

有限要素法はきわめて有用であるが、入力された形状の結果のみを提供するものであり、決して設計の概念を提供するものではない。材料力学で身につけた力学的素養を元に、解析結果に対する力学的な深い理解ができてはじめて設計指針を容易に設定できるようになる。そのため、近年の機械設計には、有限要素法による詳細解析と材料力学による直感的な解析の両側面からの視点が欠かせないものとなっている。

とくに、有限要素法との関係において、引張・圧縮・曲げ・ねじり・座屈の概念の理解は重要である。どのような複雑な変形でも、これらの単純な現象へ分類することによって、現象の本質的な理解が可能になる。また、結果の解釈においては、応力テンソル（せん断応力、主応力、座標変換の概念）、応力-ひずみ関係式（フックの法則・ヤング率・ポアソン比など）の理解も必須である。

最後に、有限要素法や材料力学の計算結果は、必ず実機の応力（ひずみ）や変位との比較によって検証されなければならないことを付け加えておく。なぜなら、現場で実際に使用している機器の応力解析を行う場合は、かならずしも荷重や変位の境界条件や物性値（構成則）が明確であるとは限らないからである。有限要素法は、入力物性値と設定された境界条件に基づく計算であるため、実機との比較によって、モデル化を変更する必要がある場合が少なくない。これらのモデル化の場合にも材料力学の知識が生かされるであろう。

2章 有限要素法の原理（トラス要素）

有限要素法の原理を理解するために、もっとも単純なトラス要素について解説する。トラス要素を説明する前に、直観的に理解の容易な一次元ばね系をマトリックス法を用いた解説を行う。

マトリックス法と有限要素法は、要素剛性マトリックスを導く手順以外は同じ手順であるため、概要を把握する目的で理解してほしい。ばねを一次元トラス要素で置き換えることによって、まったく同様な手順で一次元トラス要素を扱えることを示す。

その後、一次元から二次元トラス要素への拡張方法について述べる。

2.1 マトリックス法によるばねの計算

マトリックス法の手順は、有限要素法と類似しており、以下のようになる。

- I. 全体構造（ばね系）を要素（各ばね）へ分割
- II. 各要素の力学的特性を記述（要素剛性マトリックス）
- III. 各要素の特性を合成して全体構造の力学的特性を記述（全体剛性マトリックス）
- IV. 境界条件を設定
- V. 物理量（変形）を算出

例題として、図 2.1 にある二つのばねがつながった構造を考える。右端の節点③に力 F_3 が加わった場合の変位 u_2, u_3 ($u_1 = 0$) を求める。はじめに、ばねを図 2.2 のように二つの要素に分け、それぞれの要素①、②の節点に加わる力と変位の関係を記述する（手順 I, II）。

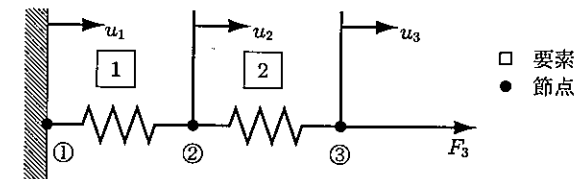


図 2.1 一次元ばね構造の例題

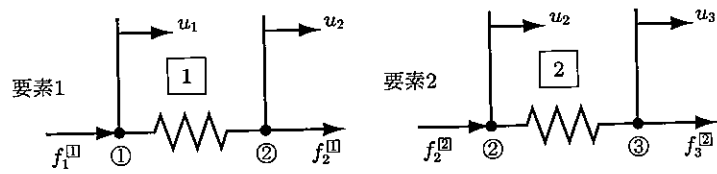


図 2.2 要素の分割

各節点①～③には、ばねののびによる力がはたらく。①番目のばねが節点①に及ぼす力を f_1^I と表す。節点②にははたらく力は、隣接する二つのばねそれぞれが及ぼす力に分解でき、 $f_2^I + f_2^{II}$ と表せる。要素①において、ばね 1 により節点①に作用する力 f_1^I は、ばね定数 k_1 、ばねの変位 $(u_1 - u_2)$ を用いて、フックの法則より

$$f_1^I = k_1 u_1 - k_1 u_2$$

となる。同様に点②に作用する力は、

$$f_2^I = -k_1 u_1 + k_1 u_2$$

となる。ただし、力の向きとばねが縮もうとする力の向きが逆向きなので、 f_1^I とは符号が逆であることに注意せよ。要素①、②の各節点に及ぼされる力をまとめると、次のようになる*1。また、後の全体構造の特性の記述のためにマトリックス表示しておく。

$$\begin{matrix} f_1^I = k_1 u_1 - k_1 u_2 \\ f_2^I = -k_1 u_1 + k_1 u_2 \end{matrix}, \quad \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^I \\ f_2^I \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

$$\begin{matrix} f_2^{II} = k_2 u_2 - k_2 u_3 \\ f_3^{II} = -k_2 u_2 + k_2 u_3 \end{matrix}, \quad \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_2^{II} \\ f_3^{II} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

ここで、

$$[k^1] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix}, \quad [k^2] = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

は各要素の荷重と変位の関係を表現する係数で、要素剛性マトリックスとよばれる。

ポイント 2 要素剛性マトリックス

各要素の節点荷重と節点変位の関係を表現する係数のマトリックスを要素剛性マトリックスとよぶ。

*1 ここで、 $[]$ はマトリックス、 $\{ \}$ はベクトルを表す。

つぎに、各要素①、②の特性から全体の特性を記述する。ここで、図 2.3 のように、剛性ゼロの仮想的な直列の 2 要素ばね系を考える。節点③は、ばね 1 とは隣接していないので $f_3^I = 0$ であることに注意すると、式 (2.1) を

$$\textcircled{*} \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^I \\ f_2^I \\ f_3^I \end{Bmatrix}$$

と拡張することができる。

同様に式 (2.2) は

$$\textcircled{*} \textcircled{*} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{II} \\ f_2^{II} \\ f_3^{II} \end{Bmatrix}$$

と表せる。このとき要素剛性マトリックス $[k^1]$ 、 $[k^2]$ はそれぞれ系全体の剛性マトリックス $[K^1]$ 、 $[K^2]$ に拡張され、式 (2.4) のように表現できる。

$$[K^1] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [K^2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

つぎに、二つのばね系を重ね合わせる。つまり、式 (2.1) と式 (2.2) を式 (2.5) のよ

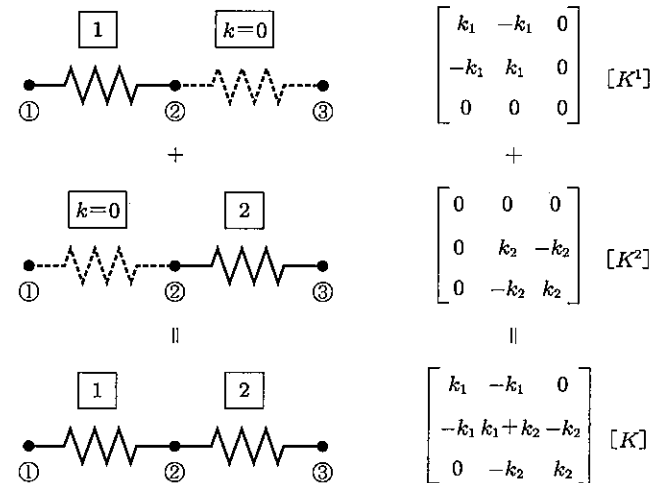


図 2.3 仮想ばね要素追加による重ね合わせ変換

うに線形に重ね合わせる (手順 III). 要素剛性マトリックスを重ね合わせたものを全体剛性マトリックス $[K]$ という.

ポイント3 全体剛性マトリックス

要素剛性マトリックスを, 節点の接続を考慮して重ね合わせたものを全体剛性マトリックスとよぶ.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^{[1]} \\ f_2^{[1]} \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 + & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2^{[2]} \\ f_3^{[2]} \end{Bmatrix} \\
 \hline
 & \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{[K]} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}}_{\{U\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f_1^{[1]} \\ f_2^{[1]} + f_2^{[2]} \\ f_3^{[2]} \end{Bmatrix}}_{\{F\}} = \begin{Bmatrix} f_1^{[1]} \\ 0 \\ F_3 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

ただし, 節点②における力の釣り合い条件より, $f_2^{[1]} + f_2^{[2]} = 0$ である ($f_3^{[2]} = F_3$ である). ここで, $\{U\}$ は節点変位ベクトル, $\{F\}$ は節点外力ベクトルとよぶ. $[K]$ の逆行列 $[K]^{-1}$ を求めれば, $\{U\} = [K]^{-1}\{F\}$ より, 未知変位 $\{U\}$ が求まることになる.

ポイント4 有限要素法は逆行列の数値計算 ⇔ ノウハウ4 (p.66)

有限要素法とは, 全体剛性マトリックスの逆行列 $[K]^{-1}$ を節点の力ベクトル $\{F\}$ にかけて, 節点の変位 $\{U\} = [K]^{-1}\{F\}$ を求める計算手法である.

しかし, 数学的に, $[K]$ の行列式 $\det[K]$ はゼロなので, 逆行列は求まらず, このままでは解は得られない. これは, 変位境界条件が設定されていないため, 荷重 F_3 により物体が剛体運動してしまうことを意味する. そこで, 変位境界条件 $u_1 \equiv 0$ (点①は壁に固定されていて動かない) を考慮すると, u_1 に関わる場所はすべてゼロになり, 意味がないので, 単に, 式 (2.5) から u_1 が関わる成分を消去すればよく, 式 (2.6)

が得られる (手順 IV). 変位境界条件の設定法については章末の「memo 境界条件の処理」(p.26) で詳細を述べる.

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F_3 \end{Bmatrix} \tag{2.6}$$

左辺の逆行列を求めて右辺にかければ, 式 (2.7) のように, 未知変位 u_2 と u_3 が得られる (手順 V).

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{k_1 k_2} \begin{bmatrix} k_2 & k_2 \\ k_2 & k_1+k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_3/k_1 \\ F_3(1/k_1 + 1/k_2) \end{Bmatrix} \tag{2.7}$$

また, 節点①における反力は, 式 (2.5) を用いて $k_1 u_1 - k_1 u_2 = f_1^{[1]}$ より求まる.

2.2 一次元トラスの有限要素法

一次元トラスの有限要素法は, ばねのマトリックス法の計算とほとんど同じ手順となるが, トラスはばねと異なり弾性体であるため, 要素剛性マトリックスの導出手順が異なる. ここでは, マトリックス法とのアナロジーに配慮しつつ, トラスの有限要素法の説明を行う.

(1) 仮想仕事の原理

有限要素法の説明の前に, 要素剛性マトリックスを算出する際に必要な, 仮想仕事の原理を説明する. 仮想仕事の原理は, つぎのように表現することができる.

構造物に外力が作用し, 釣り合っているとき, 釣り合い状態から微小な仮想的な変位によって変形する場合を考える. ただし, 変形にあたって, 変位境界条件は満足しているものとする. このとき, 外力は仮想変位によって仮想仕事を行うが, 一方, 内部に発生している応力によりひずみエネルギーが変化する. つまり, 仮想ひずみエネルギーを生じる. この両者が等しいということと, 釣り合い状態であることが等価であるというのが仮想仕事の原理である (図 2.4).

仮想仕事の原理の適用によって, 釣り合い状態の表現に必要な諸関係式を導出することができる. 仮想仕事の原理の詳細な導出過程に関しては, 付録 A.5 (2) 項で述べる.

要素レベルで考えるとき, 仮想ひずみエネルギーを δU^e , 外力のする仮想仕事を δW^e

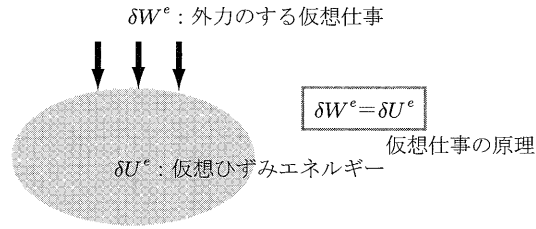


図 2.4 仮想仕事の原理

とすると、仮想仕事の原理は、

$$\delta U^e = \delta W^e \quad (2.8)$$

と表現できる*2。

ポイント5 仮想仕事の原理
 釣り合い状態からの微小な仮想変位による仮想仕事 δW^e と、物体内部の仮想ひずみエネルギー δU^e が釣り合うこと。

(2) 要素剛性マトリックスの導出

2.1節で述べたように、まずは要素ごとの力学特性の定義が必要である。これは、マトリックス法では、式(2.1)~(2.3)に対応する手順である。

図 2.5 に示したトラス要素を例に考えると、まず任意の微小な仮想変位 $\delta u(x)$ を与えたときの仮想ひずみエネルギーを求める。トラス要素内のひずみは、変位の勾配として、式(2.9)のように表現される。

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} \quad (2.9)$$

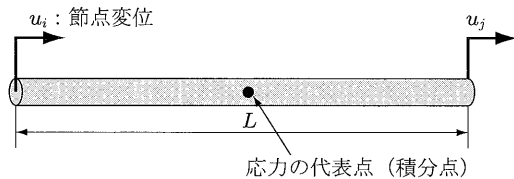


図 2.5 一次元トラス要素

*2 δ は変分 (関数の微小変化) の意味であり、 $\delta u(x)$ は変位の微小量でなく変位分布 (関数) の微小変分を表す。詳細は付録 A.5 (2) 項で解説する。

トラス要素内の変位は、節点値から内挿する形状関数 (内挿関数) で近似される。図 2.5 のトラス要素は、 x 軸方向の荷重を支える機能をもつ一次元構造である。左右の節点番号を i, j とし、その座標を x_i, x_j とする。節点変位が $u_i (\equiv u(x_i))$, $u_j (\equiv u(x_j))$ と与えられるとき (図 2.6)、線形挙動を仮定すると、要素内の位置 x における変位 u を決定する形状関数として最適なものは、つぎのように表現される*3。

$$u(x) = a_1 + a_2 x \quad (2.10)$$

ここで、 a_1, a_2 は決定すべき定数である。左右の座標は x_i, x_j なので、つぎの式(2.11)が成立する。

$$u_i = a_1 + a_2 x_i, \quad u_j = a_1 + a_2 x_j \quad (2.11)$$

x_i を原点にとり、これから a_1, a_2 を決定したうえで、式(2.10)に代入して整理すると、つぎのようになる。図 2.6 に関数の形を示す。

$$u(x) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = [N]\{d\} \quad (2.12)$$

ここで、 $[N]$ は形状関数、 $\{d\}$ は要素の節点変位ベクトル、 $L = x_j - x_i$ である。

ポイント6 変位分布は形状関数により近似 ⇔ ノウハウ2 (p.60), ポイント1 (p.5)
 有限要素法では、要素内の変位分布は節点値から形状関数を使った内挿により近似されている。

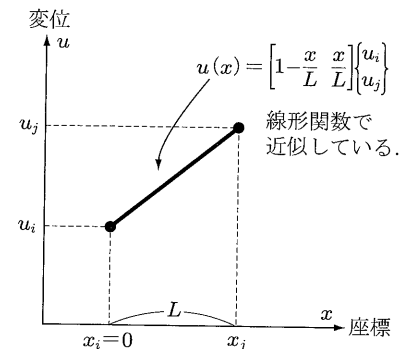


図 2.6 トラス要素の変位分布

*3 二次関数で近似する場合は、3.3節の図 3.8 参照。

トラス要素以外の要素についても、仮定する形状関数に応じて、 $[N]$ を決定でき、ハンドブックなどに掲載されている。

要素内のひずみは変位の空間勾配なので、式 (2.12) を式 (2.9) に代入して、式 (2.13) のように表すことができる。

$$\varepsilon(x) = \frac{du(x)}{dx} = \frac{d[N]}{dx} \{d\} = [B] \{d\} \quad (2.13)$$

$d[N]/dx$ は、 $[N]$ の各成分の微分を意味し、 B マトリックスとよばれる。ここでは、

$$[B] = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

となる。一方、要素内の応力はフックの法則から、

$$\sigma(x) = E\varepsilon(x) = E[B] \{d\} \quad (2.15)$$

と書ける。ここで、 E はヤング率である。ここで、式 (2.14) の $[B]$ の成分はすべて定数なので応力は要素内のどの場所でも等しい。3章で扱うソリッド要素では応力は要素内で均一ではなく分布しているのが一般的である。このような場合、数値積分の代表点 (積分点とよばれる) が実際の計算に使われ、そのまま出力値となる。ここで取り上げたトラス要素では、図 2.5 のように、要素の中心に代表点 (積分点) を置くと、後のソリッド要素と整合する。また、応力・ひずみは変位の勾配に比例する量であるため、変位より精度が低くなる。

ポイント7 応力は要素の代表点(積分点)での変位の勾配 ⇔
ノウハウ3 (p.62), 10 (p.74)

有限要素法では、応力は変位場の微分として要素内で定義され、数値計算上は代表点 (積分点) でのみ実際に計算・出力される。変位は節点、応力は要素 (積分点) で計算される。一般に応力は変位の勾配なので変位より精度が低い。

$\delta u(x)$ に基づく仮想ひずみエネルギーは、

$$\delta U^e = \int_{V^e} \delta\varepsilon(x)\sigma(x)dV^e \quad (2.16)$$

である*4。 dV^e は部材の微小体積要素である。ただし式 (2.13) より、

$$\delta\varepsilon(x) = \frac{d\delta u(x)}{dx} = [B] \{\delta d\} \quad (2.17)$$

*4 ここで $\delta u(x)$ は任意の微小な仮想変位分布、 $\{\delta d\}$ は、それに対応した節点 (仮想) 変位ベクトルである。

である。式 (2.15) と式 (2.17) を式 (2.16) に代入することにより、

$$\delta U^e = \int_{V^e} [B] \{\delta d\} E [B] \{d\} dV^e = \{\delta d\}^T \int_{V^e} [B]^T E [B] \{d\} dV^e \quad (2.18)$$

となる。 T は転置を表す。一方、節点に作用する外力の仮想仕事は、

$$\delta W^e = \{\delta d\}^T \{f\} \quad (2.19)$$

と表現できる。ここで、 $\{f\}$ は節点外力ベクトルである。仮想仕事の原理により、 δV^e と δW^e は等しいので、式 (2.18) と式 (2.19) を等値したうえで、 $\{\delta d\}^T$ を積分の外に出すと、

$$\{\delta d\}^T \int_{V^e} [B]^T E [B] \{d\} dV^e = \{\delta d\}^T \{f\} \quad (2.20)$$

と表現できる。釣り合い状態のときには任意の微小仮想変位 $\delta u(x)$ に対して、この関係式が成立するので、この式の両辺から $\{\delta d\}^T$ をキャンセルした式 (2.21) が成立しなければならない。

$$[k] \{d\} = \{f\}, \quad [k] = \int_{V^e} [B]^T E [B] dV^e \quad (2.21)$$

これにより、有限要素法においてもマトリックス法 (式 (2.5)) と同様の式が得られることがわかる。

ポイント8 要素剛性方程式 ⇔ ノウハウ7 (p.69)

式 (2.21) に示す $[k] \{d\} = \{f\}$ を要素剛性方程式とよぶ。ここで、要素剛性マトリックス $[k]$ は、 $[k] = \int_{V^e} [B]^T E [B] dV^e$ で定義される。 $\{d\}$ 、 $\{f\}$ はそれぞれ節点変位ベクトル、節点外力ベクトルである。

ここで、具体的に一次元トラスの要素剛性マトリックスを求める。式 (2.21) に式 (2.14) を代入する。式 (2.21) の被積分項は、要素内で一定値であり、積分は図 2.5 で示される代表点 (積分点) の応力に体積をかければよいので、要素剛性マトリックスは、式 (2.22) のように導出される。

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

ただし、 A は断面積である。

この式 (2.22) と式 (2.3) を比べると、 $k_1 = EA/L$ または $k_2 = EA/L$ なる対応関係があることがわかる。このあとの全体剛性マトリックスの導出や境界条件の処理などは、マトリックス法とほぼ同様となる。要素剛性マトリックスの大きさは、要素の自由度 (節点の自由度 \times 1 要素内の節点数) となる。この一次元トラスの場合、節点の自由度は一次元方向のみの 1 であり、1 要素内の節点数は 2 なので 2×2 の行列となる。二次元、三次元要素の場合には、式がより複雑なものとなるが、考え方はまったく同様であり、一般性のある方法である。

(3) 全体剛性マトリックスの導出

これまで述べた要素レベルの仮想仕事の原理を系全体に拡張することにより、複数の要素からなる系の全体剛性マトリックスの導出が可能となる。全体剛性マトリックスの大きさは全自由度数 (節点の自由度 \times 全節点数) となり、メッシュが多ければ 10000×10000 などの大規模行列となる。第 e 番目の要素の成分のすべてに e をつけて表示する。

微小仮想変位に基づく系全体の体積 V にわたる仮想仕事は、要素ごとの仮想仕事の総和であるから、各要素のひずみエネルギー δV^e (式 (2.16)) を足し合わせて、

$$\delta U = \int_V \delta \epsilon \sigma dV = \sum_e \int_{V^e} \delta \epsilon^e \sigma^e dV^e \quad (2.23)$$

であるが、これに式 (2.13), (2.15), (2.21) を代入することにより、

$$\sum_e \int_{V^e} \{\delta d^e\}^T [B]^T E [B] \{d^e\} dV^e = \sum_e \{\delta d^e\}^T [k^e] \{d^e\} \quad (2.24)$$

となる。

いま、系全体の剛性マトリックスに対して、第 e 番目の要素の剛性成分のみ組み込まれた剛性マトリックスを $[K^e]$ と書くことにする。この意味は、式 (2.3) \rightarrow 式 (2.4) の拡張に対応している。これに合わせて、 $\{\delta d^e\}$ や $\{d^e\}$ を系全体の仮想節点変位ベクトル、節点変位ベクトル $\{\delta U\}$, $\{U\}$ に拡張することにより、式 (2.24) をつぎのように書き直すことができる。具体的な方法は、図 2.3 や式 (2.5) を参照すること。

$$\begin{aligned} \sum_e \{\delta d^e\}^T [k^e] \{d^e\} &\rightarrow \sum_e \{\delta U\}^T [K^e] \{U\} \\ &= \{\delta U\}^T \sum_e [K^e] \{U\} = \{\delta U\}^T [K] \{U\} \quad (2.25) \end{aligned}$$

ここで、

$$[K] = \sum_e [K^e] \quad (2.26)$$

は、要素剛性マトリックスを全体剛性マトリックスに重ね合わせる操作 (マージ: merge) に対応している (図 2.7 参照)。これは、図 2.3 に示した手順と対応している。

一方、外力による仮想仕事もまた要素ごとの外力仮想仕事の総和であるから、式 (2.19) を全要素に対して足し合わせて

$$\delta W = \sum_e \{\delta d^e\}^T \{f^e\} \quad (2.27)$$

で与えられるが、系全体の節点外力ベクトルに $\{f^e\}$ の成分のみを加算したベクトルを

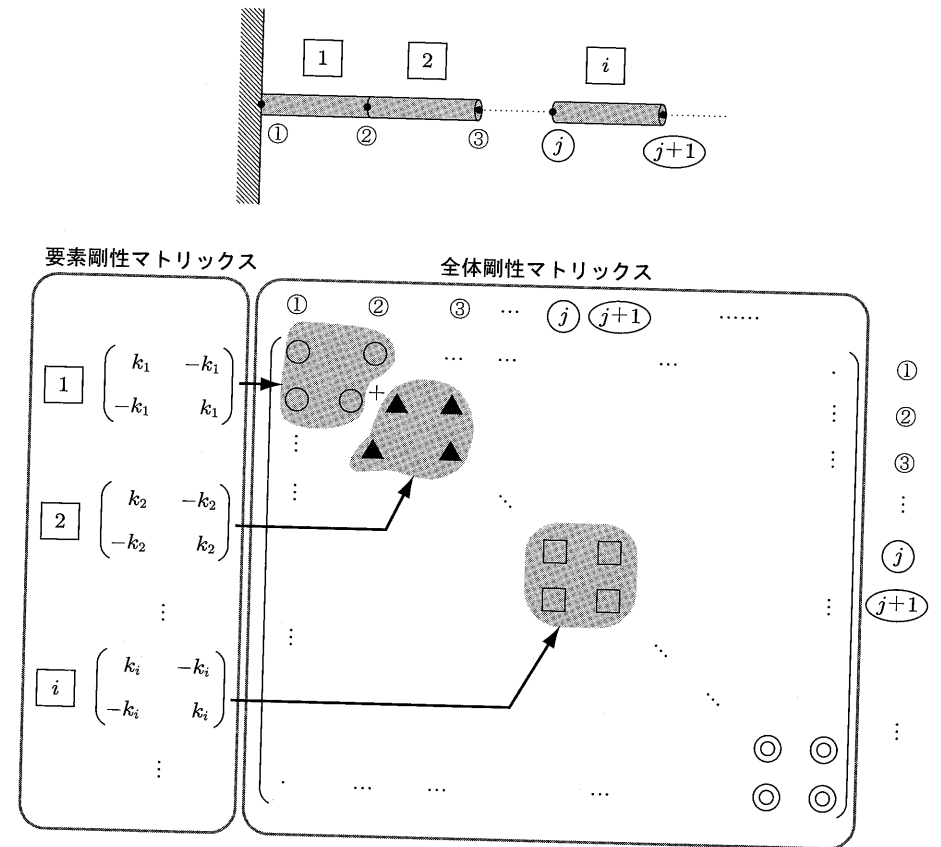


図 2.7 全体剛性マトリックスへの要素剛性マトリックスの埋め込み (要素剛性マトリックスを対応する節点 (自由度) のところに埋め込んで (マージして) 全体剛性マトリックスを作成する)

$\{F^e\}$ と記述することにし, $\{\delta d^e\}$ を系全体の仮想変位 $\{\delta U\}$ に拡張することにより,

$$\sum_e \{\delta d^e\}^T \{f^e\} \rightarrow \sum_e \{\delta U\}^T \{F^e\} = \{\delta U\}^T \sum_e \{F^e\} = \{\delta U\}^T \{F\} \quad (2.28)$$

と記述できる. ここで, $\{F\}$ は $\{F^e\}$ の重ね合わせにより導いたものである. 結局, 仮想仕事の原理より式 (2.25) と式 (2.28) を等値し, $\{\delta U\}^T$ をキャンセルすることにより, 式 (2.29) の剛性方程式が導出される.

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.29)$$

この操作は, 式 (2.5) の手順に対応している. このように, 全体剛性マトリックスの構築手順は基本的にマトリックス法と同じである. この後の境界条件の処理や $[K]^{-1}$ の算出による節点変位ベクトル $\{U\}$ の算出についても同じ手順となる.

つぎに, 具体例として, 図 2.8 に示すトラス構造の有限要素解析を行う場合を考える. 各要素の要素剛性マトリックスは式 (2.22) より, 式 (2.30) で与えられる.

$$[k^1] = \frac{E_1 A_1}{L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [k^2] = \frac{E_2 A_2}{L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

この式 (2.30) をマトリックス法における式 (2.3) と比較すると明らかとなっており,

$$k_1 = \frac{E_1 A_1}{L_1}, \quad k_2 = \frac{E_2 A_2}{L_2} \quad (2.31)$$

の 2 種類のばねが結合している問題と等価であることがわかる.

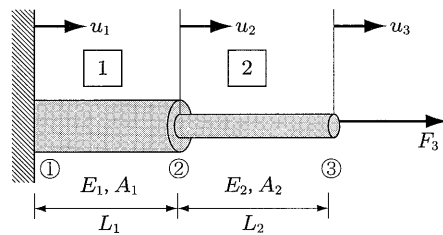


図 2.8 一次元トラス構造の例題

一般に, 要素剛性マトリックスが求まっていれば, その他の有限要素解析の手順は共通である. したがって, ユーザーは, 解析目的に応じて, 適切な要素剛性マトリックスを選択することが重要である.

トラス要素の場合には, 変数として変位以外にも, 要素内の応力やひずみの評価が必要になる. ひずみは, 式 (2.13), (2.14) より,

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{L_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{L_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

と求まり, 応力は, 式 (2.15) より,

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1, \quad \sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 \quad (2.33)$$

と求まる.

ポイント 9 有限要素法の計算手順

有限要素法プログラム内の手順は, 要素の種類にかかわらず, おおよそ類似しており, 図 2.9 (p.20) のようになっている.

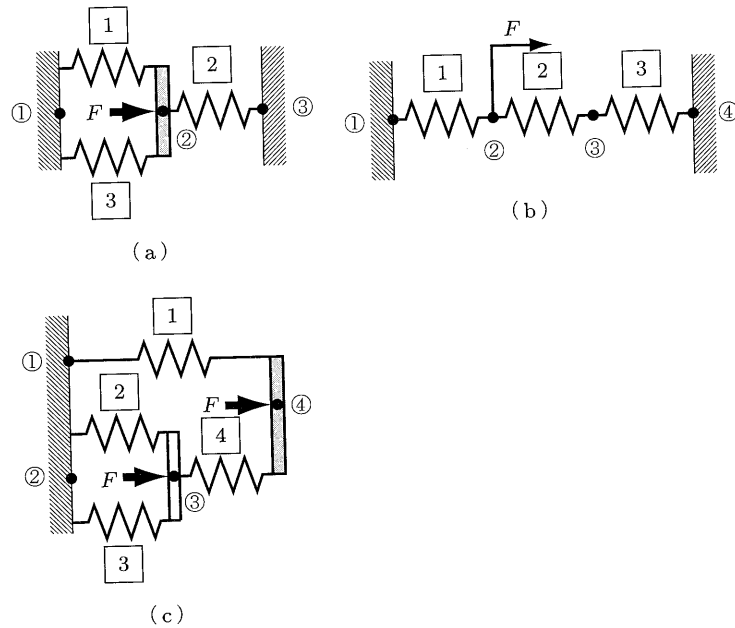
2.3 二次元トラスの有限要素法

二次元トラスの解析は, 一次元トラスを拡張して容易に行うことができる. 図 2.10 に示す, 一次元トラスを θ だけ傾けたトラス要素を考えてみる. すなわち, y 方向の変位と荷重 v, g をあらたに考慮しなければならない.

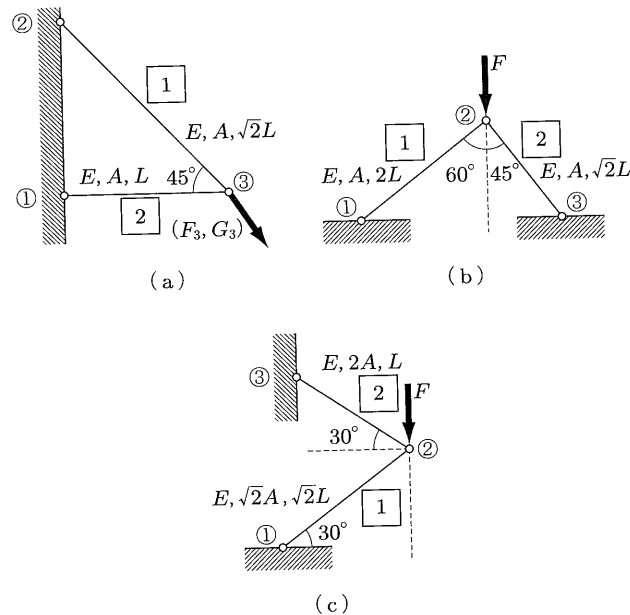
このトラスは, 要素の方向に x' 軸, それと直角方向に y' 軸をとることにすれば, x' 方向の変位 u' , 荷重 f' , y' 方向の変位 v' , 荷重 g' について, 要素剛性方程式は式 (2.34) のように与えられる. ここで, 実際は y' 方向の変位や荷重ははたらいっていないことに注意せよ. また一次元トラスの問題のときと同様 $k = EA/L$ (E : ヤング率, A : 断面積, L : 長さ) である.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[k']} \underbrace{\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \end{Bmatrix}}_{\{d'\}} = \underbrace{\begin{Bmatrix} f'_1 \\ g'_1 \\ f'_2 \\ g'_2 \end{Bmatrix}}_{\{f'\}} \quad (2.34)$$

$x'y'$ 座標系から xy 座標系への座標変換は, 座標変換の式 (付録 A 例題 1 参照) に $-\theta$ を代入することによって得られる.



演図 2.1



演図 2.2

3章 有限要素法の原理 (ソリッド要素)

本章では、もっとも有限要素法で用いられるソリッド要素について説明する。最終的に、そのなかでもっともポピュラーな(二次元)アイソパラメトリック要素の理解を目指す。

この要素は、もっともよく用いられる要素であるにもかかわらず、原理的な側面を知らないことによる単純な誤りをおかしやすいので、ある程度の原理の理解が必要である。ユーザーが直観的にアイソパラメトリック要素を理解し、使いこなすことを目的にする。より詳細な原理はすぐれた参考書(たとえば、参考文献[5])が数多くあるので、それらを参照のこと。

3.1 三角形一次要素 (定ひずみ要素)

アイソパラメトリック要素の理解を容易にするため、原理的に簡単な、三角形一次要素(定ひずみ要素)の説明を先に行う。ただし、実用的には三角形一次要素が使われることはない。教育目的でのみ取り上げることとする。

(1) 三角形一次要素 (定ひずみ要素) の定式化

(a) ひずみの定義

三角形一次要素(図 3.1)の定式化を、2.2節のトラス要素の定式化と対比させながら説明を行う。

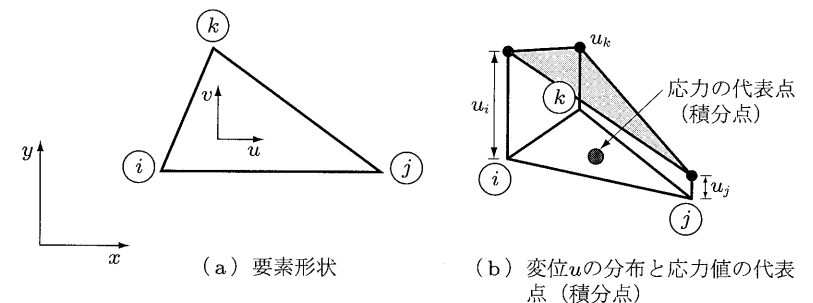


図 3.1 三角形一次要素

2章の式(2.13)の要素内の任意の位置のひずみは、二次元三角形要素の場合は二次元の変位とひずみ(付録A.4節式(A.12)参照)の関係を使って、

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.1)$$

となる。ただし、 $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ は x, y 方向の垂直ひずみ、 γ_{xy} はせん断ひずみである。これを、マトリックス表示すると、式(3.2)となる。ここで、 $[\partial]$ はマトリックス演算子である。左辺をひずみベクトル^{*1}とよぶ。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [\partial] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

(b) 形状関数

つぎに、形状関数の定義を行う。三角形一次要素内の任意の点の変位は、節点値から内挿する形状関数で近似される。トラスが一次元で単純であったのに対して、三角形一次要素では、三つの節点からの内挿となる。具体的には、図3.1(b)のような三つの節点の交点を結ぶ平面を表現する形状関数を定義すればよい。

図3.1(a)の三つの節点 i, j, k の節点座標を $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$ 、節点変位を $(u_i, v_i), (u_j, v_j), (u_k, v_k)$ とする。図3.1(b)のような u_i, u_j, u_k を結ぶ平面を表す式は、2章の式(2.10)の形状関数にならって、式(3.3)のように設定できる。

$$\begin{cases} u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \\ v(x, y) = a_4 + a_5x + a_6y \end{cases} \quad (3.3)$$

ここで、 $a_1 \sim a_6$ は決定すべき定数である。 x 方向の変位 u (式(3.3)) について、三つの節点座標を入力して得た u_i, u_j, u_k を、式(3.4)のようにマトリックス表記をして、 a_1, a_2, a_3 を決定することを考える。 y 方向変位 v も同様であるので、ここでは省略する。

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

*1 ここで、ひずみ(応力)テンソルがベクトルに変化したという意味ではない。ひずみ(応力)テンソルを単にベクトル表記したという意味であることに注意。

式(3.4)で、 $[A]^{-1}$ を計算して、左辺にかけることによって、 a_1, a_2, a_3 を決定することができる。これを、式(3.3)に代入すると、式(3.5)が得られる。

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} [A]^{-1} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで、 N_i, N_j, N_k は、式(3.6)となる。

$$\begin{cases} N_i(x, y) = \frac{(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y}{x_j y_k + x_k y_i + x_i y_j - x_j y_i - x_i y_k - x_k y_j} \\ N_j(x, y) = \frac{(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y}{x_k y_i + x_i y_j + x_j y_k - x_k y_j - x_j y_i - x_i y_k} \\ N_k(x, y) = \frac{(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y}{x_i y_j + x_j y_k + x_k y_i - x_i y_k - x_k y_j - x_j y_i} \end{cases} \quad (3.6)$$

式(3.6)をみると、節点 i ($x = x_i, y = y_i$) で $N_i = 1$ となり、節点 j ($x = x_j, y = y_j$)、または節点 k ($x = x_k, y = y_k$) で $N_i = 0$ となるのがわかる。 N_j (N_k) も同様に、節点 j (k) のみで $N_j = 1$ ($N_k = 1$) となり、ほかの節点では $N_j = 0$ ($N_k = 0$) となる。したがって、式(3.5)は、節点 i ($x = x_i, y = y_i$) で $u = u_i$ となり、節点 j, k でそれぞれ $u = u_j, u = u_k$ となる。形状関数が式(3.6)のように線形関数であることから、要素内は、図3.1(b)に示すように平面状に内挿されていることになる。

式(3.6)を二次元に拡張してマトリックス表記すると、式(2.12)に対応する式(3.7)が得られる。 y 方向変位 v についても、 x 方向と同じ形状関数を使用できる。

$$\begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = [N] \{d\} \quad (3.7)$$

ここで, $[N]$ は形状関数, $\{d\}$ は節点変位ベクトルである.

(c) 要素剛性マトリックス

つぎに, 要素剛性マトリックスを求める. 式 (3.7) を式 (3.2) に代入すると, 2章の式 (2.14) に対応する B マトリックスが得られる. N_i, N_j, N_k (式 (3.6)) が, x, y の一次関数であることから, 偏微分による $[B]$ の成分はすべて座標に依存しない定数となる.

$$[B] = [\partial][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_k & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_j}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

一方, 2章の式 (2.15) に対応する応力とひずみの関係は, たとえば, 等方性二次元平面応力場近似の場合, 応力-ひずみ関係を表現するフックの法則 (付録 A.4 節の式 (A.15)) より, 式 (3.9) のようになる.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

なお, 二次元平面ひずみ場近似の場合には, 式 (A.16) より,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [E] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

となる. 左辺を応力ベクトル*2とよぶ. 以上の関係式から, 2章の式 (2.21) と同様に

*2 p.30 の脚注参照.

要素剛性マトリックスが計算でき, $[B]$ が定数であることから積分は代表点 (積分点: たとえば, 図 3.1(b) のように要素の重心に置く) の値に体積をかけたものになる. 要素の面積を A , 厚さを t として, 式 (3.11) を得る.

$$[k] = [B]^T [E] [B] \int_V dV = [B]^T [E] [B] A t \quad (3.11)$$

△ 具体的な計算は, 章末の演習問題で取り扱う.

(d) 全体剛性マトリックスと応力・ひずみの出力

以降の手順はトラスとまったく同様であり, 全体要素マトリックスを合成 (組み立て) して, 境界条件の処理のあと, 連立一次方程式を解くことにより節点変位ベクトルが得られる. 変位は節点の値として出力される. ひずみは式 (3.12) のように要素内の任意の点の値が定義され, 通常は積分点で計算・出力させる (図 3.1(b) 参照).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = [B] \{d\} \quad (3.12)$$

応力ベクトルは式 (3.9) もしくは式 (3.10) から計算される. ここで, $[B]$ は要素内で一定となるので, 応力・ひずみも要素内で一定となる. これが定ひずみ要素とよばれる理由である. 一般に応力・ひずみは変位の微分値であるため, 変位にくらべて精度良く求めることが難しい.

ポイント13 三角形一次要素は非実用的 ⇔ ノウハウ3 (p.62)

三角形一次要素の変位は, 三つの節点の変位を線形に結ぶ形状関数で近似される. 要素内の応力・ひずみは, 変位の勾配なので一定値となってしまう, 精度が著しく低く実用的ではない. したがって, 通常, 特殊な用途以外の応力解析に用いられることはない.

3.2 アイソパラメトリック四辺形一次要素

(1) アイソパラメトリック四辺形一次要素の定式化

(a) 形状関数

アイソパラメトリック (isoparametric) 要素は, 正方形要素の定式化を出発点としている. まず, 図 3.2(a) のような $\xi\eta$ 座標系 ($-1 \leq \xi, \eta \leq 1$) の正方形要素を考える. この要素内の変位分布は式 (3.5), (3.6) にならって, 式 (3.13), (3.14) のように

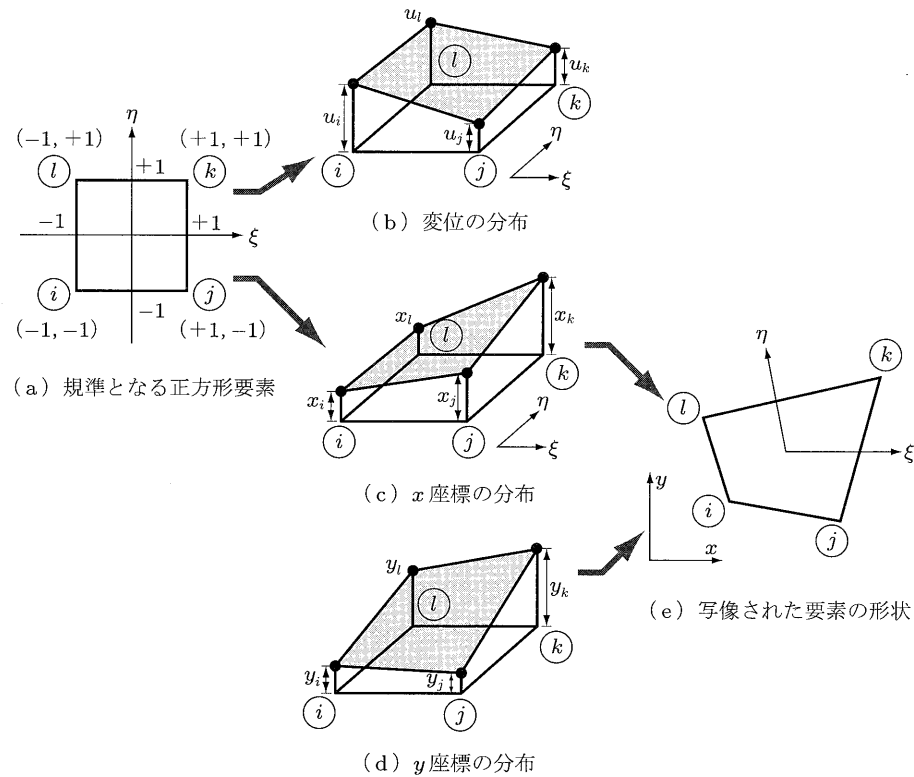


図 3.2 アイソパラメトリック四辺一次形要素
(変位も x, y 座標も同じ形状関数 $[N]$ で表現する)

ξ と η の関数で表すことができる (図 3.2(b)).

$$\begin{cases} u(\xi, \eta) = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k + N_l u_l \\ v(\xi, \eta) = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k + N_l v_l \end{cases} \quad (3.13)$$

$$\begin{cases} N_i = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta), & N_j = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_k = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta), & N_l = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \end{cases} \quad (3.14)$$

ここで、 (u_i, v_i) は節点 i の変位である (j, k, l も同様). N_i は形状関数で、節点 i で 1 になり、それ以外の節点 j, k, l で 0 となる関数である. したがって、節点 i の座標 ($\xi = \eta = -1$) を代入すると、 $N_i = 1$ で N_j, N_k, N_l がすべてゼロになるので、 $u = u_i$ となることが確認できる. ほかの j, k, l 点に関しても、同様のことが成り立つ. 三角形要素と比較して、節点が三つから四つとなったため、変位 u, v は ξ と η

だけでなく、 ξ, η を含む関数と設定されており、要素内で x 方向と y 方向の両方向に変位が変化するような場合 (ほとんどの場合はそうなる) に、よりよい近似解を得ることができる.

ポイント 14 アイソパラメトリック四辺形要素の近似精度は高い

アイソパラメトリック四辺形要素は、節点が三つから四つとなったため、変位の近似が x, y に加えて xy の形状関数によって行われるため、精度が高くなる.

変位が定義できたら、式 (3.8) と同様な手順 (x, y を ξ, η に置き換えて) で B マトリックスを計算し、剛性マトリックスを組み立てることができる.

しかし、実際の要素は正方形とは限らず、任意の形状である. そこで、アイソパラメトリック要素では、形状 (x, y 座標) も変位と同様に ξ, η で表すことを考える. すなわち、式 (3.13) の u_i, u_j, u_k, u_l のかわりに x_i, x_j, x_k, x_l を、 v_i, v_j, v_k, v_l のかわりに y_i, y_j, y_k, y_l を代入して、式 (3.15) のように要素内の位置 (x, y) を式 (3.14) と同じ形状関数 N_i, N_j, N_k, N_l で表す (図 3.2(c), (d) 参照).

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = N_i x_i + N_j x_j + N_k x_k + N_l x_l \\ y(\xi, \eta) = N_i y_i + N_j y_j + N_k y_k + N_l y_l \end{cases} \quad (3.15)$$

ポイント 15 アイソパラメトリック要素は変位と形状を同じ形状関数で表現

アイソパラメトリック要素では、形状 (x, y 座標) も変位と同じ形状関数で表される. 変位と形状の双方に同じ形状関数を使うことが、アイソパラメトリック要素の語源である.

実際の形状 (図 3.2(e)) は、 x, y 座標で表現されているため、ひずみの計算のためには変位 u, v を x, y で偏微分する必要がある. しかし、変位 u, v は、式 (3.13) のように ξ, η の関数であると定義したので直接微分はできない. したがって、 x, y が ξ, η の関数であることを使う. このような二つの座標系の偏微分は、ヤコビアン $[J]^*$ を通して関係づけられることがわかっている. 偏微分に関する連鎖ルールを用いれば、式 (3.16) が得られる.

*3 ヤコビアンは、多変数関数の変数変換 (ここでは x, y 座標と ξ, η 座標の変換) をともなう微分・積分を行うために使われる.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

$[J]^{-1}$ を求め、式 (3.16) にかけて、

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.16')$$

となり、 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ が求まる。 u を v に変えると、 $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ も同様な手順で求める。すると、B マトリックスが誘導でき、変位とひずみを関係づけることができる。

具体的な手順は少し複雑になるので、演習問題 3.3 の「解説～計算手順」のまとめで説明する。演習問題を実際に解きながら理解してほしい。

(b) 要素剛性マトリックス

要素剛性マトリックスを計算するためには、要素体積内にわたる積分が必要となる。 $[B]$ は ξ と η の関数となるため、積分は $\xi\eta$ 座標系で行わなくてはならない。積分の変数変換の公式により、 xy 座標系と $\xi\eta$ 座標系の微小面積の変換は、ヤコビアン $[J]$ を使って、

$$dxdy = (\det[J])d\xi d\eta$$

となるため、要素剛性マトリックスの積分は、式 (3.17) となる。

$$[k] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [E] [B] t (\det[J]) d\xi d\eta \quad (3.17)$$

ここで、 t は要素の板厚、 $\det[]$ は行列式である。

(c) ガウスの数値積分

式 (3.17) の積分計算にあたっては、B マトリックスと $\det[J]$ は ξ, η の関数であるため簡単には積分できない。そこで、積分計算にはガウスの数値積分を用いる。

ガウスの数値積分とは積分領域内の数点の代表点*4に対して被積分関数の計算を行い、それに適当な重みをかけて足し合わせる積分法であり、少ない計算負荷で高い精度が得られる。例として、一次関数 $F(\xi)$ の $-1 < \xi < 1$ の範囲の積分を考える。

*4 トラス要素・三角形要素の場合は被積分関数が要素内で一定のため、代表点を図 2.5、図 3.1 のように要素の中心で便宜的に定義した。

図 3.3 に示す位置 ξ_a (積分点) と比率 W_a (重み係数) を用いて、式 (3.18) のように積分値を近似する。図 3.3(a) は二次積分、(b) は三次積分である。 ξ_a と W_a は最も積分の精度が高くなるようにあらかじめ決められており、図 3.3 に示すとおりである。

$$\int_{-1}^{+1} F(\xi) d\xi \approx \sum_{a=1}^n W_a F(\xi_a) \quad (3.18)$$

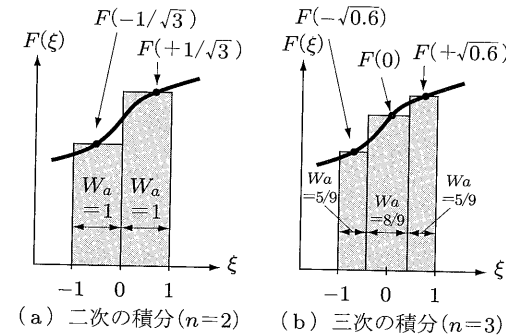


図 3.3 一次関数 $F(\xi)$ のガウスの数値積分法 (長方形の幅は重み W_a に相当する)

図 3.3 には示していないが、もちろん四次積分以上も可能で、要素の次数に応じて、精度をよくするための最適な積分点数が決まる。必要以上に積分点数を増やしても精度が向上するわけではない*5。二次元四辺形要素の場合は、図 3.4 に示す積分点位置と重みがいられ、式 (3.19) のように積分が定義される。積分点数は、四辺形一次要素のときは 4 (二次積分) が、二次要素のときは 9 (三次積分) が用いられることが多い。このような積分点数の要素を完全積分要素とよぶ。これより、積分点が少ない要素 (一次要素なら 1、二次要素なら 4) を低減積分要素とよび、特殊な用途に用いられる。

$$[k] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{a=1}^m \sum_{b=1}^n W_a W_b F(\xi_a, \eta_b) \quad (3.19)$$

ポイント 16 **ガウスの数値積分 ⇔ ノウハウ 10** (p.74)
 要素剛性マトリックスの算出にはガウスの数値積分が用いられる。積分次数は選択可能であるが、通常は完全積分要素が用いられる。

*5 たとえば、3.2 (2) 項のようにせん断ロックが生じる場合は逆に積分次数を下げた方がよい。

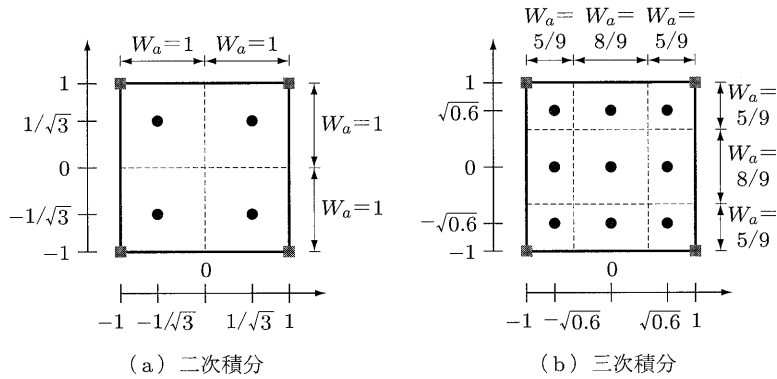


図 3.4 二次元要素の積分点の位置と重みの値
(長方形の幅は重み W_a に相当する)

(d) 応力・ひずみの算出

全体剛性マトリックスを組み立て、境界条件の処理のあとに連立一次方程式を解けば、節点変位ベクトルが算出され、図 3.5(a) のように変位分布を得ることができる。各要素内のひずみベクトルは、

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x(x, y) \\ \varepsilon_y(x, y) \\ \gamma_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = [B] \{d\} \quad (3.20)$$

から、図 3.5(b) のように、変位の勾配として求まる。この際、式 (3.17) の要素剛性マトリックスの被積分関数、すなわち、応力・ひずみ値は積分点の位置でのみ計算されている。よって、応力・ひずみは、理論上積分点での値が最も精度が高くなり、結果の出力も積分点で行われる。しかし、積分点の位置は要素内の中途半端な場所にあ

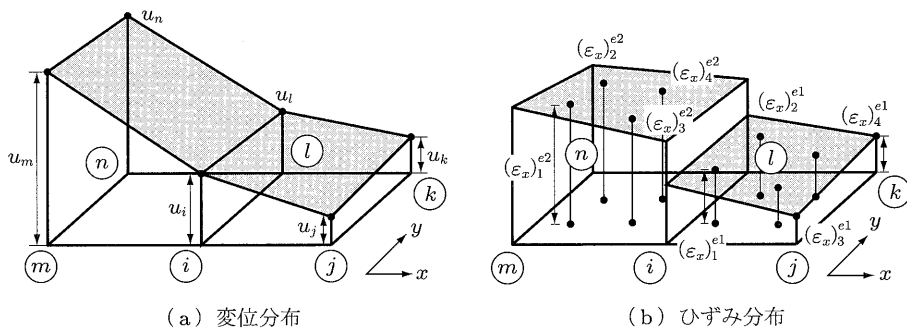


図 3.5 四辺形一次要素 (二次積分) の計算結果として得られる変位分布とひずみ分布
(2 要素分を示している)

るため、3.2 (1) 項 (e) で詳細を述べる節点平均応力や節点平均ひずみが一般には広く用いられている。

ここで、変位は要素間で連続 (適合とよぶ) であるが、ひずみ (応力) は連続性は保証されない。

(e) 節点平均応力・ひずみ

節点変位は異なる要素間で共通であるため、図 3.5(a) のように要素間で連続となる。しかし、その勾配である応力・ひずみは、連続であるという条件は課されていない。そのため、積分点の値を図 3.5(b) のように節点へ外挿すると、要素間でひずみは不連続な分布となる*6。つまり、一つの節点が四つの要素に属している場合、積分点から外挿された節点のひずみは、節点を取り囲む四つの要素ごとに異なる。この四つの節点ひずみ (節点応力) の値を平均化したものを節点平均ひずみ (節点平均応力) とよぶ。出力されるひずみ (応力) の値のなかでもっとも近似の精度が高いのは積分点のひずみ (応力) であるが、取り扱いが便利のため節点平均ひずみ (応力) が出力に使われることが多く、精度の面で十分注意を払わなければならない (4.7 (2) 項の「ノウハウ 10」(p.74) を参照)。

ポイント 17 積分点応力と節点平均応力 ⇔ ノウハウ 10 (p.74)
 応力・ひずみの出力には、積分点での値が用いられるが、実用的には積分点値を節点に外挿して平均した節点平均応力・ひずみが用いられる。

(2) アイソパラメトリック四辺形一次要素の使用上の注意点

四辺形一次要素は、曲げ変形の記述が貧弱である。すなわち、図 3.6(a) に示すように、曲げモード下では、実際には積分点の位置でせん断変形は発生しないが、一次要素では、形状関数の性質上、図 3.6(b) のように積分点上でせん断変形が発生してしまう。この余分なせん断変形により、ひずみエネルギーを過大に評価してしまい、曲げに対して剛な解が得られる。これをせん断ロックングという。

せん断ロックングは、積分点数を一つに減らした低減積分要素によってある程度解決できる。しかし、低減積分要素は、メッシュが粗いと、アワーグラスモード (エネルギーゼロの変形モード) とよばれる異常な変形が現れるという大きな問題点を抱えている。

これらのことを背景に、現在の ANSYS などの汎用コードでは、非適合要素が主流となっている。非適合要素とは、通常四辺形一次要素の形状関数に、曲げ変形に対

*6 要素内のひずみは、式 (3.20) で定義されているが、通常は、外挿にはこの式は使わず、最小自乗法等により外挿される。

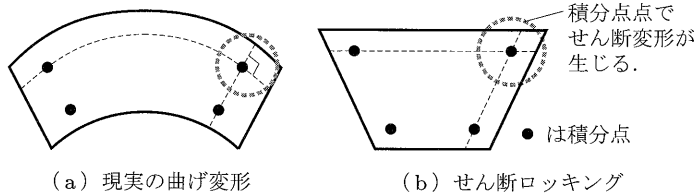


図 3.6 四辺形一次要素に生じるせん断ロッキング

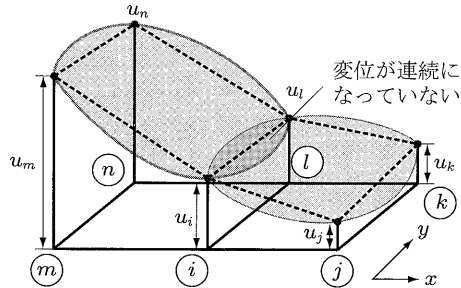


図 3.7 非適合要素の変位分布の例 (要素間の連続性は保たれない)

応じた形状関数を追加した要素であり、曲げに対する精度が格段に向上する。しかし、図 3.7 のように、要素間の変位の連続性が保たれないという問題点が生じる。しかし、メッシュが適正であれば、多くの場合は実用的には問題は生じない。

なお、あとに述べる二次要素では、これらのせん断ロッキング、アワーグラスモードは生じない。これが、計算負荷が大きいかもかわらず、二次要素が好んで使われる理由の一つにもなっている。

ポイント 18 **せん断ロッキング・アワーグラスモード**

四辺形一次要素は、せん断ロッキング・アワーグラスモードなどの問題が生じるので注意、四辺形二次要素では生じない。

3.3 アイソパラメトリック四辺形二次要素

(1) アイソパラメトリック四辺形二次要素の定式化

一次要素の節点と節点の間に中間節点を設け、形状関数を一次式ではなく、二次式で近似する要素を二次要素とよぶ。概念の理解のため、図 3.8 に一次要素の一次要素と二次要素の例を示す。一次要素では変位分布は式 (3.21) で表される。

$$u = N_i u_i + N_j u_j \quad (N_i = (1 - \xi)/2, N_j = (1 + \xi)/2) \quad (3.21)$$

二次要素では、中間節点 k を追加して、

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k$$

$$(N_i = -(1 - \xi)\xi/2, N_j = (1 + \xi)\xi/2, N_k = (1 - \xi)(1 + \xi)) \quad (3.22)$$

と、変位分布は ξ の二次関数で表される。

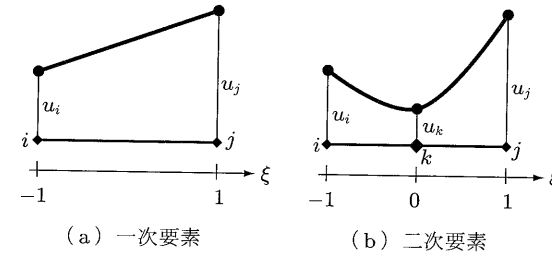


図 3.8 一次要素の一次要素と二次要素

二次元でもっともよく用いられる要素であるアイソパラメトリック四辺形二次要素は、図 3.9(a) のように、節点と節点の間に中間節点を追加した計 8 個の節点を持ち、変位・形状を二次の形状関数で近似する。一次要素では、形状関数は $(\xi, \eta, \xi\eta)$ の関数であったが、二次要素では、 $(\xi, \eta, \xi\eta, \xi^2, \eta^2, \xi^2\eta, \xi\eta^2)$ の関数となる。なお、三角形二次要素の場合は、図 3.9(b) のように 6 節点となる。

二次要素は二次の形状関数を用いられるため、曲げ応力場の解析に適しており、一次要素と比べて格段に精度は高い。

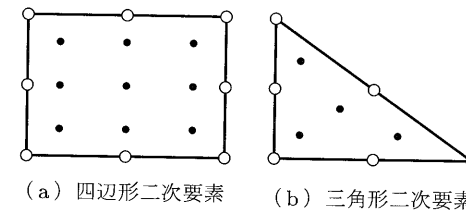


図 3.9 四辺形二次要素と三角形二次要素の節点位置 (○) と積分点位置 (●)

(2) アイソパラメトリック四辺形二次要素を用いる際の注意点

(a) 形状関数

二次要素は二次関数を用いるため、集中荷重の作用点近傍などの応力特異点付近で