

第5章 弾塑性・剛塑性変形の有限要素法

5.1 弾塑性解析の考え方

5.1.1 増分形境界値問題

第3章で述べたように、弾性体であっても弾塑性体であっても、応力が満たすべき方程式は、最終的には同じつり合い方程式である。弾塑性体は以前の荷履歴に依存した変形挙動を示すので、有限要素法で弾塑性体の解析をするにあたっては、速度形で与えられた基礎式を解くことになる。弾塑性変形は速度に依存しないとしているから、速度形の基礎式を近似的に増分形の基礎式に書き換えても差し支えない。したがって、実際には微小な増分をとり、適当な初期値のもとで応力増分やひずみ増分を逐次更新していく。このような手続きに基づいた解析手法を、増分形の初期値境界値問題を解くという。ここでは、特に断らない限り、初期値は、応力、ひずみ、相当塑性ひずみがすべて0であり、表面力も負荷されていないとしておく。弾塑性体を解析するにあたって必要な基礎式と指導原理となるエネルギー原理の速度形は、第3章で与えられている。

弾塑性体の場合には、線形弾性体で用いている変数を速度形または増分形で表せばよかった。したがって、線形弾性体の有限要素法で用いるマトリックスやベクトルを、ほとんどそのままの形で、ただいくつかの変数を増分形に書き直すことによって、弾塑性体にも適用することができる。さらに、全体の剛性マトリックスの作成や、離散化した後の基本境界の処理は、弾性解析のアルゴリズムとまったく同じである。しかしながら、弾塑性体の変形は荷履歴に依存し、降伏や除荷・負荷の判定を伴う応力-ひずみ関係式は単純ではない。そこで弾塑性解析特有の処理が必要となってくる。本章では、線形弾性体に対する解析手続きを参照しながら、弾塑性解析の考え方と解析手法を述べていく。さらに剛塑性解析の基本的な考え方についても触れる。

まず、速度形の基礎式と有限要素法の指導原理を再記する。

(a) 速度形のつり合い方程式

$$\frac{\partial \dot{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} + \rho \dot{b}_i = 0 \quad (5.1)$$

(b) 変位速度-ひずみ速度関係式

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (5.2)$$

(c) 応力-ひずみ関係式

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (5.3)$$

(d) 境界条件

基本（変位速度規定）境界

$$\dot{u}_i = \bar{u}_i \cdots S_u \quad (5.4)$$

自然（表面力速度規定）境界

$$\dot{t}_i = \bar{t}_i = \dot{\sigma}_{ij} n_j \cdots S_t \quad (5.5)$$

最小ポテンシャルエネルギーの原理は、運動学的に可容な速度場 $\dot{u}_i(x_k)$ について、

$$J[\dot{u}_i] = \int_V \frac{1}{2} D_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \dot{\epsilon}_{kl} dV - \int_V \rho \dot{u}_i \dot{b}_i dV - \int_{S_t} \bar{t}_i \dot{u}_i dS \rightarrow \text{Min} \quad (5.6)$$

のとき、真解が得られるとするものである。最小ポテンシャルエネルギーの原理から、以下の仮想仕事の原理を導くことができる。

$$\int_V \delta \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} dV = \int_V \delta \dot{u}_i \rho \dot{b}_i dV + \int_{S_t} \delta \dot{u}_i \bar{t}_i dS \quad (5.7)$$

ここで、 $\delta \dot{u}_i$ 、 $\delta \dot{\epsilon}_{ij}$ は基本境界条件を乱さない任意の仮想変位速度と仮想ひずみ速度を表す。左辺の応力速度には、構成関係式 (5.3) が用いられる。

式 (5.7) は、対象とする物体全体について成立している。しかしながら、これは小さな有限要素 e に分割して成立していると考えてもよい。したがって、

$$\sum_e \int_{V_e} \delta \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} dV = \sum_e \int_{V_e} \delta \dot{u}_i \rho \dot{b}_i dV + \sum_e \int_{S_{t,e}} \delta \dot{u}_i \bar{t}_i dS \quad (5.8)$$

となる。上式での記号 Σ は、左辺および右辺第1項については解析領域に関して積分することを表しており、右辺第2項については自然境界 S_t に関して積分することを表している。要素内部では表面力の速度はつり合っているため、自然境界が課されている正味の表面だけについて積分すればいいことになる。これを、ベクトル記号を用いて

$$\sum_V \{ \delta \dot{\epsilon}_e \}^T \{ \dot{\sigma}_e \} dV = \sum_V \{ \delta \dot{u}_e \}^T \{ \rho b_e \} dV + \sum_{S_e} \{ \delta \dot{u}_e \}^T \{ \bar{t}_e \} dS \quad (5.9)$$

と表示しておく。ここで、それぞれのベクトルの添字 e は要素 e での値であることを表している。ひずみや応力は2階の対称テンソルであるが、弾性解析での表現と同じようにベクトル配列で記述することにする。座標系 (x, y, z) のもとで、式 (5.9) の各ベクトルの配列を、

$$\begin{aligned} \{ \dot{\epsilon}_e \}^T &= [\dot{\epsilon}_{xx} \ \dot{\epsilon}_{yy} \ \dot{\epsilon}_{zz} \ \dot{\gamma}_{yz} \ \dot{\gamma}_{zx} \ \dot{\gamma}_{xy}] \\ \{ \dot{\sigma}_e \}^T &= [\dot{\sigma}_{xx} \ \dot{\sigma}_{yy} \ \dot{\sigma}_{zz} \ \dot{\tau}_{yz} \ \dot{\tau}_{zx} \ \dot{\tau}_{xy}] \end{aligned} \quad (5.10)$$

とする。せん断ひずみについては、 $\dot{\gamma}_{xy} = 2\dot{\epsilon}_{xy}$ などとする。これで式 (5.8) の左辺は $\delta \dot{\epsilon}_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = \delta \dot{\epsilon}_{xx} \dot{\sigma}_{xx} + \dots + \delta \dot{\epsilon}_{yy} \dot{\sigma}_{yy} + \delta \dot{\epsilon}_{zz} \dot{\sigma}_{zz} = \delta \dot{\epsilon}_{xx} \dot{\sigma}_{xx} + \dots + \delta \dot{\gamma}_{xy} \dot{\tau}_{xy}$ であり、確かに式 (5.9) と等価な表現になっていることが確認できる。以降では要素内の応力やひずみに着目する。

5.1.2 要素剛性マトリックス

先に述べたように、弾塑性体に対する有限要素法では、弾性解析での変位や荷重を、変位増分あるいは荷重増分のように読み替えて繰り返し適用し、得られたひずみ増分や応力増分の和を求めていく。したがって、要素剛性方程式から全体の剛性方程式への重ね合せや連立方程式の解法については、弾性解析での方法がそのまま適用できる。弾性解析と大きく異なる点は、剛性マトリックスが変形中に一定ではなく、各増分区間（荷重ステップまたは単にステップという）ごとに異なり、また個々の要素によっても異なったものとなることである。したがって、すべての要素で常に降伏判定や除荷・負荷の判定を行って、場合によっては要素剛性マトリックスを作成し直さなければならない。

ここでは、弾塑性状態にある場合の要素の剛性マトリックスについて述べることにする。もちろん、対象とする要素が弾性状態のときには、前章で与えた弾性変形の剛性マトリックスを用いなければならない。本節では、変数として現れる各種の速度は、微小増分としてみなしてよい。

式 (5.9) の左辺を節点変位速度について表す。変位速度とひずみ速度の関係式 (5.2) と弾塑性体の構成関係式 (5.3) を、それぞれマトリックス表示で

$$\{ \dot{\epsilon} \} = [B] \{ \dot{u}_n \} \quad (5.11)$$

$$\{ \dot{\sigma} \} = [D] \{ \dot{\epsilon} \} \quad (5.12)$$

と表す。応力やひずみの添字 e は省略した。式 (5.11) の $[B]$ マトリックスは変位-ひずみマトリックスであり、弾性解析での $[B]$ マトリックスとまったく同じである。したがって、要素 e を構成する n 個の節点の座標 $(x^1, y^1, z^1, x^2, \dots, x^n, y^n, z^n)$ だけで表される。このことは、3次元問題に限らず、2次元平面問題でも軸対称問題でも適用できる。

$[D]$ マトリックスは、弾性解析での弾性係数マトリックスに対応し、弾塑性解析では、原則としてこれを毎ステップ更新していく。節点変位速度を表すベクトル $\{ \dot{u}_n \}$ は、一般に $3n \times 1$ 行のマトリックス（ベクトル）であり、

$$\{ \dot{u}_n \}^T = [\dot{u}_x^1 \ \dot{u}_y^1 \ \dot{u}_z^1 \ \dots \ \dot{u}_x^n \ \dot{u}_y^n \ \dot{u}_z^n] \quad (5.13)$$

と表される。これらを代入すると、式 (5.9) の左辺は、

$$\sum_V \{ \delta \dot{\epsilon} \}^T \{ \dot{\sigma} \} dV = \sum_V \{ \delta \dot{u}_n \}^T [B]^T [D] [B] dV \{ \dot{u}_n \} \quad (5.14)$$

と表される。基本境界条件を乱さない任意の速度場について上式が成立するので、弾塑性解析のための要素剛性方程式として、

$$\sum_V [B]^T [D] [B] dV \{ \dot{u}_n \} = \sum_V [N]^T \rho \{ b \} dV + \sum_{S_e} [N]^T \{ \bar{t} \} dS \quad (5.15)$$

が得られる。速度（増分）形であることを除けば、上式は弾性解析での要素剛性方程式と形式的にはまったく同じになる。したがって、結局のところ弾塑性体の応力-ひずみ関係をマトリックス形式で表すのが課題となる。以降では $[D]$ マトリックスの具体的な形式について求める。ここでも速度は増分と読み替える。

弾性ひずみ速度と塑性ひずみ速度をベクトル表示で、それぞれ

$$\{ \dot{\epsilon}^e \}^T = [\dot{\epsilon}_{xx}^e \ \dot{\epsilon}_{yy}^e \ \dot{\epsilon}_{zz}^e \ \dot{\gamma}_{yz}^e \ \dot{\gamma}_{zx}^e \ \dot{\gamma}_{xy}^e] \quad (5.16)$$

$$\{ \dot{\epsilon}^p \}^T = [\dot{\epsilon}_{xx}^p \ \dot{\epsilon}_{yy}^p \ \dot{\epsilon}_{zz}^p \ \dot{\gamma}_{yz}^p \ \dot{\gamma}_{zx}^p \ \dot{\gamma}_{xy}^p]$$

とする。応力については、通常の式 (5.10) の配列 $\{ \sigma \}$ だけでなく、別の配列

$$\{ s \}^T = \left[\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right]^T = [s_{xx} \ s_{yy} \ s_{zz} \ 2s_{yz} \ 2s_{zx} \ 2s_{xy}] \quad (5.17)$$

を用意しておく。ここで、等方硬化の場合には $s_{ij} = \sigma'_{ij}$ ($i, j = x, y, z$)、移動硬化の場合には $s_{ij} = \sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}$ ($i, j = x, y, z$) とする。配列 $\{ s \}$ のせん断成分が2倍になっているのは、せん断塑性ひずみ速度がベクトル配列で2倍されていたことに対応しており、塑性流動則を

$$\{ \dot{\epsilon}^p \} = \lambda \{ s \} \quad (5.18)$$

と表示するためである。等方硬化の場合に式 (5.17) を用いると、Mises 形の相当応力

は、

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2} \{s\}^T \{s\} \right)^{1/2} \quad (5.19)$$

と表すことができる。ベクトル配列を用いるときには、例えば $\sigma_{ij}\sigma_{ij} = \{s\}^T \{s\}$ は正しくなく、また $\sigma'_{ij}\sigma'_{ij} = \{s\}^T \{s\}$ も正しくないことに注意しよう。

全体のひずみ速度は、弾性ひずみ速度と塑性ひずみ速度の和で表されるから、

$$\{\dot{\epsilon}\} = \{\dot{\epsilon}^e\} + \{\dot{\epsilon}^p\} = [D^e]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \lambda \{s\} \quad (5.20)$$

である。これを応力速度について解く。上式はせん断成分については2倍されているが、正しい関係を与えている。したがって、その逆関係を求めればよく、

$$\{\dot{\sigma}\} = [D^e] (\{\dot{\epsilon}\} - \lambda \{s\}) \quad (5.21)$$

が得られる。 λ を応力等で表すと、式(3.44)および式(3.45)に対応して

$$\{\dot{\sigma}\} = \left([D^e] - \frac{1}{K} [D^e] \{s\} \{s\}^T [D^e] \right) \{\dot{\epsilon}\} = ([D^e] - [D^p]) \{\dot{\epsilon}\} = [D] \{\dot{\epsilon}\} \quad (5.22)$$

と表示できる。係数マトリックスが $[D^e]$ だけの弾性状態に比べて、弾塑性状態では $[D^p]$ の分だけ小さくなっている。このことは、応力-ひずみ関係の傾きが小さくなっていることに対応している。係数 K は、等方硬化則の場合には

$$K = \{s\}^T [D^e] \{s\} + \frac{4}{9} \sigma_Y^2 a n (b + \bar{\epsilon}^p)^{n-1} \quad (5.23.a)$$

であり、移動硬化則の場合には

$$K = \{s\}^T [D^e] \{s\} + \frac{4}{9} \sigma_Y^2 C \quad (5.23.b)$$

となる。この形式は一般的な3次元でのマトリックス表示であるが、平面応力、平面ひずみ、軸対称問題でも同様の形式を得ることができる。そのときは、マトリックスの配列や成分が異なることに注意しよう。

塑性変形は体積変化がないとしているので $\epsilon_{ii}^p = 0$ である。したがって $\epsilon_{ii} = \epsilon_{ii}^e$ が成立するので、平面問題での応力やひずみの取扱いは、弾性変形での求め方と全く同じである。平面応力での軸ひずみ $\epsilon_{zz}(\epsilon_z)$ や平面ひずみでの軸応力 $\sigma_{zz}(\sigma_z)$ は、第2章に与えられている。

5.1.3 弾塑性解析の一般化

これまで述べてきた弾塑性変形は、暗黙のうちに等温での変形であり、また変形は速度

に依存しないと仮定してきた。温度が変化すると、線膨張だけでなく弾塑性変形での流動応力そのものも変化するため、数値解析での取扱いも複雑になる。さらに金属材料では高温でクリープ変形が生じるため、速度に依存した変形挙動を示す。このときには、速度と増分は明らかに異なった意味を持つことになる。ここでは弾塑性解析の一般化として、温度依存性と速度依存性の取扱いについて、その概要を述べることにする。なお、物体の温度が変化しているときは、温度場をまず最初に求めなければならないが、ここでは温度場は既知であるとしておく。

温度変動を伴う変形過程では、流動応力も温度に依存する。温度依存性がどのように表れるかは材料モデルによるので、具体的な形式は特定の構成式ごとに異なったものになるが、降伏関数は一般に $F(\sigma_{ij}, \epsilon, T)$ となる。式(3.33)に対応して、塑性変形が進行するためには、

$$\dot{F} = \{s\}^T \{\dot{\sigma}\} + \frac{\partial F}{\partial \epsilon} \dot{\epsilon} + \frac{\partial F}{\partial T} \dot{T} = 0 \quad (5.24)$$

の関係を満たさなければならない。温度 T は独立変数であるから、応力速度（あるいはひずみ速度）とともに温度速度 T が常に塑性ひずみ速度の表示に含まれることになる。したがって、応力-ひずみ関係式でも温度速度が陽に含まれる。全ひずみ速度は、ベクトル配列で

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D^e]^{-1} \{\dot{\sigma}\} + \lambda \{s\} + \beta \dot{T} \{1\} \quad (5.25)$$

と表される。ここで、 β は線膨張係数 (thermal expansion coefficient)、 $\{1\}^T = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]$ であり、等方性を仮定した。弾性係数が温度に依存する場合には、さらに複雑になる。なお、塑性変形に関わる温度依存性は、まだ λ に含まれている。上式を応力速度について解き、式(5.24)に代入することによって、未定乗数 λ を求める (λ を消去する)。この手続きは第3章で述べたのと本質的に同じである。結局のところ、応力速度は

$$\{\dot{\sigma}\} = ([D^e] - [D^p]) \{\dot{\epsilon}\} - \dot{T} \{\theta\} = [D] \{\dot{\epsilon}\} - \dot{T} \{\theta\} \quad (5.26)$$

で表される。式(5.22)と比較すると、温度速度の効果 $\dot{T} \{\theta\}$ が追加されていることがわかる。一般に温度が上昇すると物体は膨張して塑性流動応力も低下するため、特に負の記号を付してある。解くべき要素剛性方程式は

$$\int_{V_e} [B]^T [D] [B] dV \{u_e^a\} = \int_{V_e} [B]^T \dot{T} \{\theta\} dV + \{f_e^a\} \quad (5.27)$$

で与えられる。 $\{f_e^a\}$ は式(5.15)の右辺をまとめて示したもので、物体力と表面力を表

す等価節点力である。温度は既知としているので、温度依存性を示す項は、要素剛性方程式の右辺に現れ、物体力や表面力と同じ役割を果たすことになる。

変形が速度に依存する場合も、形式上の取扱いはほとんど同じである。速度依存性を表す粘性ひずみ速度を $\{\dot{\epsilon}^v\}$ とすると、全ひずみ速度は

$$\{\dot{\epsilon}\} = [D^e]^{-1}\{\dot{\sigma}\} + \lambda\{\dot{s}\} + \{\dot{\epsilon}^v\} \quad (5.28)$$

と表される。 $\{\dot{\epsilon}^v\}$ の具体的な表現は個々の材料モデルに依存するが、一般に応力の指数関数で表されることが多い。粘性ひずみの効果は、式 (5.25) の第3項、すなわち温度依存性を表す項とほとんど同じであることがわかる。したがって、形式上の取扱いもほとんど同じになる。しかしながら、変形が速度に依存する場合には、速度と増分は明らかに異なった意味を持つので、応力の更新や数値上の安定性などに注意しなければならない。時間に依存するモデルの数値解析での取扱いについては、第6章でも簡単に触れることにする。これらを組み合わせることによって、温度変動と速度依存性を考慮したさらに一般的な解析に拡張できる。

5.2 弾塑性解析の方法

5.2.1 弾塑性遷移領域の処理

増分形の解析手法では、目標とする表面力や強制変位量まで微小な増分を繰り返し与え、得られたひずみ増分や応力増分の和をとって更新していく。材料は弾塑性体であるとしているから、ある増分区間に弾性域から弾塑性域への移行が生じる。このとき、 $[D]$ マトリックスが、弾性の応力ひずみマトリックス $[D^e]$ から式 (5.22) の $[D](=[D^e] - [D^p])$ に急変することになる。一区間の計算途中では、 $[D]$ マトリックスは一定としているので、特別な処理が必要となる。このとき、同時に降伏条件の判定を行う。

図5.1(a)は、弾性域から弾塑性域への移行を模式的に示したものである。現在の応力 σ_n は弾性状態であるとする。弾性の応力-ひずみマトリックスを用いて、ある増分間を計算した結果、図中に示すような応力増分が各要素で得られたとしよう。これを応力-ひずみ曲線上に描くと、図5.1(b)に示すように、いくつかの要素では応力 $\sigma_{n+1}(=\sigma_n + \Delta\sigma)$ が降伏応力を越えてしまう。降伏曲面を越える応力は実在しないから、このような増分を与えることはできない。そこで、この増分間隔を2回に分けて与えることにする。すな

わち、係数 r ($0 < r < 1$) を用いて、 $\sigma'_{n+1} = \sigma_n + r \cdot \Delta\sigma$ がちょうど降伏曲面上にくるように係数 r を求める。ここでの σ'_{n+1} は偏差応力ではなく、 σ_{n+1} を超えない別の応力である。このとき、 σ'_{n+1} は降伏条件を満たすから、幾何学的な関係から

$$r = \frac{AY}{AB} \quad (5.29)$$

または、降伏関数を用いると

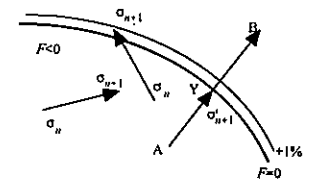
$$F(\sigma'_{ij}(n+1), \kappa(n)) = 0 \quad (5.30)$$

である。Mises の降伏条件に従う場合、上式は r について2次方程式となるから、解析的に解くことができる。これをすべての要素あるいは積分点について求め、最小の r を r_{\min} とする。 r_{\min} は、与えた増分のもとで対象とする物体の一部が降伏し始める点を指定するので、まず r_{\min} 分の増分計算を行うことになる。残りの $(1 - r_{\min})$ 分の増分計算では、

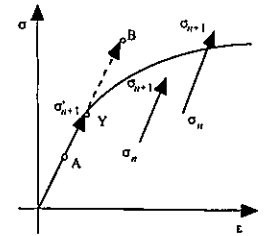
ここで降伏したとみなされる要素を弾塑性の $[D]$ マトリックスとして計算を行う。この増分間の計算でも、さらに同様の判定を繰り返し行っていく。このようにすれば、計算の途中で $[D]$ マトリックスの値を急変させることなく、正しい応力-ひずみ関係に沿った増分和が求められる。しかしながら、厳密に各要素の降伏判定を行うと、極めて多くの繰返し計算が必要となる。そこで、実際の処理では、降伏条件に近い部分を一齐に降伏させる。例えば、降伏応力の $\pm 1\%$ 程度の領域をあらかじめ指定しておき、その内部に入ったものについてはすべて弾塑性状態であるとして、次の計算では弾塑性の $[D]$ マトリックスを算出する。解析精度を指定するパラメータは、あらかじめ入力する必要がある。

弾塑性 $[D]$ マトリックスは、応力や塑性ひずみを含んでいるから、原則として増分ごとに更新する。しかしながら、毎ステップごとに $[D]$ マトリックスを更新すると、更新のために計算時間がかかり有利でない。そのために、例えばマトリックス更新のための相当塑性ひずみ増分をあらかじめ指定しておき、指定した値に達するまでは同じ $[D]$ マトリックスを使用するなどの手法を用いる。

降伏と負荷の条件が満たされるとき、要素は弾塑性状態であるとして計算される。



(a)



(b)

図5.1 弾塑性遷移領域の処理

[D] マトリックスはある種の接線係数（応力-ひずみ関係の傾き）を意味しているから、非線形性の強い材料で増分を大きくすると、本来の応力-ひずみ曲線から外れて、応力の精度が低下する恐れがある。そのために、増分を小さくとる必要がある。適切な増分は個々の計算条件に依存する。

得られた節点変位増分と [B] マトリックスを用いて要素内のひずみ増分が求められ、さらに応力増分が算出される。このように、 n 番目だけでの応力やひずみの値を用いて ($n+1$) 番目の値を計算する積分方法を、前進オイラー法 (forward Euler method) と呼んでいる。応力がひずみ速度に依存しないときには、与えた増分が小さければ、前進オイラー法でも十分な精度で変位、ひずみ、ならびに応力が更新できることが知られている。大きな増分計算を行う場合や応力-ひずみ関係が速度に依存する場合には、工夫を要する。

5.2.2 負荷と除荷の判定

与えた増分が十分に小さく、期待される精度が悪くなくても、計算の途中で負荷と除荷が変化する場合には、その増分計算そのものが不適切であると考えられる。したがって、ある計算の途中で負荷を除荷と判断した場合には、その要素あるいは積分点だけを弾性マトリックスとして計算し直すことになる。ここでは、前項とは反対に弾塑性状態から弾性状態への変更について述べる。

弾塑性状態であるとして剛性マトリックスを作成し、節点 n の変位速度の解 $\{\dot{u}^n\}$ が得られたとする。このとき、まず [B] マトリックスを用いて要素内のひずみ速度 $\{\dot{\epsilon}\}$ が求められる。ついで [D] マトリックスから応力速度 $\{\dot{\sigma}\}$ が得られるが、このときの [D] マトリックスは弾塑性状態でのマトリックスを用いなければならない。図5.2に示したように、応力状態は降伏曲面上にあり、そこで弾塑性状態として解析していることになるから、得られた応力速度は外向きでなければならない。すなわち、負荷の条件

$$\{s\}^T \{\dot{\sigma}\} > 0 \quad (5.31)$$

を満たさなければならない。しかしながら、この

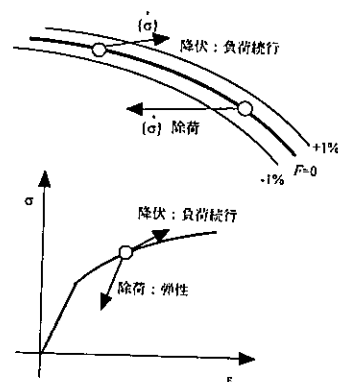


図5.2 弾塑性状態からの負荷と除荷

ことは自明ではない（計算する前からわかっているわけではない）ので、常に判定しなければならない。もし

$$\{s\}^T \{\dot{\sigma}\} < 0 \quad (5.32)$$

であれば、その要素は除荷されたことになる。そのときは、その要素を弾性マトリックス $[D^e]$ として、全体の剛性方程式を作成し直し、もう一度解き直さなければならない。実際の解析で数値的に中立負荷が得られることはほとんどないが、その場合にも $[D^e]$ として解き直す。このようにして正しい状態が得られたときのみ、変位、ひずみ、ならびに応力を更新することが可能になる。

5.2.3 プログラムの構成

これまでに述べてきた事項に基づいて、実際の弾塑性有限要素解析プログラムを構成する。弾塑性解析のプログラム構成をフローチャートとして図5.3に示す。弾性解析と異なる点は、剛性方程式の作成から求解を繰り返し、得られた結果を時間について積分する（増分和をとる）ことである。また、入力データには、弾性解析用のデータに加えて、塑性変形の材料特性を表すデータと前項で述べた解析精度を統御するパラメータが必要となる。以下に、弾性解析に加えて必要となる弾塑性解析における手順を示す。

(a) 剛性マトリックスの作成

各要素について [D] マトリックスを作成する。弾性状態であれば弾性係数マトリックス $[D^e]$ であり、弾塑性状態の場合には $[D] (= [D^e] - [D^p])$ である。[D] マトリックスは、応力や相当塑性ひずみを含んでおり、要素ごとに異なったマトリックスである。初期には弾性状態であるとして作成する。全体の剛性マトリックスの作成、基本境界条件の処理、および連立方程式の解法については、弾性解析での手法をそのまま用いることができる。

(b) 応力増分の算出

得られた節点変位増分から、[B] マトリックスを用いてひずみ増分を求め、さらにそのひずみ増分 $\{\Delta \epsilon\}$ と [D] マトリックスを用いて応力増分 $\{\Delta \sigma\}$ を算出する。このときには、作成したときの [D] マトリックスと同じマトリックスを用いて、応力増分を計算しなければならない。

