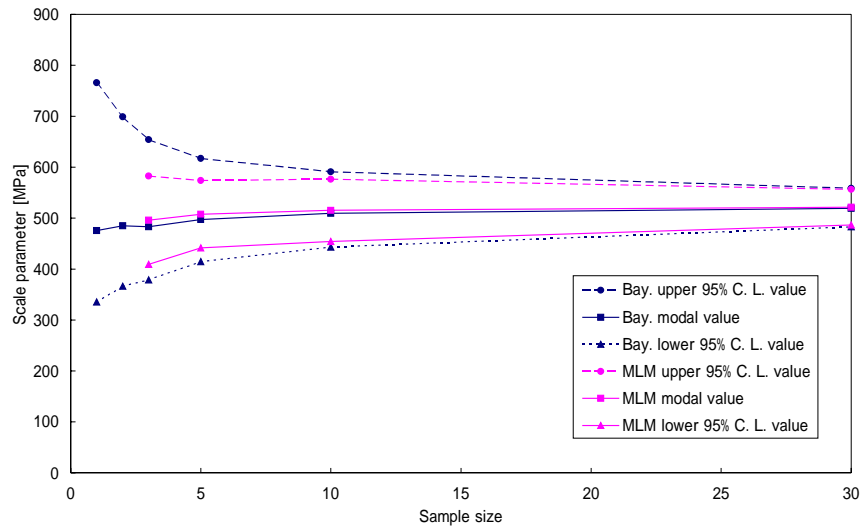


図 24 尺度母数の推定(解析 5)

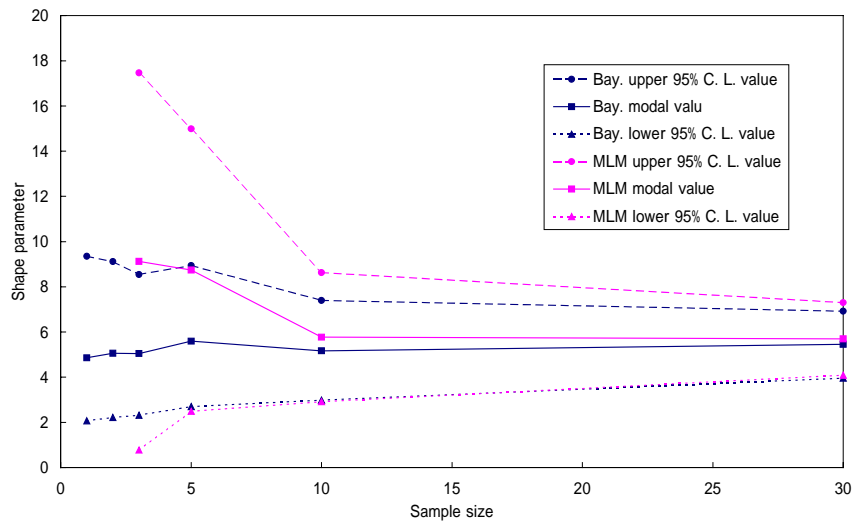


図 25 形状母数の推定(解析 5)

解析 6 の推定結果を以下に示す。

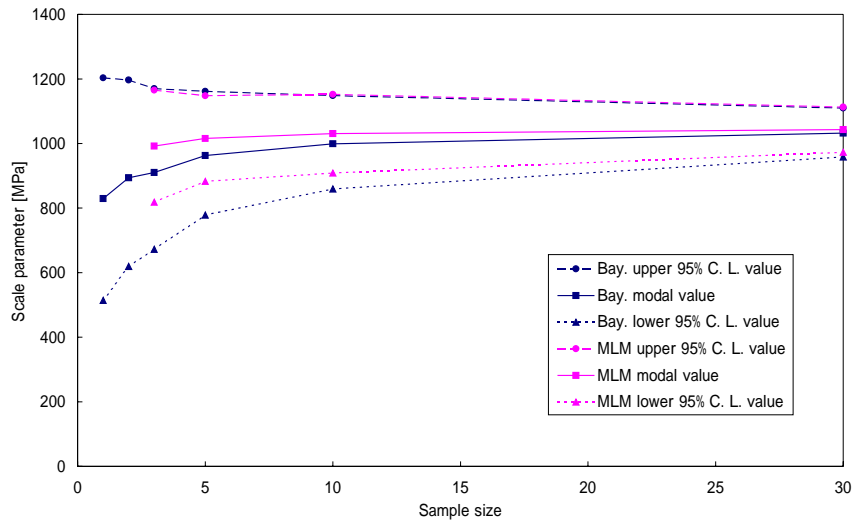


図 26 尺度母数の推定(解析 6)

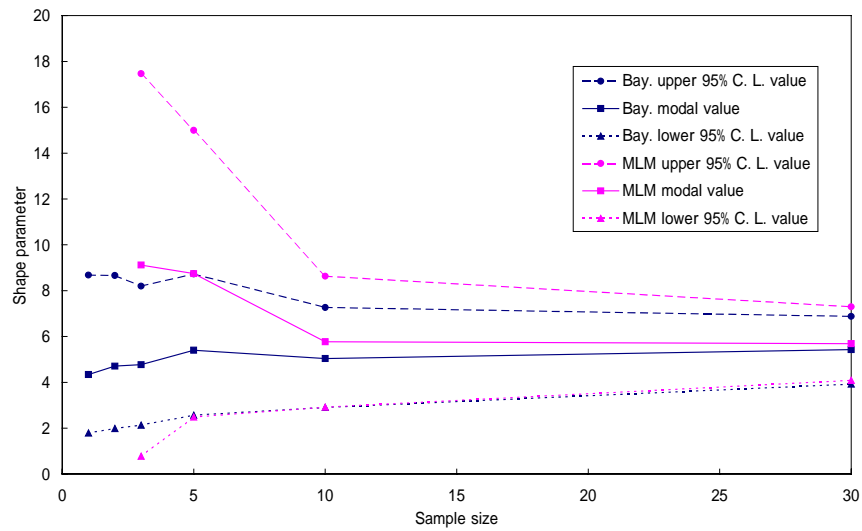


図 27 形状母数の推定(解析 6)

解析 7 の推定結果を以下に示す。

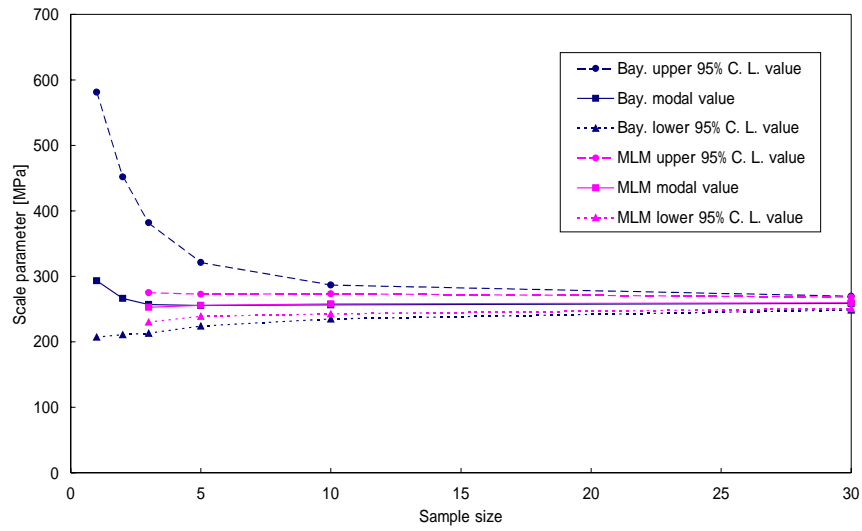


図 28 尺度母数の推定(解析 7)

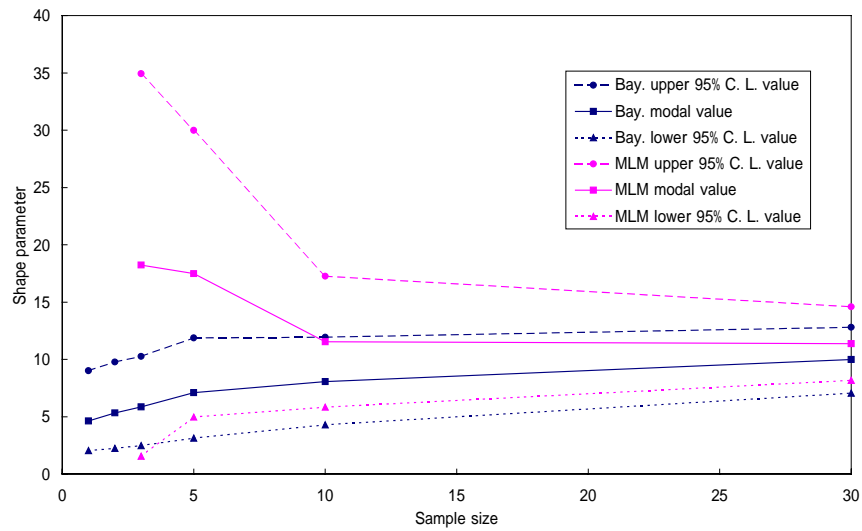


図 29 形状母数の推定(解析 7)

解析 8 の推定結果を以下に示す。

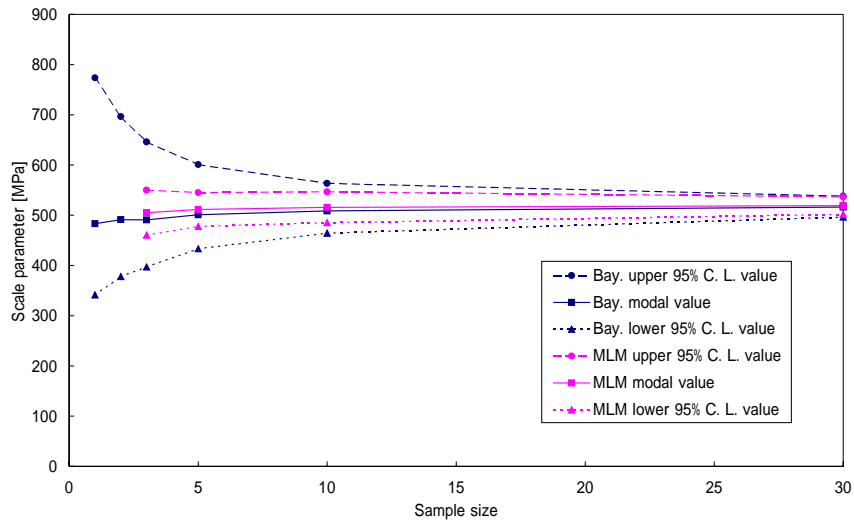


図 30 尺度母数の推定(解析 8)

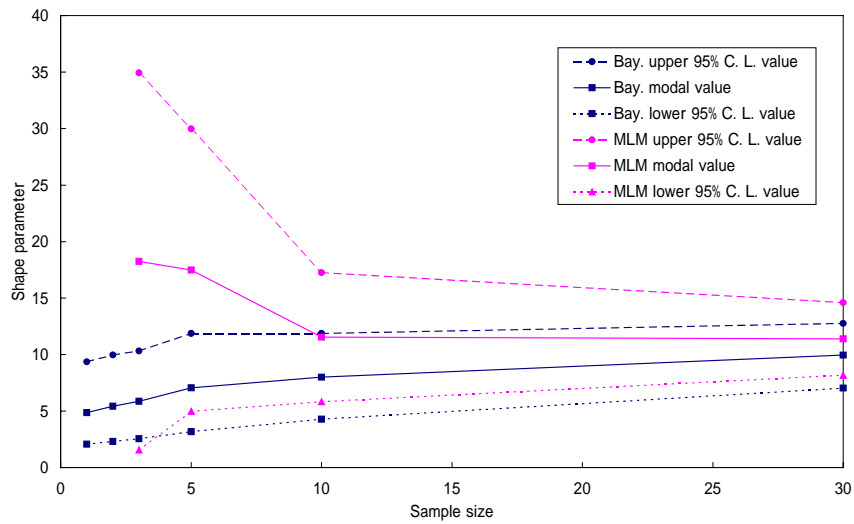


図 31 形状母数の推定(解析 8)

解析 9 の推定結果を以下に示す。

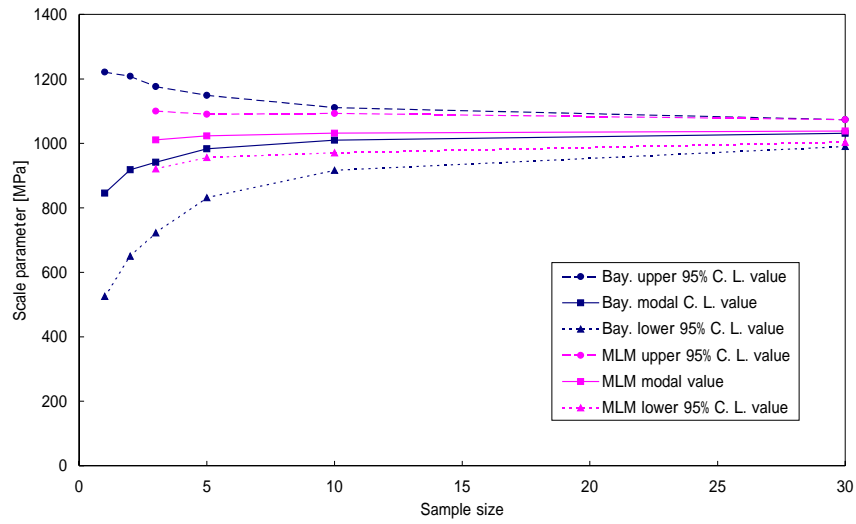


図 32 尺度母数の推定(解析 9)

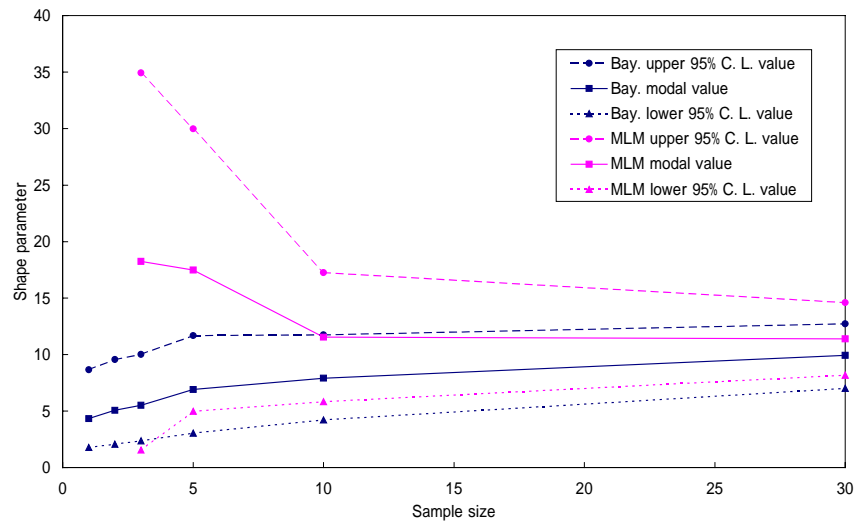


図 33 形状母数の推定(解析 9)

解析 10 の推定結果を以下に示す。

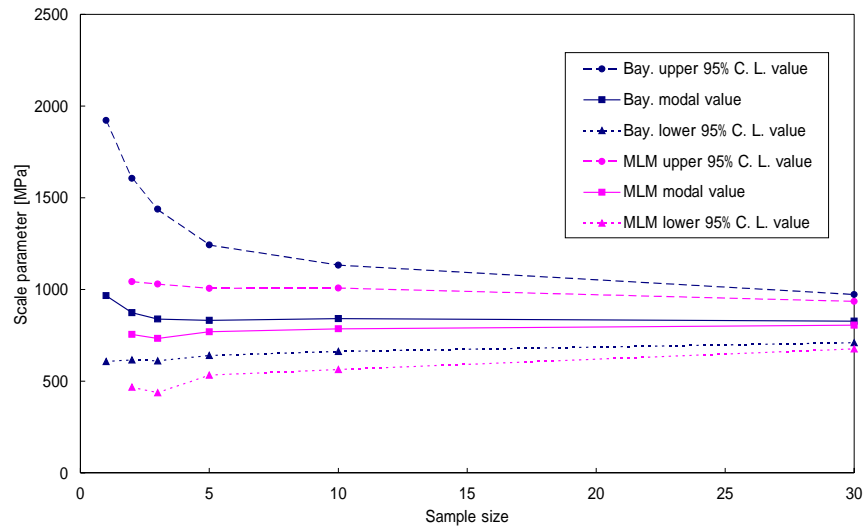


図 34 尺度母数の推定(解析 10)

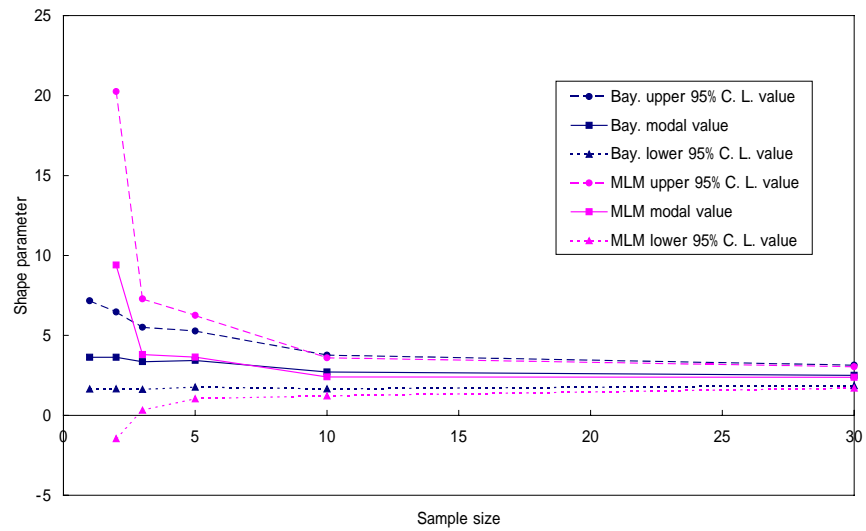


図 35 形状母数の推定(解析 10)

解析 11 の推定結果を以下に示す。

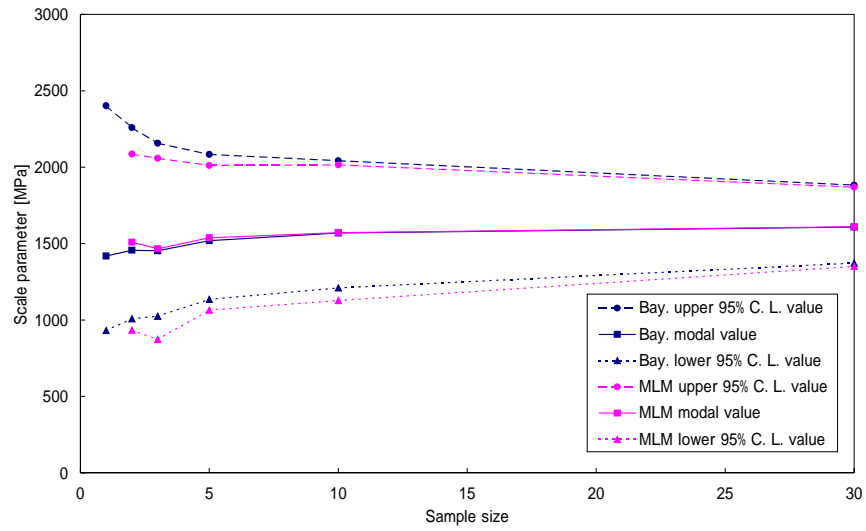


図 36 尺度母数の推定(解析 11)

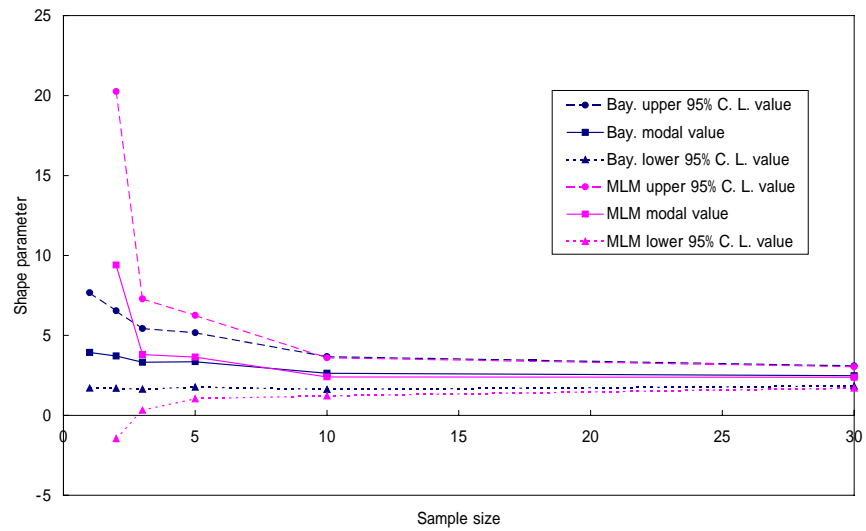


図 37 形状母数の推定(解析 11)

解析 12 の推定結果を以下に示す。

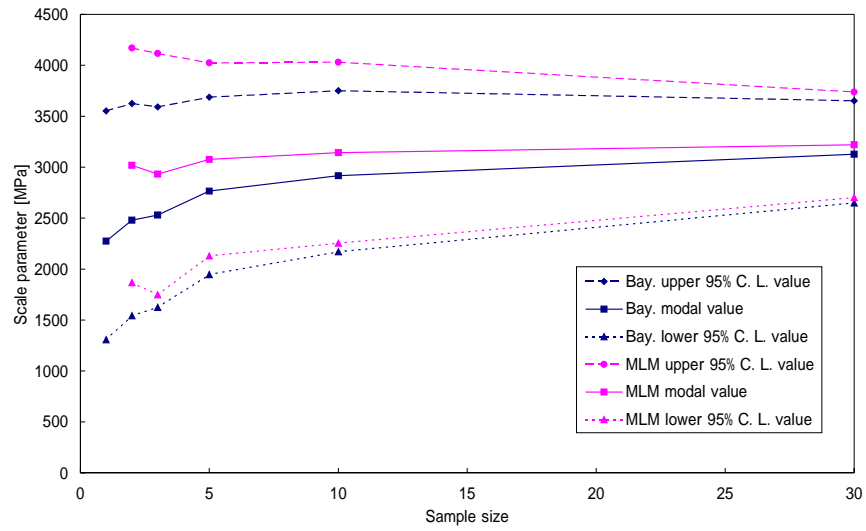


図 38 尺度母数の推定(解析 12)

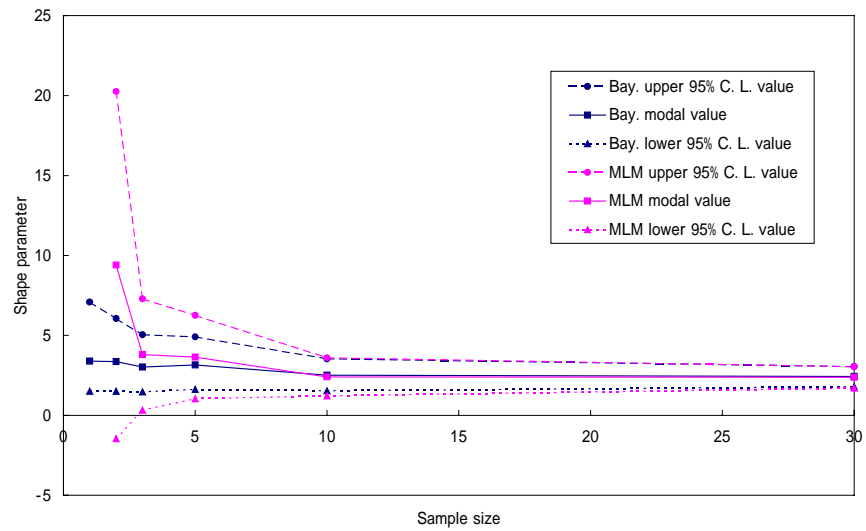


図 39 形状母数の推定(解析 12)

解析 13 の推定結果を以下に示す。

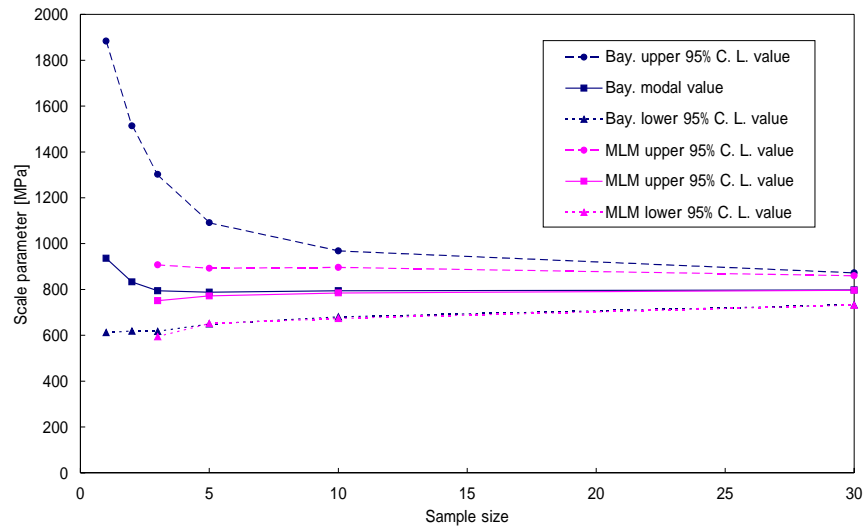


図 40 尺度母数の推定(解析 13)

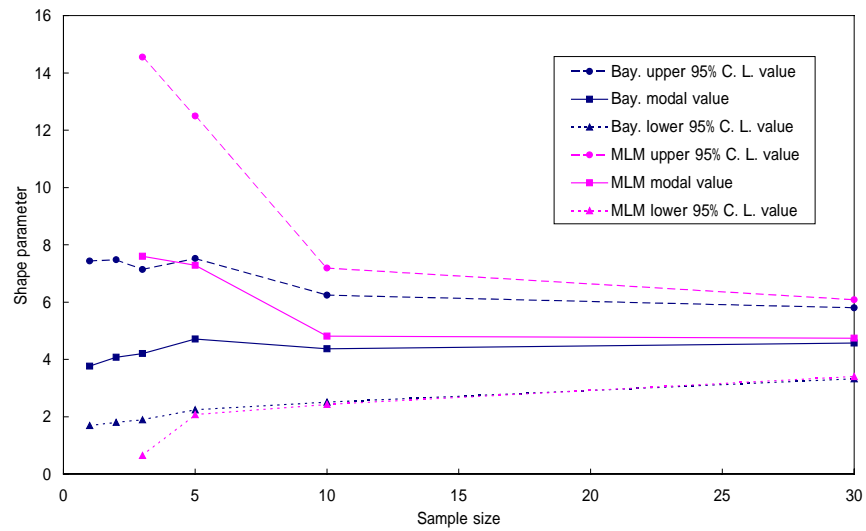


図 41 形状母数の推定(解析 13)

解析 14 の推定結果を以下に示す。

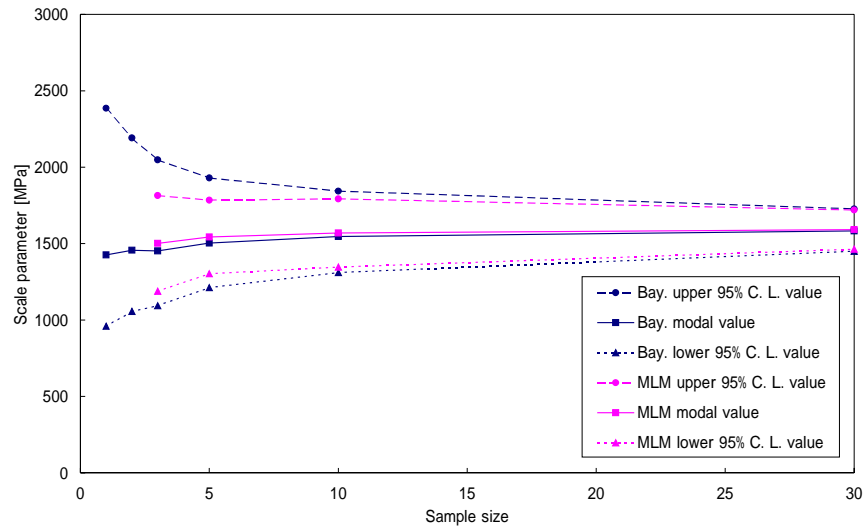


図 42 尺度母数の推定(解析 14)

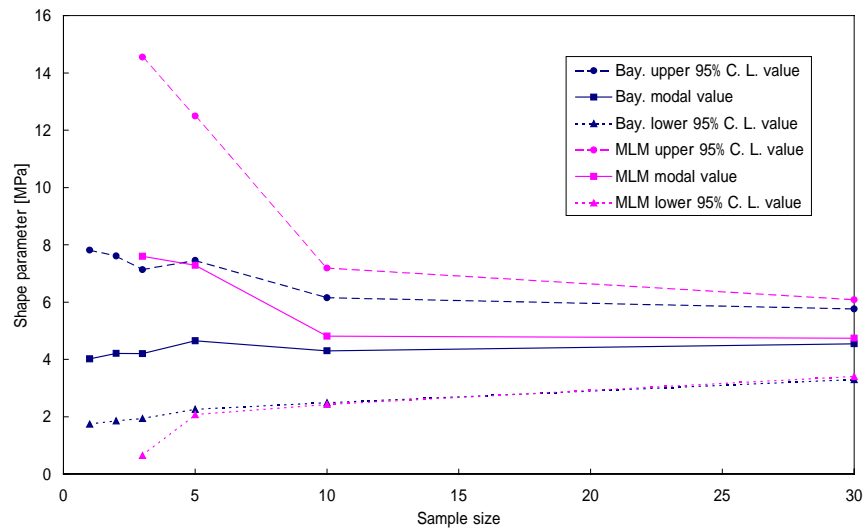


図 43 形状母数の推定(解析 14)

解析 15 の推定結果を以下に示す。

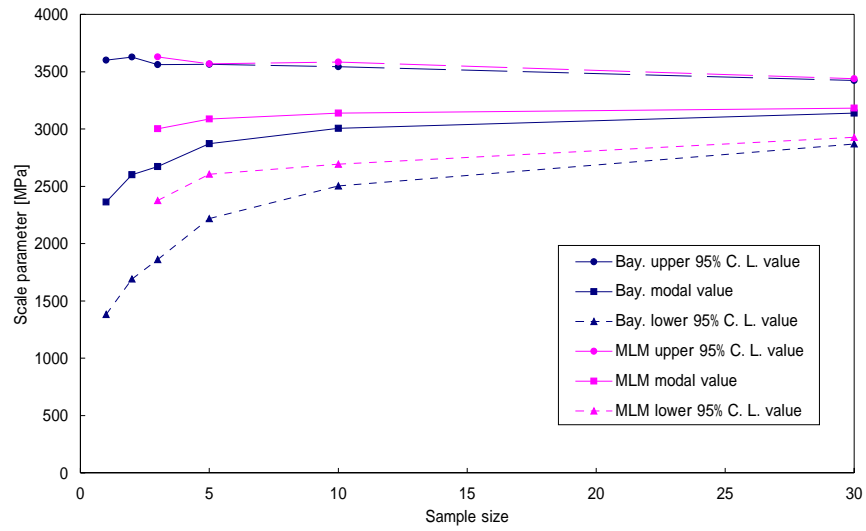


図 44 尺度母数の推定(解析 15)

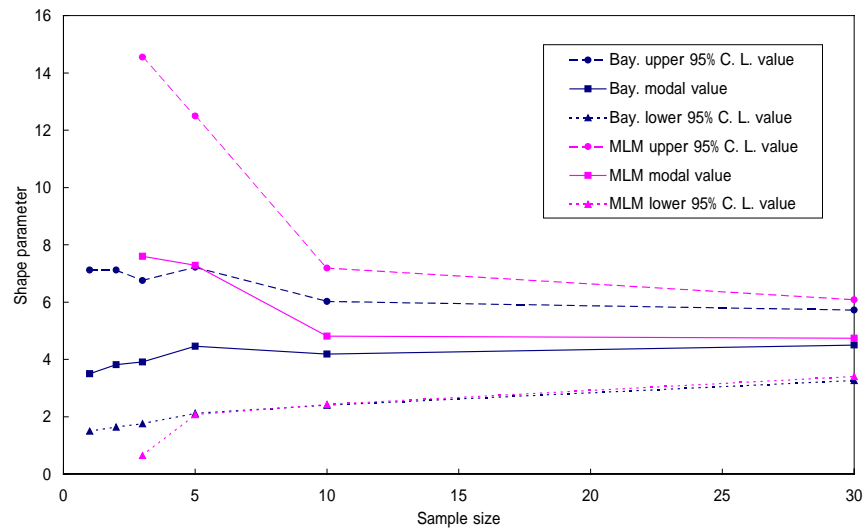


図 45 形状母数の推定(解析 15)

解析 16 の推定結果を以下に示す。

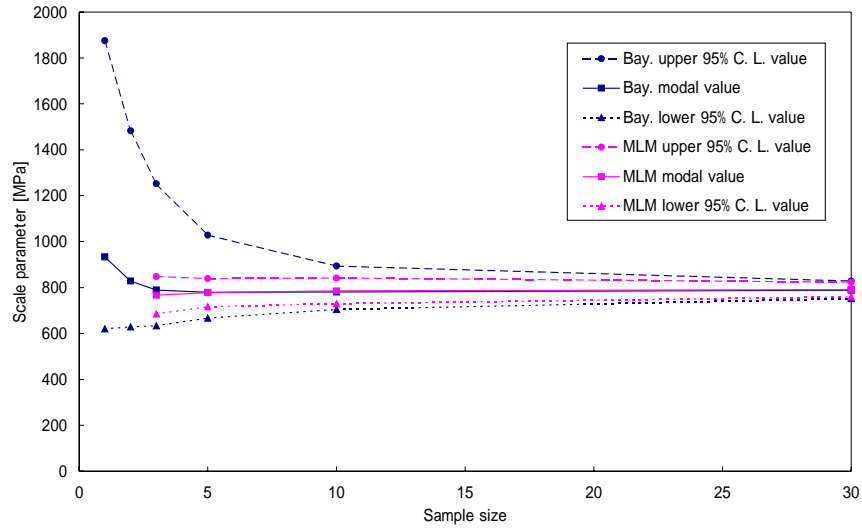


図 46 尺度母数の推定(解析 16)

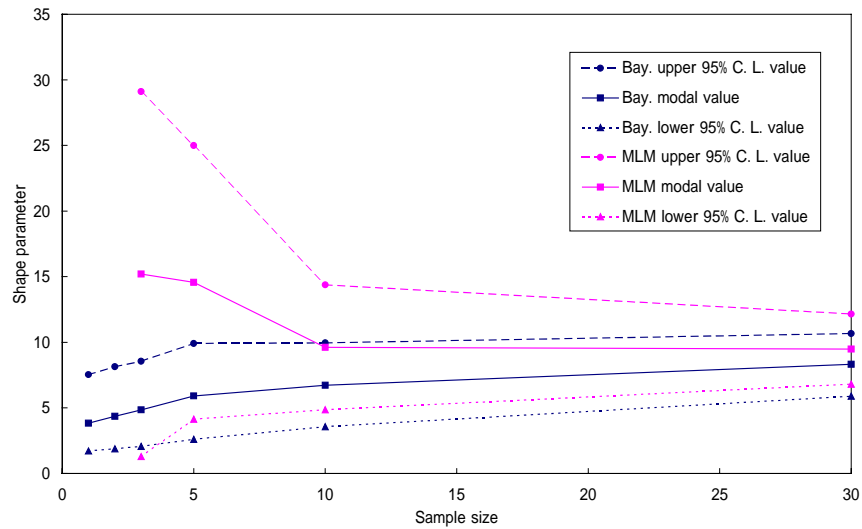


図 47 形状母数の推定(解析 16)

解析 17 の推定結果を以下に示す。

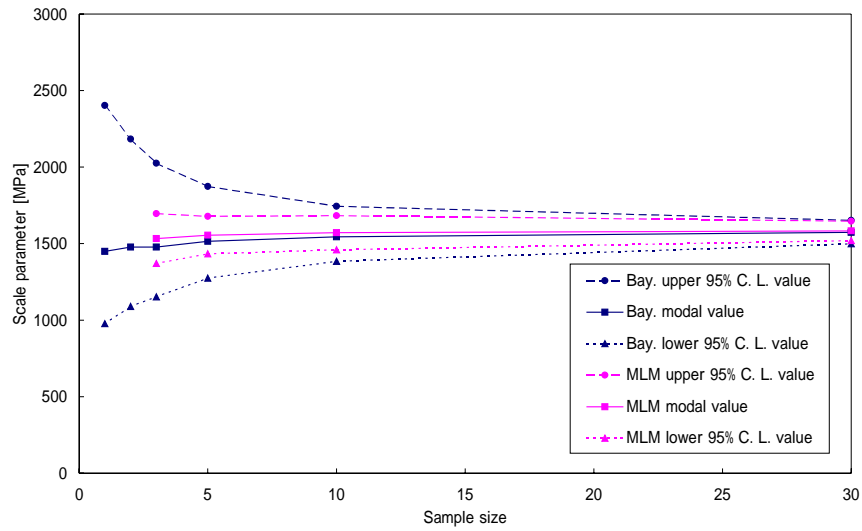


図 48 尺度母数の推定(解析 17)

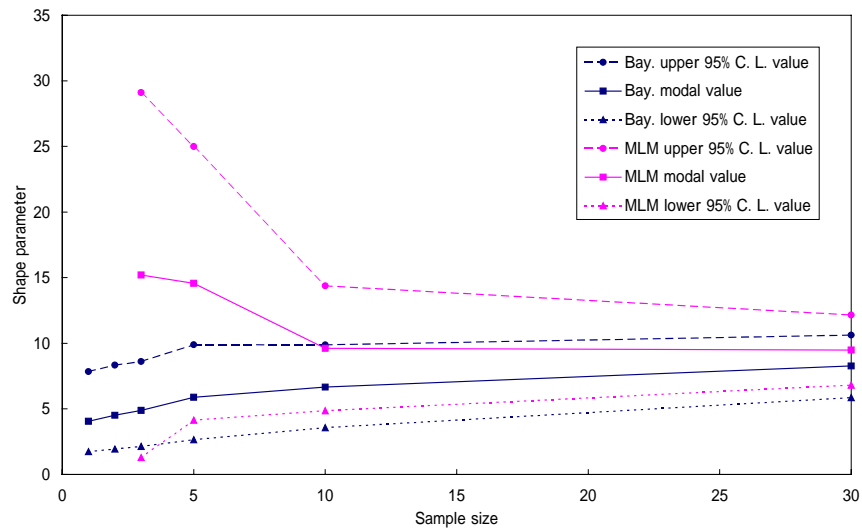


図 49 形状母数の推定(解析 17)

解析 18 の推定結果を以下に示す。

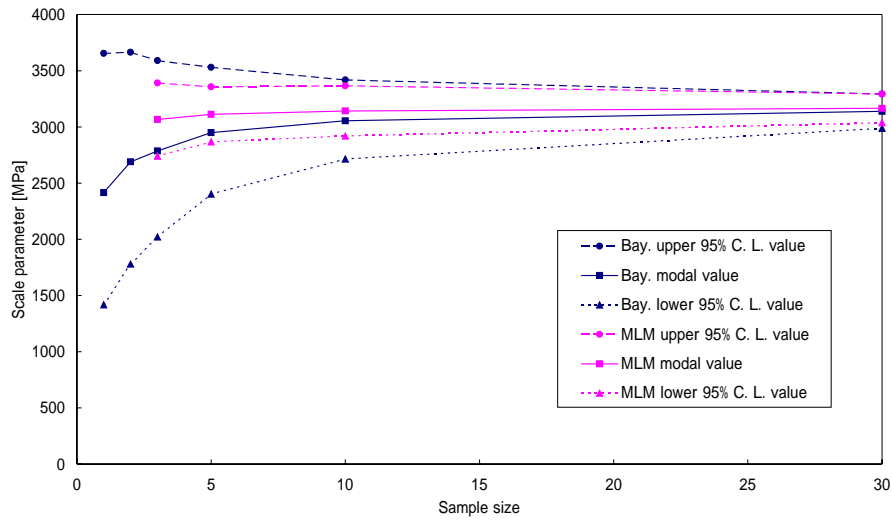


図 50 尺度母数の推定(解析 18)

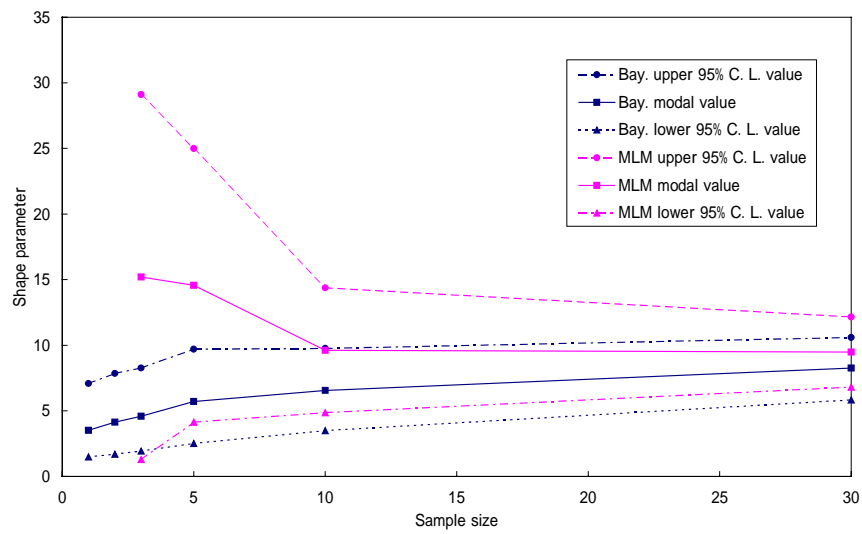


図 51 形状母数の推定(解析 18)

4.2 母数推定についての考察

4.2.1 母数の相対誤差について

結果の比較のために母数の相対誤差を次の式のように定義する。

$$d_{posterior} = \sqrt{\left(\frac{\beta_{posterior} - \beta_{true}}{\beta_{true}}\right)^2 + \left(\frac{\eta_{posterior} - \eta_{true}}{\eta_{true}}\right)^2}$$

$\beta_{posterior}$ 及び $\eta_{posterior}$ は形状母数と尺度母数の最尤推定値又は事後分布の最頻値である。また、 β_{true} 及び η_{true} は実機の母数である。サンプル数 3 個及び 10 個の場合の相対誤差と、最尤法と比較した Bayes 推定の有効性について表に示す。相対誤差の値が小さいほど有効な推定が出来ているものと考えられる。

表 4-3 サンプル数 3 の場合の相対誤差

	実機の形状母数	実機の尺度母数	Bayes 推定	最尤法	Bayes 推定の有効性
解析 1	2.64	258.5	0.538	0.730	
解析 2	2.64	517	0.519	0.730	
解析 3	2.64	1034	0.537	0.730	
解析 4	5.28	258.5	0.044	0.728	
解析 5	5.28	517	0.079	0.728	
解析 6	5.28	1034	0.167	0.728	
解析 7	10.56	258.5	0.446	0.727	
解析 8	10.56	517	0.448	0.727	
解析 9	10.56	1034	0.486	0.727	
解析 10	2.2	787.5	0.529	0.730	
解析 11	2.2	1575	0.515	0.730	
解析 12	2.2	3150	0.423	0.730	
解析 13	4.4	787.5	0.045	0.729	
解析 14	4.4	1575	0.090	0.729	
解析 15	4.4	3150	0.188	0.729	
解析 16	8.8	787.5	0.449	0.728	
解析 17	8.8	1575	0.450	0.728	
解析 18	8.8	3150	0.492	0.728	

表 4-4 サンプル数 10 の場合の相対誤差

	実機の形状母数	実機の尺度母数	Bayes 推定	最尤法	Bayes 推定の有効性
解析 1	2.64	258.5	0.233	0.093	×
解析 2	2.64	517	0.199	0.093	×
解析 3	2.64	1034	0.162	0.093	×
解析 4	5.28	258.5	0.009	0.093	
解析 5	5.28	517	0.079	0.093	
解析 6	5.28	1034	0.057	0.093	
解析 7	10.56	258.5	0.236	0.093	×
解析 8	10.56	517	0.243	0.093	×
解析 9	10.56	1034	0.253	0.093	×
解析 10	2.2	787.5	0.239	0.093	×
解析 11	2.2	1575	0.194	0.093	×
解析 12	2.2	3150	0.157	0.093	×
解析 13	4.4	787.5	0.011	0.093	
解析 14	4.4	1575	0.029	0.093	
解析 15	4.4	3150	0.067	0.093	
解析 16	8.8	787.5	0.236	0.093	×
解析 17	8.8	1575	0.244	0.093	×
解析 18	8.8	3150	0.256	0.093	×

サンプル数が 3 の場合には提案手法の方が有効な推定が可能であることがわかる。一方で、サンプル数 10 の場合には殆どのケースで最尤法が有利であることが分かる。しかし、形状母数の事前分布に正解を与えた場合には最尤法よりも有効な推定が来ている。形状母数は尺度母数に比べ推定が難しいので事前分布が有効な値であれば、ごく少数のデータからも精度の良い推定が行えることが分かる。本研究で用いた実験データは実機と同じ製造工程、形状・寸法のサンプルを用いているため、実機と形状母数が大きく異なるとは考えにくい。このようなことから提案手法が有効であると言える。

4.2.2 区間推定の幅について

正解が確信区間(又は信頼区間)内にあるのならば、区間推定の幅が小さいほど有効な推定であるといえる。今回はサンプル数が3個の場合と10個の場合を示す。サンプル数3個の結果を表4-5, 4-6に、サンプル数10個の結果を表4-7, 4-8に示す。

表 4-5 サンプル数3個の場合の尺度母数の95%確信(信頼)区間の幅

	Bayes 推定	最尤法	Bayes 推定の有効性
解析 1	230	165	×
解析 2	328	329	
解析 3	583	659	
解析 4	189	87	×
解析 5	275	173	×
解析 6	498	347	×
解析 7	169	45	×
解析 8	249	90	×
解析 9	454	179	×
解析 10	827	593	×
解析 11	1132	1185	
解析 12	1969	2371	
解析 13	686	313	×
解析 14	955	627	×
解析 15	1701	1254	×
解析 16	618	163	×
解析 17	873	325	×
解析 18	1569	651	×

表 4-6 サンプル数 3 個の場合の形状母数の 95%確信(信頼)区間の幅

	Bayes 推定	最尤法	Bayes 推定の有効性
解析 1	4.66	8.35	
解析 2	4.56	8.35	
解析 3	4.36	8.35	
解析 4	6.29	16.69	
解析 5	6.23	16.69	
解析 6	6.07	16.69	
解析 7	7.77	33.38	
解析 8	7.77	33.38	
解析 9	7.66	33.38	
解析 10	3.89	6.96	
解析 11	3.79	6.96	
解析 12	3.57	6.96	
解析 13	5.24	13.91	
解析 14	5.20	13.91	
解析 15	5.00	13.91	
解析 16	6.48	27.82	
解析 17	6.48	27.82	
解析 18	6.33	27.82	

表 4-7 サンプル数 10 個の場合の尺度母数の 95%確信(信頼)区間の幅

	Bayes 推定	最尤法	Bayes 推定の有効性
解析 1	128	122	
解析 2	233	243	
解析 3	449	487	
解析 4	78	61	
解析 5	148	122	
解析 6	289	244	×
解析 7	52	31	×
解析 8	99	61	×
解析 9	195	123	×
解析 10	470	444	
解析 11	833	889	
解析 12	1581	1777	
解析 13	288	223	×
解析 14	534	446	×
解析 15	1039	892	×
解析 16	189	112	×
解析 17	359	224	×
解析 18	703	448	×

表 4-8 サンプル数 10 個の場合の形状母数の 95%確信(信頼)区間の幅

	Bayes 推定	最尤法	Bayes 推定の有効性
解析 1	2.52	2.86	
解析 2	2.46	2.86	
解析 3	2.41	2.86	
解析 4	4.47	5.71	
解析 5	4.41	5.71	
解析 6	4.36	5.71	
解析 7	7.64	11.42	
解析 8	7.59	11.42	
解析 9	7.53	11.42	
解析 10	2.11	2.38	
解析 11	2.05	2.38	
解析 12	2.00	2.38	
解析 13	3.73	4.76	
解析 14	3.66	4.76	
解析 15	3.62	4.76	
解析 16	6.38	9.52	
解析 17	6.31	9.52	
解析 18	6.27	9.52	

事前分布の変動係数が 0.4 程度の本研究のケースでは、尺度母数の推定に関しては最尤法の方が有利なようだ。しかし、形状母数が小さく、サンプルがばらついて尺度母数の特定が難しい場合は Bayes 推定の方が若干有利になる場合も見られる。形状母数の推定に関しては Bayes がほぼ全てのケースで有利であることが分かる。

4.3 設計応力評価

4.1 で推定した耐力の母数の 95%確信区間下限及び 95%信頼区間下限の値を用いて設計応力を見積もる。この際、3.2 の FORM を用いて設計応力のあたりを付け、3.3 の Monte-Carlo 法で破壊確率が 1%になる設計応力を計算する。こうした手順をとるのは、FORM は計算自体は速いのだが、あくまで近似評価手法であり、正確に破壊確率を求めるには Monte-Carlo 法による評価が必須であるためである。Monte-Carlo 法にて発生させる設計応力及び耐力は図 52 のような確率密度関数 S, R に従う。

設計応力 S に関しては、デバイス立ち上げ時の振幅の不安定さも加味して、変動係数 0.1 の正規分布とした。限界状態関数 g は耐力分布 R (Weibull 分布 ; 母数は推定値の 95%確信(信頼)区間下限値)と設計応力分布 S (変動係数 0.1)を用いて、

$$g = R - S$$

とする。

なお、設計応力の見積もりはサンプル数 3 個の場合と 10 個の場合について行った。

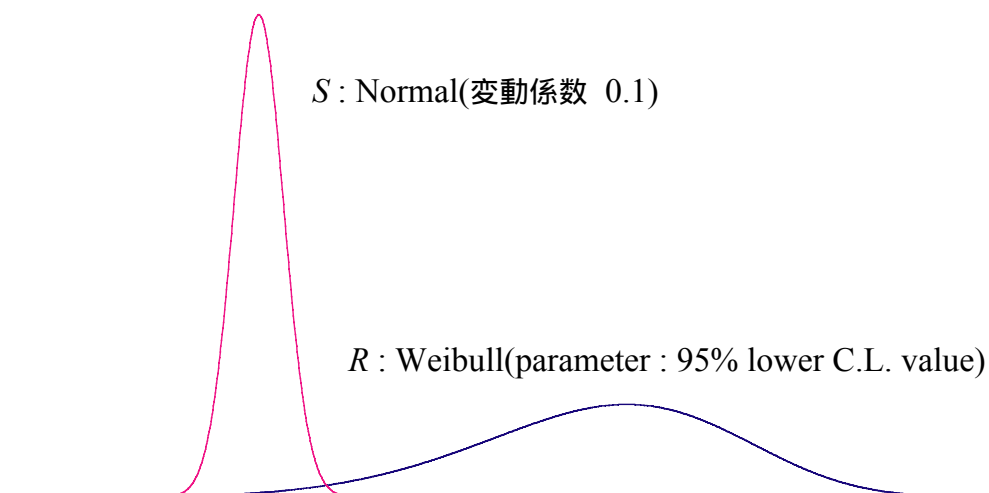


図 52 耐力及び設計応力の評価

4.3.1 推定結果

サンプル数が3個の場合、10個の場合の目標破壊確率1%の場合の設計応力をそれぞれ表に示す。なお、参考のために母数が正解値の場合に得られる設計応力も合わせて記載する。サンプル数が増加すると次第にこの値に収束する。

表 4-9 サンプル3個から推定した設計応力[MPa]

	Bayes 推定	最尤法	母数が正解値の場合	Bayes の有効性
解析 1	20	0	44.8	
解析 2	35	0	89.5	
解析 3	46	0	179.0	
解析 4	27	1	105.8	
解析 5	52	1	211.6	
解析 6	79	2	423.3	
解析 7	33	12	160.4	
解析 8	65	24	320.7	
解析 9	102	47	641.4	
解析 10	36	0	56.3	
解析 11	62	0	112.6	
解析 12	84	0	225.0	
解析 13	54	0	271.8	
解析 14	99	1	543.6	
解析 15	132	2	1087.1	
解析 16	68	19	450.7	
解析 17	130	39	901.3	
解析 18	185	77	1802.6	

表 4-10 サンプル 10 個から推定した設計応力[MPa]

	Bayes 推定	最尤法	母数が正解値の場合	Bayes の有効性
解析 1	22	8	44.8	
解析 2	39	17	89.5	
解析 3	64	34	179.0	
解析 4	49	46	105.8	
解析 5	94	93	211.6	
解析 6	174	185	423.3	
解析 7	79	108	160.4	×
解析 8	155	215	320.7	×
解析 9	302	430	641.4	×
解析 10	41	13	56.3	
解析 11	70	25	112.6	
解析 12	105	51	225.0	
解析 13	108	100	271.8	
解析 14	204	201	543.6	
解析 15	365	401	1087.1	×
解析 16	192	277	450.7	×
解析 17	375	555	901.3	×
解析 18	717	1110	1802.6	×

4.4 設計応力についての考察

サンプル数が 3 個の場合には、Bayes 推定の方が 1 から 18 の全ての解析で有効な推定が行えることが分かった。サンプル数が 10 個の場合は、形状母数の事前分布に正解を与えた Bayes 推定は最尤法とほぼ同じ結果となった。また、形状母数に関して実機の 2 倍の値を事前分布として与えた Bayes 推定は最尤法よりも有効な推定が行われおり、目標破壊確率を上回ることはないことも確認できた。形状母数について実機の 0.5 倍を事前分布として与えた Bayes 推定は、サンプル数の増加に伴い、最尤法に比べて安全側の評価を下してはいるが、少サンプル数では有効な推定が出来ている。

いずれの結果にしる、データ数の増加とともに設計応力は増加している。これは、4.1 の

母数推定の結果として、データ数の増加とともに推定の精度が上がり、推定区間の幅が狭まり、その下限値が上昇しているためであると考えられる。

第5章 疲労寿命評価

5.1 緒言

ごく最近まで、脆性材料である単結晶シリコンは疲労しないものと考えられてきた。しかし、R. O. Ritchie らは単結晶シリコンの破壊メカニズムについての研究を行い、 μm のオーダーでは「疲労破壊」が存在することを突き止め、その現象が表面酸化膜の形成と破壊の繰り返しによるものだと考察した[6]。そのクラック進展メカニズムを図 4.1.1 に示す。

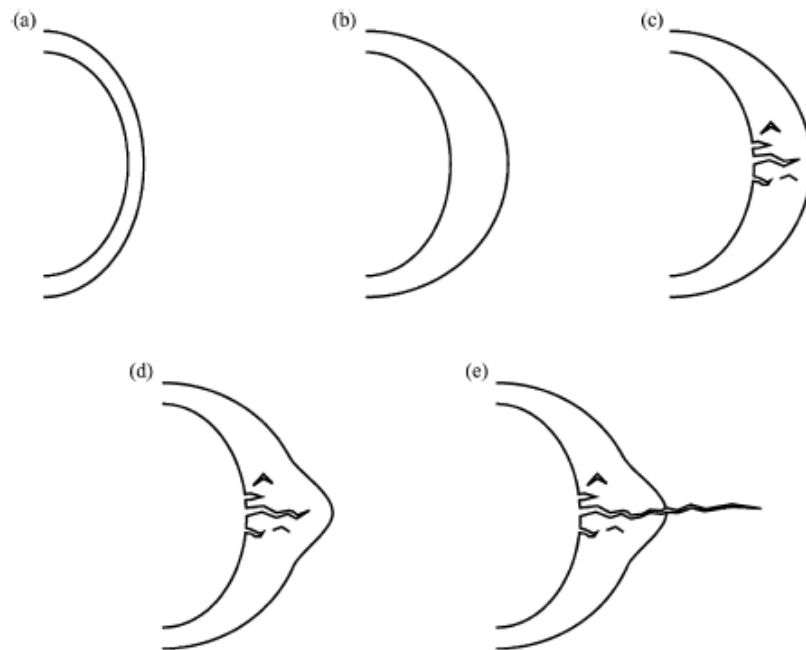


図 53 単結晶シリコンの疲労破壊のメカニズム

まず単結晶シリコン表面に、酸化膜(SiO_2)が形成される(図 53(a))。時間の経過と共に形成された酸化膜は成長を続ける(図 53(b))。酸化膜は単結晶シリコンに比べ脆いため、そこからクラックが入る(図 53(c))。さらにそのクラック先端部から酸化が進み、それを追ってクラックが進む(図 53(d), (e))。このように、酸化と酸化膜破壊の繰り返しによって、最終的に破壊に至る。この反応は酸化しやすい高温高湿条件下では加速することも分かっている。

今回の研究で用いるマイクロミラーは Ritchie らが研究に用いた試験片よりも 10 倍 ~ 1

00倍程度スケールが大きいと、容易にクラックが走るとは考えにくい。しかも、通常使用環境下にあっては、自然酸化も容易ではない。このような条件のもと、通常の寿命試験を行っても時間がかかりすぎるため、本研究では高温高湿環境下での加速寿命試験を行うことにより使用環境での寿命を外挿評価する。

5.2 寿命評価式のパラメータ推定

疲労寿命は一般に疲労寿命による材料欠陥の最小値分布に従うため、本研究では工学的な最小値分布として最もよく用いられる Weibull 分布を用いることとした。

寿命の評価式は以下の形で記述出来ると考えられる。

$$life = AP^{-B} \exp\left(\frac{C}{T} - D\phi\right)$$

この式は、寿命が湿度の累乗に比例するとする実験式[9]、

$$life \propto p^{-B}$$

アレニウスモデルによる寿命評価式[9]、

$$life \propto \exp\left(\frac{C}{T}\right)$$

及び、疲労寿命の対数は応力振幅に凡そ比例して減少し、さらに振れ角(光学角)と応力振幅が比例関係にあること[3]から得られる次式、

$$life \propto \exp(-D\phi)$$

を用いて記述した。

上式で、 P は湿度[%]、 T は温度[K]、 ϕ は振れ角(光学角)[degree]である。また、 A, B, C, D は定数である。Weibull 分布の尺度母数が上式の $life$ で与えられると考えると、疲労寿命の確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(x) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\eta}\right)^\beta\right\}$$

$$\eta = AP^{-B} \exp\left(\frac{C}{T} - D\phi\right)$$

打ち切りデータも含めた尤度は次で示す式のとおり。

$$L = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r \left[\frac{\beta}{\eta} \left(\frac{x_i}{\eta}\right)^{\beta-1} \exp\left\{-\left(\frac{x_i}{\eta}\right)^\beta\right\} \right] \times \left[\exp\left\{-\left(\frac{t_r}{\eta}\right)^\beta\right\} \right]^{n-r}$$

上式で、 n は全サンプルデータ数、 r は打ち切りデータ数、 t_r は打ち切り時間である。これをもとにした最尤方程式は次に示すとおりである。

$$\frac{\partial}{\partial A} \ln L = -r \frac{\beta}{A} + \frac{\beta}{A} \sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i}{\eta}\right)^\beta + (r-n) \frac{\beta}{A} \left(\frac{t_r}{\eta}\right)^\beta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial B} \ln L = \beta \sum_{i=1}^r \ln P_i - \beta \sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i}{\eta}\right)^\beta \ln P_i - \beta(r-n) \left(\frac{t_r}{\eta}\right)^\beta \ln P_r = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial C} \ln L = -\beta \sum_{i=1}^r \frac{1}{T_i} + \beta \sum_{i=1}^r \frac{1}{T_i} \left(\frac{x_i}{\eta}\right)^\beta + \beta(r-n) \frac{1}{T_r} \left(\frac{t_r}{\eta}\right)^\beta = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial D} \ln L = \beta \sum_{i=1}^r \phi_i - \beta \sum_{i=1}^r \phi_i \left(\frac{x_i}{\eta}\right)^\beta - \beta(r-n) \left(\frac{t_r}{\eta}\right)^\beta \phi_r = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln L = \frac{r}{\beta} + \sum_{i=1}^r \ln\left(\frac{x_i}{\eta}\right) - \sum_{i=1}^r \left(\frac{x_i}{\eta}\right)^\beta \ln\left(\frac{x_i}{\eta}\right) + (r-n) \left(\frac{t_r}{\eta}\right)^\beta \ln\left(\frac{t_r}{\eta}\right) = 0$$

$$\eta = AP^{-B} \exp\left(\frac{C}{T} - D\phi\right)$$

以上の式を数値的に解くことにより、係数 A, B, C, D 及び形状母数 β を決定することが出来る。

また、今回は半導体等の寿命の評価等に使われる対数正規分布による検討も行った。対数正規分布は Weibull 分布に比べ計算の扱いが容易であり、工学的にも広く用いられている。解析では対数平均が *life* に従うものとして計算した。

5.3 試験データ及びその評価

以下に日本信号(株)で行われた疲労寿命試験で得られたデータを示す。この寿命試験は、恒温恒湿環境下において 540Hz で両振り加振したものである。なお、表中で未破壊となっているものは、2064 時間(86 日)が経過した時点で動作を続けており、試験を打ち切ったものである。

表 5-1 疲労寿命試験データ

振れ角(光学角)[±度]	温度[]	湿度[%]	寿命[hr]
80	85	80	0.08
80	85	80	0.25
80	85	80	0.25
70	85	80	5.16
70	85	80	5.66
70	85	80	17
70	20	80	85
70	20	80	160
70	20	80	209.5
70	85	25	130.5
70	85	25	331.5
70	85	25	975
60	85	80	60
60	85	80	120.33
60	85	80	258.5
60	85	80	29.53
60	85	80	38.5
60	85	80	39
60	85	80	56.58
55	85	80	90.94
55	85	80	93.67
55	85	80	114.79

34	85	80	未破壊
34	85	80	未破壊
34	85	80	未破壊
34	85	80	未破壊
34	85	80	未破壊

図 54 に表 5-1 を用いた計算から得られた湿度 80%、温度 80 の加速寿命環境における振れ角を縦軸とした S-N 線図を示す。なお、グラフは最尤法により得られた最尤推定値を母数として 99%予測区間を表示している。99%予測区間とは、サンプルが従うであろう確率密度関数の累積 0.5%点以下及び 99.5%以上の裾野部分を排除した区間である。すなわち、実験で得られるデータの 99%がその範囲内に収まると予測される範囲である。

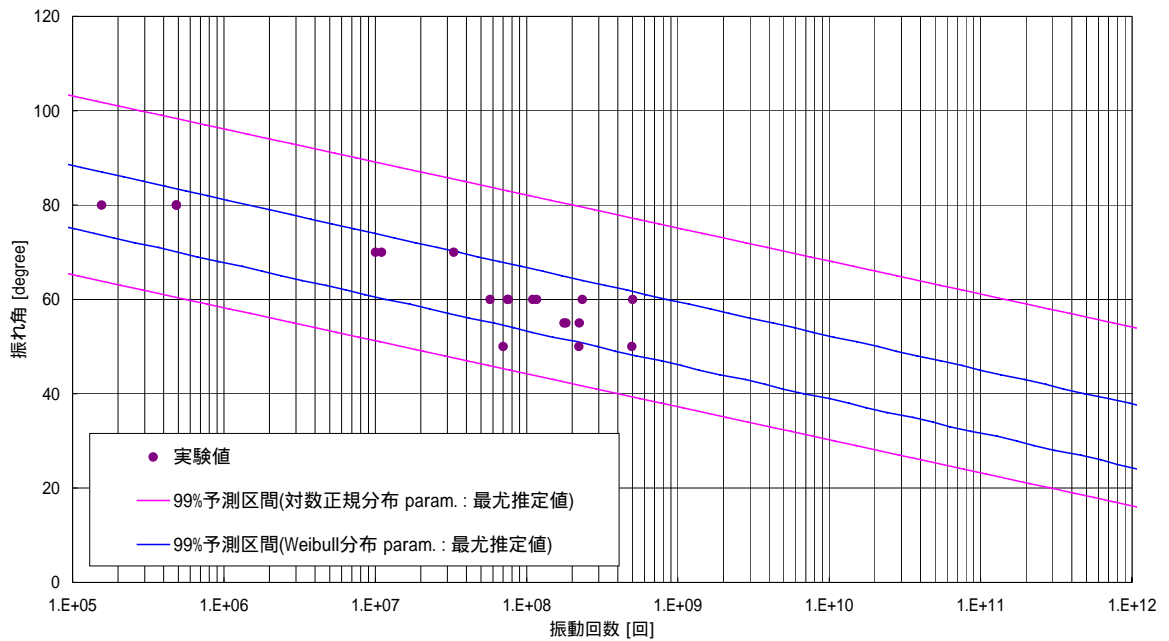


図 54 疲労寿命の 99%予測区間

また、通常環境(1971-2000 の東京の気象データ : 平均最高気温 19.7 、平均湿度 63%)、振幅 34 度における寿命の 99%予測区間下限値は Weibull 分布で 104.6 年、対数正規分布で 10.44 年となった。

5.4 考察

対数正規分布と Weibull 分布の場合とで勾配には殆ど差が見られないが、Weibull 分布を用いた予測区間は明らかに狭く、適当な評価が出来ているとは考えにくい。その一方で対数正規分布により得られた予測区間は全ての実験データを包含しており、安全側の評価が出来ている。現段階では、計算のしやすさなども考えると、工学的には対数正規分布による評価が適当であると考えられる。

第6章 結言

6.1 静的破壊について

バラツキの大きい脆性材料の静的強度を扱うにあたって、効率化のために実験室データを事前情報として用いることで少数の実機サンプルから強度分布のパラメータを推定する手法の提案を行った。

また、パラメータ推定の結果、データ数の増加とともに推定の精度が上がり、確信区間の幅が狭まることが分かった。適切な事前分布を与えることで推定をより有効に行うことが可能であることも分かった。幾つの実機サンプルが必要かは必要となる仕様に依存するため、サンプル数によって設計応力を変化させる手法を提案した。

6.2 疲労破壊について

疲労寿命の推定について検討した。疲労寿命の評価式を仮定した上で区間推定を行い、その下限値をもって設計応力(振れ角)を与える手法を提案した。また、その加速寿命評価式を外挿し、通常使用環境下における寿命の評価を行った。

参考文献

- [1] 星谷勝, 石井清, 構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会, 1986
- [2] 岡村弘之, 板垣浩, 強度の統計的取扱い, 培風館, 1979.
- [3] チャン・ウェー・ピン, MEMS マイクロミラーの強度解析と信頼性評価に関する研究, 東京大学修士論文, 2004
- [4] 市田崇, 鈴木和幸, 信頼性の分布と統計, 日科技連, 1984
- [5] 渡辺洋, ベイズ統計学入門, 福村出版, 1999
- [6] C. L. Muhlstein, S.B. Brown, R. O. Ritchie, High-Cycle Fatigue of single crystal silicon thin films, J. Microelectromechanical Syst. 2001
- [7] <http://www.sas.com/offices/asiapacific/japan/usergroups/wg/archive/041015mati.pdf> (2005/ 1/ 28 参照)
- [8] 酒井信介, リスクベース設計, 日本機械学会誌 vol. 6, 853-856 , 2003
- [9] <http://www.necel.com/nesdis/image/C12769JJ2V0IF00.pdf> (2004/ 5/ 27 参照)

あとがき

6.3 謝辞

この研究を進めるにあたって、指導していただいた酒井先生、泉先生をはじめ、酒井・泉研究室の皆様には一年間大変お世話になり深く感謝しております。このような卒業論文を書くことが出来たのは、4年間の大学生活において、学内や学外で私を支えて下さった全ての人のおかげだと考えています。皆様、本当にありがとうございました。

以上

1 ~ 68 ページ完

卒業論文

平成 17 年 2 月 4 日 提出

30164 門脇 政幸