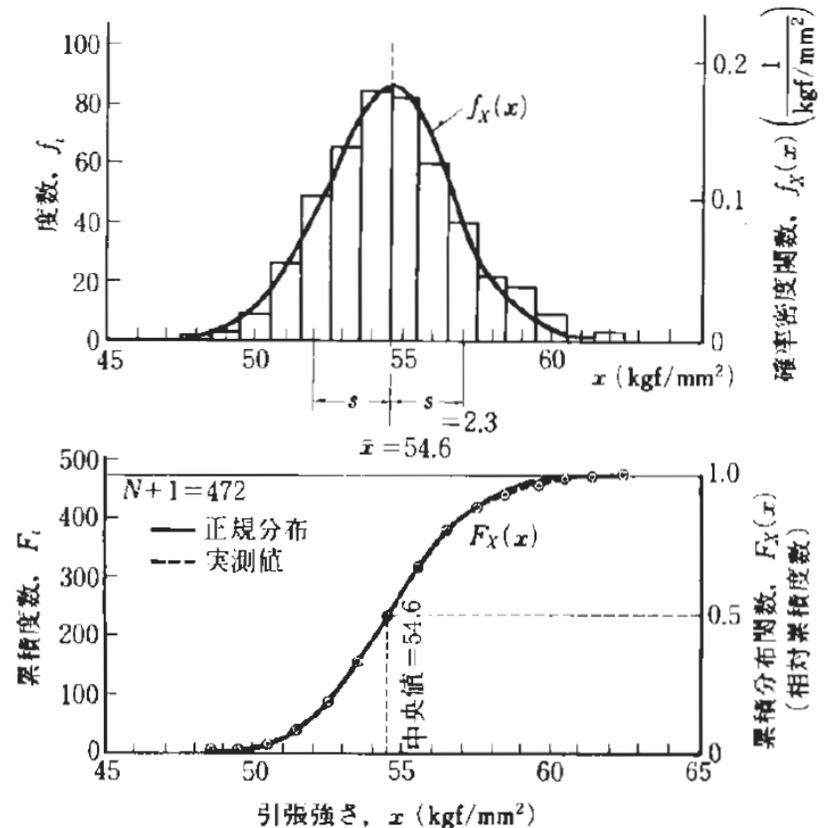


確率紙の考え方

母集団の推定

確率変数のサンプル値 x_1, x_2, \dots, x_n が、ある分布 (例えば正規分布) に従っているかどうかを調べたい。

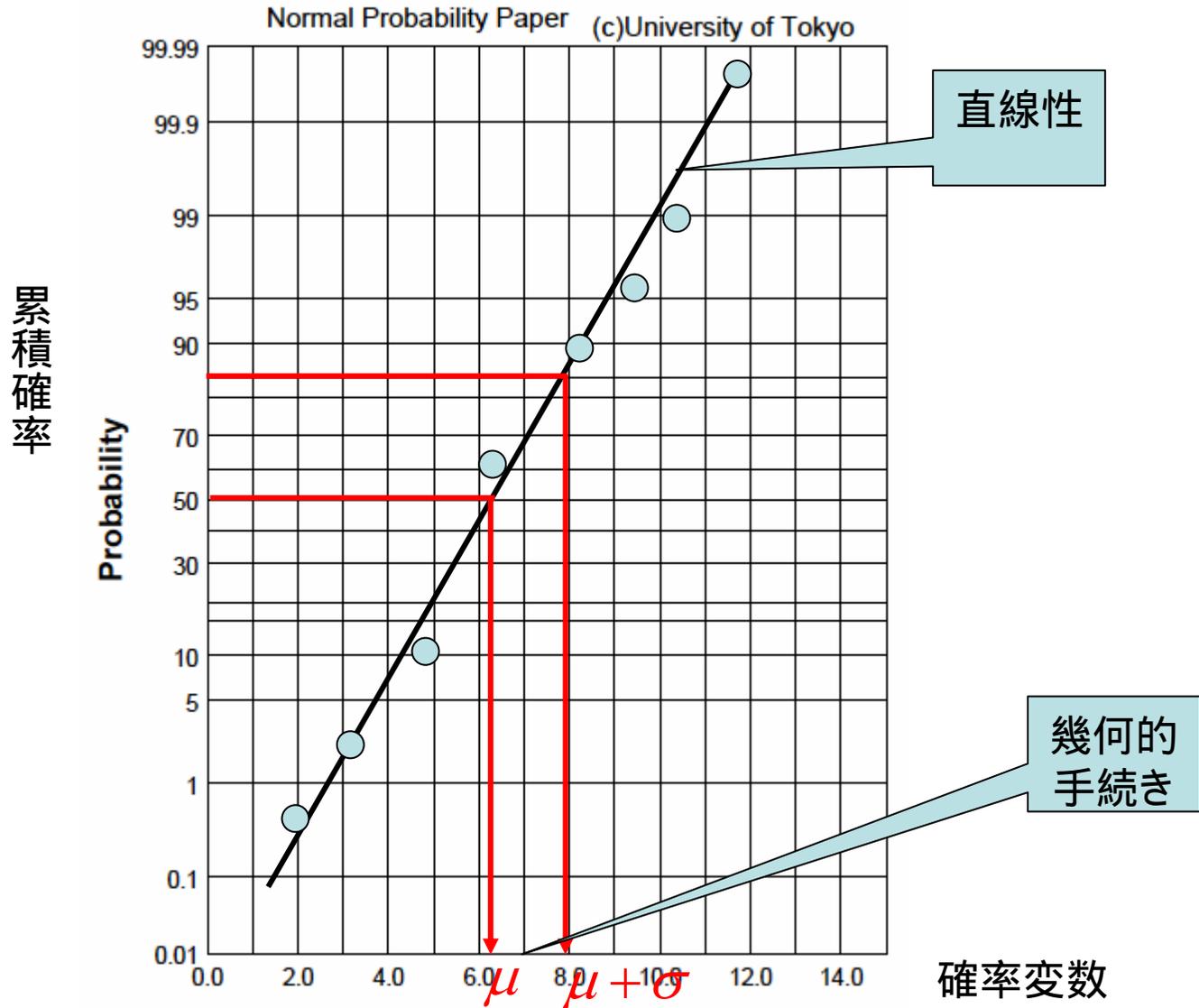
PDFやCDFと直接比較しても、適合性は直ちには判定できず、また母数の決定も簡単ではない



確率紙とは何か

- グラフ上で (x_i, F_i) をある特定の確率紙上にプロットしたときに、直線性の成立をもってその分布への適合性を判断する
- 幾何的手続きで、母数の評価を可能とする

正規確率紙の例



手順

- 累積確率 $F(x)$ 、確率変数 x に対して式を変形し $G(F)=aH(x)+b$ となるよう誘導する
- 縦軸に $G(F)$ 目盛りを、横軸に $H(x)$ 目盛りを付けたものが、この分布形状に対する確率紙となる
- この分布形に適合する場合 (x_i, F_i) をプロットしたものは、直線に適合する

例:正規分布の場合

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \Phi(u)$$

変形すると

$$u = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$u = \Phi^{-1}(F)$$

つまり

$$\boxed{\Phi^{-1}(F)} = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

縦軸:正規確率目盛り

横軸:線形目盛り

データのプロット法

N個のデータが得られ、小さいほうから順番に並べて x_1, x_2, \dots, x_n であるとする。

このとき $(x_1, F_1), (x_2, F_2), (x_3, F_3), \dots, (x_n, F_n)$ を確率紙にプロットするが、 F_i をどのように考えたらよいか。

$F_i = i/n?$ よくやる間違い

順序統計学によると F_i はばらつきを持つ。その確率密度関数は

$$g(F_i) = n C_i \cdot C_1 \cdot F_i^{i-1} (1 - F_i)^{n-i} dF_i$$

従って、 F_i として割り当てるのは、このばらつきの代表値とすべき

$$\text{ミーンランク } \bar{F}_i = \frac{i}{n+1} \quad \text{メジアンランク } \tilde{F}_i \cong \frac{i-0.3}{n+0.4}$$

課題(締め切り6月6日)

1.ワイブル分布及び最小値の分布について確率紙を作りたい。縦軸、横軸をどのように描けばよいかを述べよ。また、その確率紙から、母数をどのように読み取ればよいかを考察せよ。

2.正規分布とワイブル分布の確率分布からデータをサンプルしたところ、下記のようになった。各系統の分布形状とその母数を確率紙を用いて考察せよ。確率紙は、市販のものを用いてもよいが、下記のURLからダウンロードして使ってもよい。

A系統	37.0	24.0	12.5	27.0	16.5	3.5	33.0	50.0	44.0
B系統	11.0	6.3	12.0	4.5	2.8	9.0	7.3	18.0	15.0

ミーンランク、メジアンランクいずれを用いてもよい

ダウンロード先

<http://www.fml.t.u-tokyo.ac.jp/index-j.html>

の中の「関連講義」「構造信頼性」をクリックする