

卒業論文

Flash Temperature を考慮した  
タイヤゴムの摩擦特性評価

p.1 – p.89 完

2013 年 2 月 1 日提出

指導教員 酒井 信介 教授

110170 荒牧 純平

---

# 目次

---

1	序論 .....	9
1.1	研究の背景 .....	10
1.2	従来の研究 .....	11
1.3	研究の目的 .....	12
1.4	本論文の構成 .....	13
2	タイヤ-路面間の摩擦理論 .....	14
2.1	摩擦現象のマルチスケール性 .....	15
2.2	ゴムの粘弾性特性 .....	17
2.3	Persson の摩擦理論 .....	19
2.3.1	接触理論 .....	19
2.3.2	すべり摩擦 .....	28
2.3.3	定常すべり状態におけるゴムの温度上昇 .....	34
3	摩擦試験 .....	39
3.1	路面サンプルの表面粗さパワースペクトル .....	40
3.1.1	路面サンプル .....	40
3.1.2	表面高さデータの計測 .....	41
3.1.3	表面粗さパワースペクトルの計算 .....	42
3.2	ゴムサンプル .....	45
3.3	摩擦試験機選定 .....	48
3.4	ピンオンディスク型摩擦試験 .....	49
3.4.1	試験概要 .....	49
3.4.2	試験結果 .....	51
3.5	直動型摩擦試験 .....	53
3.5.1	試験概要 .....	53
3.5.2	試験結果 .....	55
4	摩擦係数予測 .....	58
4.1	Persson の摩擦モデルのカットオフ波数 $q_1$ 依存性 .....	59
4.1.1	計算条件 .....	59
4.1.2	計算結果 .....	61
4.2	Flash Temperature が摩擦係数に与える影響 .....	63
4.2.1	計算条件 .....	64
4.2.2	計算結果 (Flash Temperature を考慮しないモデル) .....	67
4.2.3	計算結果 (Flash Temperature を考慮したモデル) .....	69
4.2.4	考察 .....	71
5	結論と今後の展望 .....	74

5.1	本研究における結論.....	75
5.2	今後の展望.....	76
付録 A	摩擦試験(直動型)の各走データ.....	77
付録 B	路面 B のスティックスリップ現象.....	79
付録 C	マクロな路面凹凸の摩擦係数に対する寄与.....	83
	謝辞.....	87
	参考文献.....	88

---

## 図目次

---

Fig. 1-1	タイヤ開発シミュレーション(株式会社ブリヂストン提供).	10
Fig. 2-1	セルフアフィンフラクタル表面のパワースペクトルと波数の関係.	16
Fig. 2-2	(a) Voigt・Kelvin モデル, (b)Maxwell モデル.	18
Fig. 2-3	Generalized Maxwell モデル.	18
Fig. 2-4	接触領域のマルチスケール性.	19
Fig. 2-5	摩擦による散逸エネルギー (マクロ).	29
Fig. 2-6	摩擦による散逸エネルギー (ミクロ).	29
Fig. 2-7	低波数凹凸におけるゴム片のすべり.	36
Fig. 3-1	セーフティーウォーク タイプ B(左) と コンテニューア(右).	40
Fig. 3-2	レーザー顕微鏡.	41
Fig. 3-3	表面粗さパワースペクトル(路面 A).	43
Fig. 3-4	表面粗さパワースペクトル(路面 B).	43
Fig. 3-5	円形サンプルゴム(左) と 正方形サンプルゴム(右).	45
Fig. 3-6	複素弾性率.	47
Fig. 3-7	FPR-2000(SSTL HP <a href="http://www.sstl.t.u-tokyo.ac.jp/">http://www.sstl.t.u-tokyo.ac.jp/</a> より).	49
Fig. 3-8	FPR-2000 摩擦試験結果(路面 A).	52
Fig. 3-9	FPR-2000 摩擦試験結果(路面 B).	52
Fig. 3-10	TL201Ts(トリニティーラボ社 HP <a href="http://www.trinity-lab.com/TL201.htm">http://www.trinity-lab.com/TL201.htm</a> より).	53
Fig. 3-11	直動型 試験結果(路面 A).	56
Fig. 3-12	直動型 試験結果(路面 B).	56
Fig. 3-13	ピンオンディスク型と直動型の比較(路面 A).	57
Fig. 3-14	ピンオンディスク型と直動型の比較(路面 B).	57
Fig. 4-1	様々な最大倍率における摩擦係数の計算結果(路面 A).	62
Fig. 4-2	様々な最大倍率における摩擦係数の計算結果(路面 B).	62
Fig. 4-3	最大倍率計算のアルゴリズム.	66
Fig. 4-4	Flash Temperature を考慮しない場合の摩擦係数の計算結果.	68
Fig. 4-5	Flash Temperature を考慮した場合の摩擦係数の計算結果.	69
Fig. 4-6	カットオフ波数スケールでのゴム温度の計算結果.	70
Fig. 4-7	$v = 0.01 \text{ m/s}$ におけるスケール毎のゴム温度( $q_0 \leq q \leq q_1$ ).	70
Fig. 4-8	表面粗さパワースペクトル(路面 A).	73
Fig. A-1	各走データ(路面 A).	78
Fig. A-2	各走データ(路面 C).	78
Fig. B-1	直動型 試験結果(路面 B).	81
Fig. B-2	サンプリングデータ(0.2mm/s).	81
Fig. B-3	サンプリングデータ(5.0mm/s).	82

Fig. C-1 路面 C の表面画像. ....	84
Fig. C-2 直動型 試験結果(路面 C). ....	85
Fig. C-3 路面 A と路面 C のパワースペクトル比較. ....	85
Fig. C-4 路面 A と路面 C の試験結果比較. ....	86

---

## 表目次

---

Table 3-1 計測条件. ....	41
Table 3-2 路面サンプルの特性. ....	44
Table 3-3 ゴム試験片の材料特性. ....	45
Table 3-4 試験条件(ピンオンディスク型摩擦試験機). ....	50
Table 3-5 試験条件(直動型摩擦試験機). ....	54
Table 4-1 摩擦係数の計算条件. ....	60
Table 4-2 最大倍率と最小波数の関係. ....	61
Table 4-3 Flash Temperature を考慮する場合と考慮しない場合の計算条件. ....	65
Table B-1 摩擦係数の極大値と摩擦係数の平均値との比較(路面 B). ....	82
Table C-1 路面 C の試験条件(直動型摩擦試験機). ....	84

---

# 1 序論

---

## 1.1 研究の背景

車両を動かす上で必要な機械要素は多く存在するが、その中でもタイヤは唯一路面に接して車体を支える重要な要素であり車両の性能を大きく左右する。タイヤの摩擦係数は路面の表面特性やゴムの粘弾性特性などによって定められ、すべり速度に依存することが一般的に知られている[1]。このようにタイヤの摩擦現象は様々な因子に依存しており、モデル化は容易ではない。

タイヤの摩擦現象を複雑にしている大きな要因として、路面粗さのマルチスケール性が挙げられる。従来単一のスケールで見た粗さのみを考慮した路面モデルが使われてきた[2]が、実際には路面粗さは様々なスケールで存在している。そのため、タイヤ-路面間の摩擦係数を正確に推定するためには、路面粗さのマルチスケール性を考慮したモデルが必要なのである。

タイヤゴムの摩擦現象を複雑にしているもう一つの要因として、ゴムの粘弾性特性が挙げられる。粘弾性特性においては、その原理の解明や変形挙動の正確な表現を目指し様々な研究が行われている[3][4]。バネ・ダンパモデルによりゴムの粘弾性特性を表現する手法もその一つである。タイヤ-路面間の摩擦係数を正確に推定するためには、粘弾性を考慮することも大変重要である。

このように、タイヤ-路面間の摩擦現象を正確に表現し、摩擦係数を予測することは困難である。しかし、企業においてタイヤゴムの設計をする際、シミュレーション(Fig. 1-1 参照)は不可欠なものになっており、当然そこでは摩擦係数の設定が重要な問題となっている。そのため、タイヤ開発において摩擦係数はゴムと路面の組み合わせごとに摩擦実験を行うことによって得られているが、実験には莫大な時間とコストを要する。よってタイヤ開発におけるコスト削減と開発時間の短縮のためには、摩擦現象を正確に記述し、様々な条件下での摩擦係数を理論的に求めることができるモデルの構築が急務となっている。

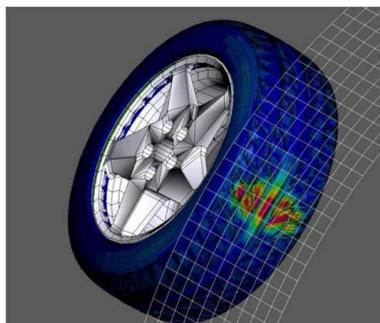


Fig. 1-1 タイヤ開発シミュレーション(株式会社ブリヂストン提供).

## 1.2 従来の研究

Amonton の法則[5]により 2 個体間のマクロの摩擦力  $F_f$  は荷重  $L$  に比例し,  $F_f = \mu L$  を満たす. ここで,  $\mu$  はマクロな摩擦係数であり,  $F_f$  は見かけの接触面積に依らない. その後, 真実接触面積の考察[6]から, 摩擦力が真実接触面積に比例することが示された. これまでに, 様々な滑らかな表面に対して, 摩擦特性を明らかにするための実験やシミュレーションが行われてきた[7].

しかし, ゴムのような超弾性体は複雑な表面凹凸に対しスケールに跨って追従しながら接触する. このため, 滑らかな表面に対する摩擦理論をゴムの摩擦に適用するのは難しい. その摩擦特性の違いは, 広い周波数帯域で見られるゴムの非常に低い弾性率と大きい内部摩擦に起因している. ゴムの内部摩擦に起因する摩擦力を評価するためには, 表面の粗さによるゴムの変形を考えなければならない. そこで, Persson は単一の粗さを持つ理想化された表面に対するゴムの摩擦理論を構築した[8][9]. その後, Persson は実際の路面が不規則に粗い表面を持つことに着目し, 様々なスケールの路面表面粗さを考慮したゴム摩擦モデルを提案した[10][11]. この摩擦モデルによって, 路面表面粗さパワースペクトルとゴムの粘弾性特性からゴム-路面間の摩擦係数を計算することができる. さらに Persson は摩擦によるゴムの局所温度上昇(Flash Temperature)を取り入れ, より正確なモデル作成を試みた[12]. また, 表面間の凝着力についても接触理論に基づいた評価を行った[13][14]が, 路面の粗さにおいては凝着の効果はほぼ無視できるとして摩擦モデルに凝着の効果は取り入れられていない.

上記のように, Persson の摩擦理論は, タイヤゴム-路面間の摩擦係数を予測するにあたって有効な手段であると考えられる. しかし, Persson の理論ではどれだけ小さなスケールまで考慮するかについての考察が不足している.

このことから, 熊沢らは, Persson の理論に加え, ゴムの弾性限界を考慮することで, 計算スケールの決定を試みた[15]. 上記研究では, 得られたスケール範囲を使って摩擦係数を計算し, 摩擦試験によって測定した実験値との比較を行ったが, 測定した速度範囲において, 摩擦係数の実験値は極大点を持つのに対して計算値は単調減少した.

以上のように, タイヤゴム-路面間の摩擦現象を正確に捉えるためには, Persson の理論に計算スケールを決定する手法を追加する必要がある.

### 1.3 研究の目的

本研究の目的は、B.N.J.Persson の摩擦モデルを基に摩擦係数を計算し、摩擦試験値と比較することで、タイヤゴム-路面間の摩擦における Flash Temperature の影響を考察することである。

具体的には、Flash Temperature の影響が大きいすべり速度と小さいすべり速度で摩擦試験を行う。次に、路面のさまざまなスケールの粗さを考慮した B.N.J.Persson の摩擦モデルを基に、実際の路面粗さデータや粘弾性データを用いた計算を行うことで摩擦係数を計算する。その際、実験で得た摩擦係数を基に考慮する最小スケールを決定する手法や、Flash Temperature を考慮したモデルを導入することによって、実際の実験と対応した実用上有効な摩擦係数の計算方法の提案を目指す。

## 1.4 本論文の構成

本論文の構成を示す.

### 第1章「序論」

本研究の背景, 従来の研究, 研究の目的について述べる.

### 第2章「タイヤ-路面間の摩擦理論」

タイヤ-路面間の摩擦について, 概要を述べ, 本研究で用いる Persson の接触理論・摩擦理論, 本研究における摩擦理論について説明する.

### 第3章「摩擦試験」

すべり速度・路面条件を変えて行った摩擦試験と使用したサンプルについて述べる.

### 第4章「摩擦係数予測」

本摩擦理論による計算結果を示し, 実験値と比較して考察を加える.

### 第5章「結論と今後の展望」

本研究における結論と今後の展望を述べる.

---

## 2 タイヤ-路面間の摩擦理論

---

## 2.1 摩擦現象のマルチスケール性

路面表面の凹凸はあらゆるスケールで存在する．例えば，あるスケールで見た凹凸の表面を拡大すると，さらに小さい凹凸が存在することがわかる．Persson はあらゆるスケールの凹凸による摩擦力を考慮することで，ゴム-路面間における摩擦理論を構築した．本節では，Persson の摩擦理論を説明する上で不可欠な，表面粗さパワースペクトルとセルフアフィンフラクタル表面について解説する．

表面に様々なスケールの凹凸が存在するとき，その特性を表現するために表面粗さパワースペクトルを用いられる．ここで一般的に表面粗さパワースペクトル  $C(q)$  は以下のように定義される．

$$C(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x \langle h(\mathbf{x})h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.1)$$

ここで， $h(\mathbf{x})$  は位置  $\mathbf{x} = (x, y)$  における高さプロファイルであり， $\langle \dots \rangle$  はアンサンブル平均を表す．ここでは路面の等方性を仮定しているため，路面表面粗さパワースペクトルは波数ベクトル  $\mathbf{q}$  の絶対値  $|\mathbf{q}| = q$  のみに依存する．また，路面表面の統計的性質は基準位置に依らないと仮定しているため，高さプロファイルの自己相関関数は  $h(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x})h(\mathbf{x}_0) = h(\mathbf{x})h(\mathbf{0})$  となる．つまり，路面表面の高さプロファイルの自己相関関数のアンサンブル平均をフーリエ変換したものが，路面表面粗さパワースペクトルである．路面表面粗さパワースペクトルは，路面凹凸の波数成分ごとの強さを表したものであると表現することもできる．

クラック表面や路面のような自然生成された表面のパワースペクトルをグラフに表すと，Fig. 2-1 のような形状になる．パワースペクトルがこのような形状になる表面をセルフアフィンフラクタル表面という．ここで，セルフアフィンフラクタル性は  $q_0 < q < q_1$  の範囲で見られる． $q_0$  は低波数ロールオフであり，セルフアフィンフラクタル性を示す波数の最小値を示す． $q_1$  は高波数カットオフであり，その波長は分子スケールである．セルフアフィンフラクタル表面とは，表面の観察倍率を上げる際，高さを平面座標とは異なる倍率で表示すると，観察倍率を上げる前の表面と同じ表面プロファイルが見られる表面のことである．具体的には，次のようなスケール変換を考える．

$$x \rightarrow \zeta x, \quad y \rightarrow \zeta y, \quad z \rightarrow \zeta^H z, \quad (2.2)$$

ただし  $\zeta$  は倍率である．このとき，表面の統計的性質が倍率変更前後で変化しない表面がセルフアフィンフラクタル表面である．ここで， $H$  はハースト数であり，フラクタル次元  $D_f$  と， $D_f = 3 - H$  の関係がある．さらに，セルフアフィンフラクタル表面では，

$$C(q) \sim q^{-2(H+1)}, \quad (2.3)$$

の関係が成り立つ.

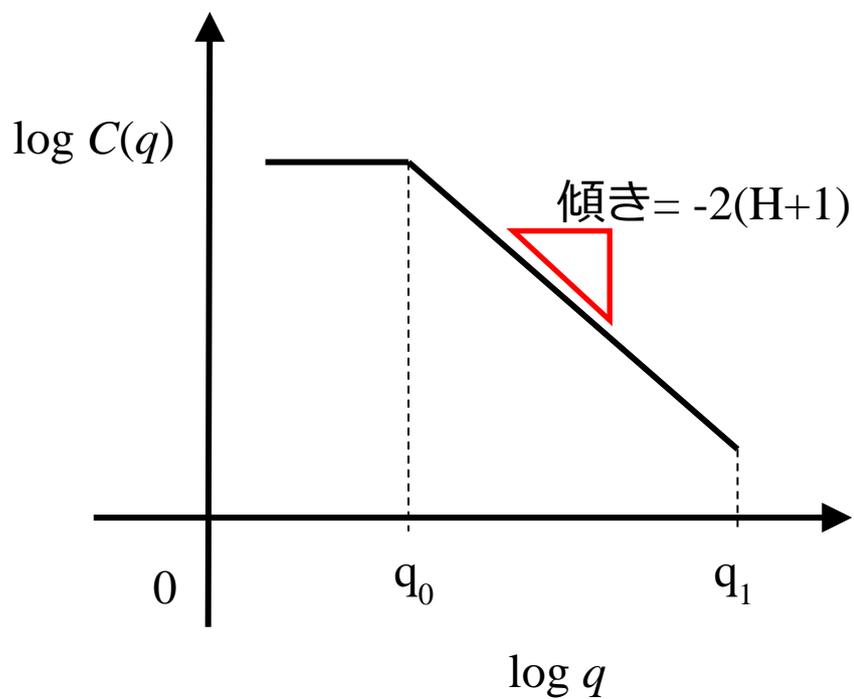


Fig. 2-1 セルフアフィンフラクタル表面のパワースペクトルと波数の関係.

## 2.2 ゴムの粘弾性特性

粘弾性体は非常に速い変形に対しては弾性的な、非常に遅い変形に対しては粘性的な振る舞いを見せる。このような挙動をスプリングとダッシュポットの力学モデルによって表現できれば、数学的に取り扱うことが容易になる。ここで、粘弾性体の典型的な挙動であるクリープと応力緩和を考える。この両挙動を表現するために考案された代表的なモデルが、Voigt・Kelvin モデルと Maxwell モデルである (Fig. 2-2 参照)。

実際の粘弾性体の力学的挙動は複雑であるため、構成要素数を増やして、より正確に挙動を近似することになる。そこで、本研究における粘弾性挙動の表現は Fig. 2-3 に示す一般化 Maxwell モデルを用いる。現在、粘弾性解析ではこの一般化 Maxwell モデルが広く使用されている。一般化 Maxwell モデルの応力緩和式と緩和弾性率はそれぞれ次のように表される。

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sum_{i=1}^n \sigma_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right), \quad (2.4)$$

$$E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^n E_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right), \quad (2.5)$$

ここで、 $\sigma$  は応力、 $E$  はヤング率である。 $\tau$  は緩和時間と呼ばれ、ダッシュポットの粘性係数  $\eta$  を用いて  $\tau = \eta/E$  で与えられる。また、動的変形を与えた場合の複素弾性率は次のように表される。

$$E(\omega) = \frac{\sigma}{\epsilon} = \sum_{i=0}^n \frac{\sigma_i}{\epsilon_i} = E_0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{1}{E_i} + \frac{1}{i\omega\eta_i}} \quad (2.6)$$

ここで、 $E(\omega)$  を、

$$E(\omega) = E' + iE'', \quad (2.7)$$

と表したとき、 $E'$  を貯蔵弾性率、 $E''$  を損失弾性率と呼ぶ。

Persson の摩擦理論では、式(2.7)で得られる複素弾性率を用いて摩擦係数の計算を行う。ただし、ゴムの複素弾性率はひずみ依存性があり、ひずみが小さいときは、応力とひずみは線形性を保つが、ひずみが大きくなると一般的には複素弾性率は低下する傾向にある[16]。そのため、路面凹凸にゴムの変形が追従する場合、そのひずみ量を考慮した複素弾性率を用いる必要がある。

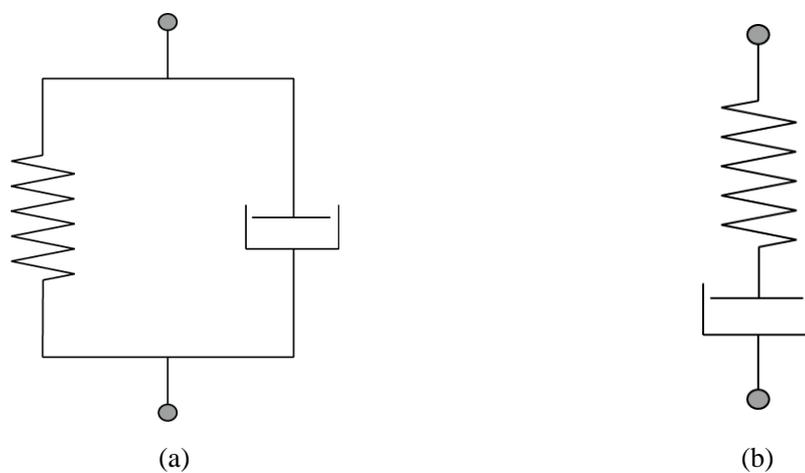


Fig. 2-2 (a) Voigt・Kelvin モデル, (b)Maxwell モデル.

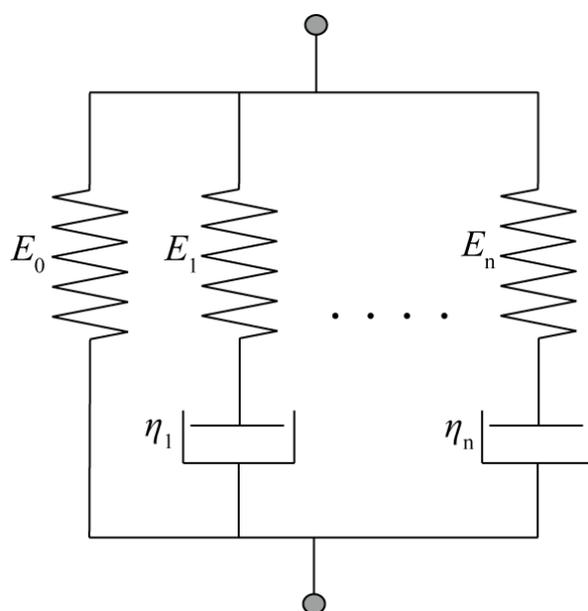


Fig. 2-3 Generalized Maxwell モデル.

## 2.3 Persson の摩擦理論

### 2.3.1 接触理論

本項では Persson の摩擦理論の理解に不可欠な接触理論について解説する。

平らな表面を持つゴムブロックが、粗い路面表面に押しつけられている状態を考える。このとき、見かけ上ゴムの表面全体が路面に接触しているが、観察倍率を上げ、より詳細に見ると、そこには接触部と非接触部が混在している。さらにその接触部を拡大して見ると、その中にも接触部と非接触部が混在している (Fig. 2-4 参照)。このように見かけ上の接触領域は観察倍率によって変化し、最終的な真の接触領域は見かけの接触領域よりも非常に小さくなる。

Persson の摩擦理論においては路面の凹凸を波数空間で表す。つまり、摩擦力を路面の凹凸の波長の大きさごとに求める。波数は観察倍率に対応し、より大きい波数 (より小さい波長) の凹凸ほど観察倍率は大きい。ここで、ある波数の路面凹凸の摩擦力への寄与を考えると、実際にゴムの変形をもたらす、摩擦力に寄与するのは、その波数に対応する観察倍率において、見かけ上ゴムと路面が接触している部分のみである。そこで、波数  $q$  における見かけ上の接触領域の割合  $P(q)$  を考慮することによって、各スケールの凹凸による摩擦力を正しく見積もることが可能となる。 $P(q)$  は次のように定義される。

$$P(q) = \frac{A(\zeta)}{A_0}, \quad (2.8)$$

ここで、 $A_0$  は公称接触領域、 $A(\zeta)$  は倍率  $\zeta$  における見かけ上の接触領域である。また、 $q = q_0 \zeta$ 、 $q_0$  は低波数ロールオフであり、 $q$  が最も小さい波数  $q_0$  の  $\zeta$  倍の波数であるということを示している。本節では、この  $P(q)$  の導出を説明する。

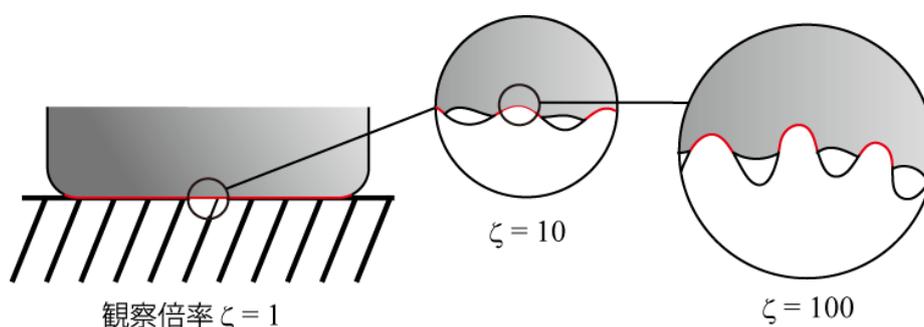


Fig. 2-4 接触領域のマルチスケール性.

ゴムブロックと路面の接触において、 $A_0$ を公称接触領域（倍率 $\zeta=1$ での見かけの接触領域）とすると、全荷重 $F_N$ は次式のように表される。

$$F_N = \sigma_0 A_0,$$

ここで、 $\sigma_0$ は公称垂直応力である。長さスケール $\lambda=L/\zeta$ を考える。ここで、 $L$ は公称接触領域の直径である。 $q_0=2\pi/L$ と定義すると、 $q=q_0\zeta$ より、

$$P(q) = P(q_0\zeta) \equiv P(\zeta).$$

倍率 $\zeta$ における見かけの接触領域の平均垂直応力を $\langle\sigma\rangle_\zeta$ と書けば、全荷重は常に一定であるので、

$$\sigma_0 A_0 = \langle\sigma\rangle_\zeta P(\zeta) A_0.$$

よって、

$$P(\zeta) = \frac{\sigma_0}{\langle\sigma\rangle_\zeta}. \quad (2.9)$$

したがって、 $P(\zeta)$ を求めるためには、まず $\langle\sigma\rangle_\zeta$ を求めなければならない。長さスケール $\lambda=L/\zeta$ での応力の確率分布を $P(\sigma, \zeta)$ と書けば、

$$\langle\sigma\rangle_\zeta = \frac{\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta)}{\int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta)}. \quad (2.10)$$

よって、式(2.3)を式(2.2)に代入して、

$$P(\zeta) = \frac{\sigma_0 \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta)}{\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta)}. \quad (2.11)$$

あるスケールにおいて、見かけ上の接触領域ではゴムと路面は完全に接触していると仮定すると、

$$P(\sigma, \zeta) = \langle\delta(\sigma - \sigma_1(\mathbf{x}))\rangle,$$

ここで、 $\sigma_1(\mathbf{x})$ は倍率 $\zeta$ でかかる垂直応力である。 $\langle\cdots\rangle$ はアンサンブル平均を表し、次式のように定義される。

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{A_0} \int d^2x f(x).$$

$\sigma_1 + \Delta\sigma$ を、長さスケール $L/(\zeta + \Delta\zeta)$ における垂直応力とすると、

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \zeta + \Delta\zeta) &= \langle \delta(\sigma - \sigma_1 - \Delta\sigma) \rangle \\
&= \int d\sigma' \langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \delta(\sigma - \sigma_1 - \sigma') \rangle \\
&= \int d\sigma' \langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle P(\sigma - \sigma', \zeta),
\end{aligned}$$

ここで,

$$\langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dw \langle e^{iw(\sigma' - \Delta\sigma)} \rangle.$$

右辺を  $\Delta\sigma = 0$  の周りでテイラー展開すると,

$$\begin{aligned}
\langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int dw \left\langle e^{iw\sigma'} \left( 1 - iw\Delta\sigma - \frac{w^2}{2} \Delta\sigma^2 + \dots \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dw e^{iw\sigma'} \left( 1 - \frac{w^2 \langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \right),
\end{aligned}$$

ただし, 虚数項と3次以上の微小項は無視した. よって,

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \zeta + \Delta\zeta) &= \int d\sigma' P(\sigma - \sigma', \zeta) \frac{1}{2\pi} \int dw e^{iw\sigma'} \left( 1 - \frac{w^2 \langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \right) \\
&= \int d\sigma' P(\sigma - \sigma', \zeta) \left[ \delta(\sigma') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma'^2} \delta(\sigma') \langle \Delta\sigma^2 \rangle \right] \\
&= P(\sigma, \zeta) + \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2}.
\end{aligned}$$

左辺を  $\Delta\zeta = 0$  の周りでテイラー展開すれば, 次式が得られる. ただし, 2次以上の微小項は無視する.

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \zeta) + \frac{\partial P(\sigma, \zeta)}{\partial \zeta} \Delta\zeta &= P(\sigma, \zeta) + \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial P(\sigma, \zeta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{\Delta\zeta} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}, \quad (2.12)$$

ここで,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{\Delta\zeta}.$$

$P(\sigma, 1) = P_0(\sigma)$ とおくと,

$$P_0(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0).$$

式(2.5)は拡散型の方程式である. 一般的な拡散方程式における時間項は倍率 $\zeta$ に, 空間座標は垂直応力 $\sigma$ に置き換えられている. よって, 倍率 $\zeta$ を上げていく(より小さいスケールを見ていく)と,  $P(\sigma, \zeta)$ は $\sigma$ 空間でより広がっていく. 表面間の凝着は無いという仮定では,  $\sigma = 0$ で剥離が起こるので, 境界条件は次のようになる.

$$P(0, \zeta) = 0.$$

式(2.5)の両辺に $\sigma$ をかけて,  $\sigma$ にわたって積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\sigma \sigma \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \int_0^\infty d\sigma \sigma f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta) = 0.$$

$\zeta$ で積分して,

$$\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta) = \sigma_0, \quad (2.13)$$

ただし, 総荷重はあらゆるスケールで不変という仮定を用いた.

次に式(2.5)を $\sigma$ にわたって積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\sigma \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \int_0^\infty d\sigma f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) &= f(\zeta) \left\{ \frac{\partial P(\infty, \zeta)}{\partial \sigma} - \frac{\partial P(0, \zeta)}{\partial \sigma} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) &= -f(\zeta) \frac{\partial P(0, \zeta)}{\partial \sigma}. \end{aligned}$$

$\zeta$ で積分して,

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta') \right]_1^\zeta &= - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} \\ \Leftrightarrow \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) - \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, 1) &= - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} \\ \Leftrightarrow \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) &= 1 - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

式(2.11)に式(2.13)と式(2.14)を代入して,

$$P(\zeta) = 1 - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma}. \quad (2.15)$$

次に,  $\langle \Delta \sigma^2 \rangle$  を計算する.

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^2 \rangle &= \frac{1}{A_0} \int d^2x \sigma_z(\mathbf{x}) \sigma_z(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{A_0} \int d^2x \sigma_z(\mathbf{x}) \int d^2q \sigma_z(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2q \sigma_z(-\mathbf{q}) \sigma_z(\mathbf{q}) \\ &= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} \frac{(2\pi)^2}{A_0} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ u_z(\mathbf{q}) &\rightarrow h(\mathbf{q}) \text{ とすれば,} \\ &= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} \frac{(2\pi)^2}{A_0} \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle \\ &= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} C(q), \end{aligned}$$

ここで,  $M_{zz}$  は次式で表される.

$$(M_{zz})^{-1} = -\frac{Eq}{2(1-\nu^2)}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^2 \rangle &= \frac{1}{4} \int d^2q q^2 C(q) \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{1-\nu^2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \int dq q^3 C(q) \int d\phi \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{1-\nu^2} \right|^2. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta \sigma^2 \rangle}{\Delta \zeta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta \sigma^2 \rangle}{\Delta q} q_0 \quad (\because q = q_0 \zeta) \\ &= \frac{1}{8} q_0 q^3 C(q) \int d\phi \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{1-\nu^2} \right|^2. \end{aligned}$$

新たに  $f(\zeta) = f(q)$  と置き,  $g(q) = f(q)/\sigma_0^2$  とすると,

$$g(q) = \frac{1}{8} q_0 q^3 C(q) \int d\phi \left| \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-v^2)\sigma_0} \right|^2. \quad (2.16)$$

ここからは, 式(2.12)を解くことを考える. 式(2.12)を再掲すると,

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}. \quad (2.12)$$

境界条件は,

$$P(0, \zeta) = P(\sigma_Y, \zeta) = 0, \quad (2.17)$$

$$P(\sigma, 1) \equiv P_0(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0). \quad (2.18)$$

ここでは, 一般的な条件を設定し,  $P(\sigma, \zeta)$  は  $0 < \sigma < \sigma_Y$  でのみ定義されるとした. 後に,  $\sigma_Y \rightarrow \infty$  とすることで最終的な解を導く. 式(2.12)の一般解は次のように表される.

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta) \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right). \quad (2.19)$$

式(2.19)を式(2.12)に代入して,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial A_n}{\partial \zeta} \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -f(\zeta) \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 A_n \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right) \right] \\ \Leftrightarrow \frac{dA_n}{d\zeta} &= -f(\zeta) \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 A_n. \end{aligned}$$

$\zeta$  で積分して,

$$A_n(\zeta) = C \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta')\right] \quad (C = \text{const.}).$$

$\zeta = 1$  を代入すれば,

$$C = A_n(1).$$

よって,

$$A_n(\zeta) = A_n(1) \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta')\right].$$

式(2.19)に代入して,

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (1) \exp \left[ - \left( \frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right). \quad (2.20)$$

三角関数の直交性より，次の等式が成り立つ．

$$\int_0^{\sigma_Y} d\sigma \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \sin \left( \frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) = \frac{\sigma_Y}{2} \delta_{nm}, \quad (2.21)$$

ここで， $n$ ， $m$  は自然数とする．式(2.12)の両辺に  $\sin(m\pi\sigma/\sigma_Y)$  をかけて， $0 \sim \sigma_Y$  まで積分すると，

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sigma_Y} d\sigma P \sin \left( \frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n (1) \exp \left[ - \left( \frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \int_0^{\sigma_Y} d\sigma \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \sin \left( \frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right). \end{aligned}$$

式(2.21)を用いると，

$$\int_0^{\sigma_Y} d\sigma P \sin \left( \frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) = A_n (1) \exp \left[ - \left( \frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \frac{\sigma_Y}{2}.$$

さらに， $\zeta = 1$  を代入すれば，

$$\begin{aligned} A_n (1) &= \frac{2}{\sigma_Y} \int_0^{\sigma_Y} d\sigma P(\sigma, 1) \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \frac{2}{\sigma_Y} \int_0^{\sigma_Y} d\sigma \delta(\sigma - \sigma_0) \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \frac{2}{\sigma_Y} \sin \alpha_n, \end{aligned} \quad (2.22)$$

ただし，

$$\alpha_n = \frac{n\pi\sigma_0}{\sigma_Y} \equiv s\sigma_0. \quad (2.23)$$

式(2.22)を式(2.20)に代入して，

$$P = \frac{2}{\sigma_Y} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n \exp \left[ - \left( \frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right). \quad (2.24)$$

極限  $\sigma_Y \rightarrow \infty$  をとると，

$$\sum_n \rightarrow \int_0^\infty dn = \frac{\sigma_Y}{\pi} \int_0^\infty ds \quad \left( \because s = \frac{n\pi}{\sigma_Y} \right).$$

よって、式(2.24)は次のようになる.

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \sin(s\sigma_0) \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right] \sin(s\sigma), \quad (2.25)$$

ここで、次に示す  $J$  を考える.

$$J = \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma},$$

ただし、式(2.15)より、 $P(\zeta) = 1 - J$  である. 式(2.25)より、

$$\frac{\partial P(\sigma, \zeta')}{\partial \sigma} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \exp\left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'')\right] \cos(s\sigma).$$

よって、

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \exp\left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'')\right], \quad (2.26)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \exp\left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'')\right] &= \left[ -\frac{1}{s^2} \exp\left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'')\right] \right]_1^\zeta \\ &= \frac{1}{s^2} \left( 1 - \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right] \right). \end{aligned}$$

式(2.26)に代入して、

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \frac{1}{s^2} \left( 1 - \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right] \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right] \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right], \end{aligned}$$

ただし、

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} = 1,$$

という関係式を用いた. よって、

$$\begin{aligned} P(\zeta) &= 1 - J \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right]. \end{aligned}$$

$s\sigma_0 = x$  と置き換えると、

$$P(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \exp\left[-x^2 \int_1^\zeta d\zeta' g(\zeta')\right], \quad (2.27)$$

ただし、 $g(q) = g(q_0 \zeta) \equiv g(\zeta)$  であり、式(2.16)によって与えられる。まとめると、

$$P(q) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \exp\left[-x^2 G(q)\right], \quad (2.28)$$

ただし、式(2.16)より、

$$G(q) = \frac{1}{8} \int_{q_0}^{q_1} dq q^3 C(q) \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-v^2)\sigma_0} \right|^2. \quad (2.29)$$

さらに、ほとんどの場合、 $\sigma_0 \ll E(0)$  であり、この場合  $G(q) \gg 1$  となり、式(2.21)の積分範囲の内  $x \ll 1$  の部分の寄与のみが計算結果に影響する。よって、 $\sin x \approx x$  と近似することができ、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} P(q) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \exp\left[-x^2 G(q)\right] \\ &= \left[\pi G(q)\right]^{-1/2} \quad (\because \text{ガウス積分}). \end{aligned}$$

このとき、 $P(q) \sim \sigma_0$  が成り立つので、2.3.2 項で導出する摩擦係数の式と合わせると、摩擦係数が公称垂直応力  $\sigma_0$  に依存しないことがわかる。さらに、 $G(q) \rightarrow 0$  のとき  $P(q) \rightarrow 1$  を考慮すると、補間公式より、次の近似式が成り立つ。

$$P(q) \simeq \left(1 + \left[\pi G(q)\right]^{3/2}\right)^{-1/3}. \quad (2.30)$$

### 2.3.2 すべり摩擦

本節では Persson の摩擦モデルによる摩擦係数の導出を説明する。  
ゴムブロックが粗い路面上をすべる際の変位場  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  について,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t),$$

と仮定すると,

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2x dt \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t)},$$

ここで,  $\mathbf{x} - \mathbf{v}t = \mathbf{k}$  とおくと,  $\mathbf{v}$  は  $\mathbf{x}$  に依存しないため  $d\mathbf{k}/d\mathbf{x} = 1$  より,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2k dt \mathbf{u}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{k} + i(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v})t} \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}) \mathbf{u}(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Fig. 2-5 より, ゴムと路面間のせん断摩擦力を  $\sigma_f$  とすると, 時間  $t_0$  の間に摩擦によって散逸するエネルギー  $\Delta E$  は,

$$\Delta E = \sigma_f A_0 v t_0. \quad (2.32)$$

また, Fig. 2-6 のように  $\Delta E$  をゴムの変形に使われたエネルギーとして表すと,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int d^2x dt \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int d^2x dt \left[ \frac{d}{dt} \int d^2q d\omega \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int d^2q d\omega (-i\omega) \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) \left[ \int d^2x dt \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \right] \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) \cdot \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{q}, -\omega), \end{aligned} \quad (2.33)$$

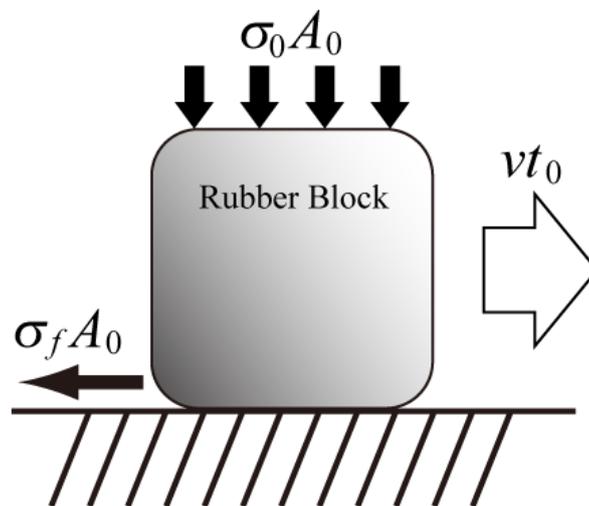


Fig. 2-5 摩擦による散逸エネルギー（マクロ）.

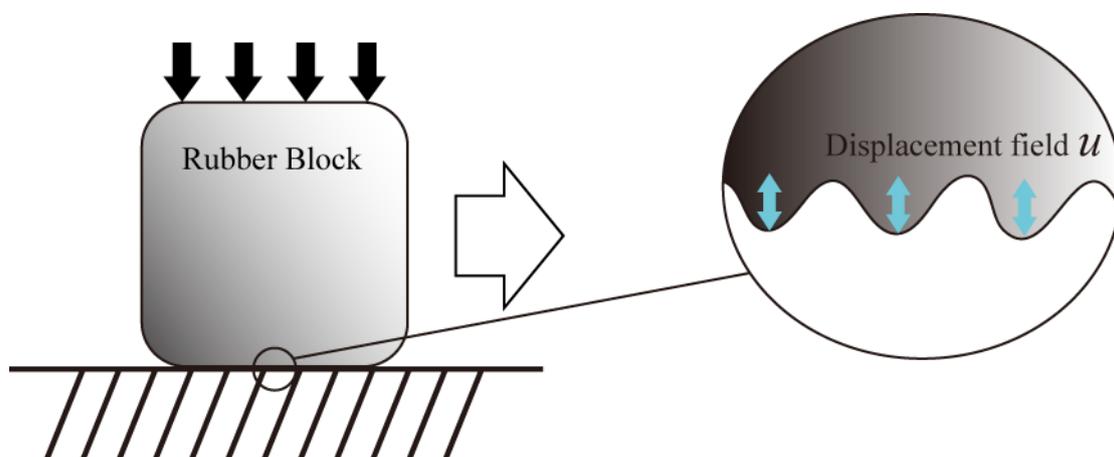


Fig. 2-6 摩擦による散逸エネルギー（ミクロ）.

ここで,

$$u_z(\mathbf{q}, \omega) = M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) \sigma_z(\mathbf{q}, \omega),$$

より,

$$\sigma_z(-\mathbf{q}, -\omega) = [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(-\mathbf{q}, -\omega).$$

式(2.26)に代入して, 式(2.24)を用いると,

$$\begin{aligned} \Delta E &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) u_z(\mathbf{q}, \omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(-\mathbf{q}, -\omega) \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \delta(-\omega + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) [\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})]^2 [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}), \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} [\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})]^2 &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \delta(0) \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} dt \\ &= \frac{t_0}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}), \end{aligned}$$

という関係式を用いると,

$$\begin{aligned} \Delta E &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2q d\omega (-i\omega) \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (2.34)$$

式(2.34)と式(2.32)を比較して,

$$\begin{aligned} \sigma_f A_0 v t &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ \Leftrightarrow \sigma_f &= \frac{(2\pi)^2}{v A_0} \int d^2q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle, \end{aligned} \quad (2.35)$$

ここで,  $\langle \dots \rangle$  はアンサンブル平均を表し,

$$\begin{aligned} \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle &= \frac{1}{A_0} \int d^2x u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}), \end{aligned}$$

という関係を用いた. さらに, ゴムが  $x$  方向にすべるとすれば,  $\omega = vq_x$  と書けるので,

$$\sigma_f = -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle [M_{zz}(-\mathbf{q}, -q_x v)]^{-1}. \quad (2.36)$$

路面の表面プロファイルは次のように記述される.

$$z = h(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} = (x, y)).$$

ゴムが路面上をすべる際, 路面の表面プロファイルに完全に追従するとすれば,

$$u_z = h(\mathbf{x}),$$

と書けるので, 式(2.29)は次のように表される.

$$\sigma_f = -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle [M_{zz}(-\mathbf{q}, -q_x v)]^{-1}. \quad (2.37)$$

今, 路面表面粗さパワースペクトルは次のように定義される.

$$C(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 x \langle h(\mathbf{x}) h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.38)$$

さらに,  $\langle h(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}') \rangle$  が  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  のみに依存することを用いると, 次の関係式が得られる.

$$\langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q). \quad (2.39)$$

式(2.39)と  $M_{zz}$  を式(2.37)に代入すれば,

$$\begin{aligned} \sigma_f &= -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q) \left[ -\frac{2(1-\nu^2)}{E(-\omega)q} \right]^{-1} \\ &= i \frac{1}{2} \int d^2 q q^2 \cos \phi C(q) \frac{E(-\omega)}{1-\nu^2} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2 q q^2 \cos \phi C(q) \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{1-\nu^2}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

$q_x = q \cos \phi$ ,  $E = E(\omega) = E(qv \cos \phi)$  である. 厳密には  $\nu$  も周波数に依存するが, その依存度は無視できるほど小さい. Amontons-Coulomb の法則より, 摩擦係数  $\mu$  を  $\mu = \sigma_f / \sigma_0$  と定義すると,

$$\mu = \frac{1}{2} \int d^2 q q^2 \cos \phi C(q) P(q) \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0}, \quad (2.41)$$

ここで、2.3.1 項で導出した真実接触領域の割合  $P(q)$  を導入した。さらに、波数空間において直交座標から極座標への座標変換を考えると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} q_x = q \cos \phi \\ q_y = q \sin \phi \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} dq_x = \cos \phi dq - q \sin \phi d\phi \\ dq_y = \sin \phi dq + q \cos \phi d\phi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} dq_x \\ dq_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -q \sin \phi \\ \sin \phi & q \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq \\ d\phi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

右辺の行列のヤコビアン  $|J|$  は、

$$|J| = q \cos^2 \phi + q \sin^2 \phi = q.$$

よって、

$$d^2q = dq_x dq_y = q dq d\phi.$$

したがって、式(2.41)は次のように表される。

$$\mu = \frac{1}{2} \int dq q^3 C(q) P(q) \int_0^{2\phi} d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-v^2) \sigma_0}. \quad (2.42)$$

さらに、路面がセルフアフィンフラクタル性を持つと仮定すると、

$$C(q) \simeq k \left( \frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)} \quad (k = \text{const.}),$$

と表すことができる。  $\langle h^2 \rangle = h_0^2/2$  と定義すると、式(2.38)より、

$$\begin{aligned} \frac{h_0^2}{2} &= 2\pi \int_{q_0}^{q_1} dq q C(q) \\ &= 2\pi \int_{q_0}^{q_1} dq q k \left( \frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)} \\ &= \frac{\pi}{H} q_0^{2(H+1)} k (q_0^{-2H} - q_1^{-2H}), \end{aligned}$$

ここで、  $q_0 \ll q_1$  より、

$$\frac{h_0^2}{2} \simeq \frac{\pi}{H} q_0^2 k.$$

よって、

$$k \approx \frac{H}{2\pi} \left( \frac{h_0}{q_0} \right)^2.$$

したがって,

$$C(q) \approx \frac{H}{2\pi} \left( \frac{h_0}{q_0} \right)^2 \left( \frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)}. \quad (2.43)$$

式(2.43)を式(2.42)に代入して,  $q = q_0 \zeta$  を用いて  $\mu$  を  $\zeta$  で表した近似式は次のようになる.

$$\mu \approx \frac{1}{4\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^{q_1/q_0} d\zeta \zeta^{-2H+1} P(\zeta) \int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi \operatorname{Im} \frac{E(\zeta q_0 \nu \cos\phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0}. \quad (2.44)$$

さらに, 式(2.29)は次のように書きかえられる.

$$G(\zeta) = \frac{1}{16\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^\zeta d\zeta' \zeta'^{-2H+1} \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(q_0 \zeta' \nu \cos\phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0} \right|^2. \quad (2.45)$$

### 2.3.3 定常すべり状態におけるゴムの温度上昇

ゴムブロックの温度場は式(2.46)で定義される。

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D\nabla^2 T = \frac{\dot{Q}(\mathbf{x}, t)}{\rho C_V} \quad (2.46)$$

ここで、 $\dot{Q}$ は内部摩擦による単位時間単位体積当たりの熱生成、 $D(= \lambda/\rho C_V)$ は熱伝導率、 $C_V$ は比熱である。

ゴムが速度 $v$ で滑っているとき、凹凸は $\omega_0 \sim v/d$ の周波数で脈動力を生み出し、 $d^3$ オーダー体積でのエネルギー散逸が起こる。 $v$ が十分に大きい場合、無視できる熱拡散が時間間隔 $d/v$ で起こり、凹凸近傍のゴムの温度上昇は $\Delta T \approx Q/\rho C_V$ 程度となる。但し、 $Q$ は(単位体積の)体積要素 $d^3$ 内の摩擦熱エネルギーの量である。熱拡散の影響が無視できるのは、 $d/v < d^2/D$ のとき、すなわち、有効接触時間が拡散時間よりも小さいときである。この項では基板が様々な長さスケールの粗さを持つ場合の Flash Temperature の影響の理論について記述する。

最初に、表面粗さが単一長さであり、平均二乗粗さ $h_0$ 、スケール $\lambda_0 = 2\pi/q_0$ 、の場合を考える。表面粗さパワースペクトル $C(q) = (h_0^2/2\pi q_0)\delta(q - q_0)$ であり、凹凸の曲率 $R \approx 1/q_0^2 h_0$ である。接触領域の直径のオーダーは $d$ である。それ以下のスケールには凹凸は存在しないと仮定する。距離 $d$ をすべるのに掛かる時間は $d/v$ である。この間、要素体積 $\sim d^3$ で生成される熱エネルギーは $\mu F_N d$ であり、垂直抗力 $F_N = \sigma d^2$ と表現できるので、単位体積当たりの熱生成 $Q = \mu F_N d/d^3 = \mu\sigma$ である。熱拡散を無視すると、温度上昇は $\Delta T \approx Q/\rho C_V \approx \mu\sigma/\rho C_V$ と表される。文献[8]において以下を示している。

$$\mu \approx \sigma \frac{\text{Im}E(\omega_0, T)}{|E(\omega_0, T)|^2} \quad (2.47)$$

但し、 $\omega_0 = vq_0$ である。標準的な接触理論より、 $\sigma = q_0 h_0 |E(\omega_0, T)|$ なので、摩擦係数は、

$$\mu \approx q_0 h_0 \frac{\text{Im}E(\omega_0, T)}{|E(\omega_0, T)|} \quad (2.48)$$

温度(上昇)は、

$$\Delta T \approx (q_0 h_0)^2 \frac{\text{Im}E(\omega_0, T)}{\rho C_V} \quad (2.49)$$

$$T = T_0 + (q_0 h_0)^2 \frac{\text{Im}E(\omega_0, T)}{\rho C_V}$$

但し、 $T_0$ は環境温度である。複素弾性率 $E(\omega, T)$ は温度に依存するので、Williams-Landel-Ferry (WLF) 変換式を用いて、

$$E(\omega, T) = E(\omega a_T/a_{T_0}, T_0) \quad (2.50)$$

但し、

$$\log_{10} a_T \approx -\frac{C_1(T - T_g)}{C_2 + (T - T_g)} \quad (2.51)$$

式(2.48)-(2.51)を使えば、与えられた複素弾性率 $E(\omega, T_0)$ から温度 $T$ の影響を考慮した摩擦係数 $\mu$ が得られる。

Flash Temperature の定量的影響を理解するには、粘弾性係数の一般構造を理解する必要がある。複素弾性率は、低周波側では実部が比較的小さくて、およそ一定値である“ゴムのよう”特性を持っているが、高周波側では、弾性的に硬くなる“ガラスのよう”特性になる。かなりの高周波側では、実部は一定値となるが、低周波側より大きい値になる。中間の周波数帯は“移行領域”になっていて、損失正接が大きくなっている。この領域が路面を滑っている時の摩擦性質を主に決定づけている。

Flash Temperature のゴム摩擦への影響は摂動周波数 $\omega_0$ が、 $\text{Im}E(\omega, T_0)/|E(\omega, T_0)|$ の値が最大値となる周波数 $\omega_1$ よりも、小さいか大きいか依存する。温度上昇は、粘弾性スペクトルを高周波側にシフトさせるので、 $\omega_0 < \omega_1$ の場合、Flash Temperature は摩擦を減少させる。一方で $\omega_0 > \omega_1$ の場合はその逆になる。大抵の場合は $\omega_0 < \omega_1$ なので、Flash Temperature を考慮に入れると摩擦は減少する。これは極めて重要な実践結果でもある。

ここからは、一般的な複雑なマルチスケール表面での定常すべりについて議論する。微小凹凸上で発生した熱の重なりも考慮する。すなわち一つの微小凹凸接触領域で生じた温度上昇が周辺の微小凹凸接触領域の温度上昇に寄与するということである。マクロ凹凸内の微小凹凸での熱の推定に‘平均場’型を使う。

ゴムが様々な長さスケールを持った表面上をすべる場合を考える。基本的な問題の概略図を Fig. 2-7 に示す。Fig. 2-7 では大きい凹凸の中に小さい凹凸が含まれている。環境温度を $T_0$ とすると、大きいスケールでの発熱が小さなスケールを与えるので、 $T_1 = T_0 + \Delta T_1$  ( $d_1$ スケール)で、 $T_2 = T_1 + \Delta T_2$  ( $d_2$ スケール)という具合に、スケールを小さくするに従って温度が上昇すると考えられる。

マクロ凹凸接触領域での平均せん断応力は、以下の式(2.52)になる。

$$\sigma = \sigma_f \frac{A_0}{A(\zeta_m)} \quad (2.52)$$

ここで、 $\sigma_f$ は公称摩擦せん断応力で、 $A(\zeta_m)$ は倍率 $\zeta = \zeta_m = \lambda_0/\lambda_m = q_m/q_0$ におけるマクロ凹凸接触面積である。式(2.42)(2.52)と $P(q) = A(\zeta)/A_0$ の関係を使うと式(2.53)が言える。

$$\sigma_m = \frac{1}{2} \int d^2q q^2 \cos \phi C(q) \frac{P(q)}{P(q_m)} \text{Im} \frac{E(qv \cos \phi, T_q)}{1 - v^2} \quad (2.53)$$

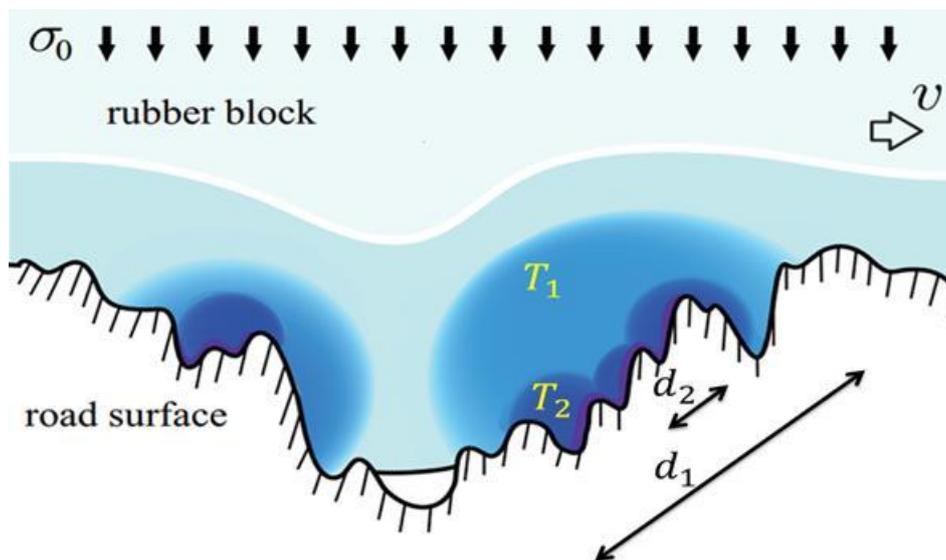


Fig. 2-7 低波数凹凸におけるゴム片のすべり.

ここで、 $T_q$ はスケール $\lambda = 2\pi/q$ における温度である。マクロ接触領域における単位面積、単位時間当たりのエネルギー散逸は式(2.54)になる。

$$J = \frac{v}{2} \int d^2q q^2 \cos \phi C(q) \frac{P(q)}{P(q_m)} \text{Im} \frac{E(qv \cos \phi, T_q)}{1 - v^2} \quad (2.54)$$

スケール $\lambda = 2\pi/q$ の凹凸から生じた単位体積当たりのエネルギーは、崩壊して $e^{-2qz}$ オーダーの固体になるので、単位時間、単位体積当たり生成エネルギーを得るために式(2.54)の被積分関数に掛ける係数は、

$$\frac{e^{-2qz}}{\int_0^\infty dz e^{-2qz}} = 2q e^{-2qz} \quad (2.55)$$

式(2.54)に適用すると、単位体積、単位時間当たりのエネルギー生成は、

$$\dot{Q}(z, t) = \theta(t) \frac{v}{2} \int d^2q 2q^3 \cos \phi C(q) \frac{P(q)}{P(q_m)} \text{Im} \frac{E(qv \cos \phi, T_q)}{1 - v^2} \quad (2.56)$$

ここで、熱生成は $t = 0$ の時に始まるとする。ステップ関数を以下のように記述する。

$$\theta(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int d\omega \frac{1}{\omega + i\epsilon} e^{-i\omega t} \quad (2.57)$$

但し、 $\epsilon$ は微小数である。従って、式(2.58)となる。

$$\frac{\dot{Q}(z, t)}{\rho C_V} = \int_0^\infty dq f(q) \frac{(-1)}{i(2\pi)^2} \int d\omega dk \frac{1}{\omega + i\epsilon} \frac{4q}{k^2 + 4q^2} e^{i(kz - \omega t)} \quad (2.58)$$

ここで、

$$f(q) = \frac{vq^4}{\rho C_V} C(q) \frac{P(q)}{P(q_m)} \int d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi, T_q)}{1 - v^2} \quad (2.59)$$

である。

式(2.59)の温度拡散方程式を解くための境界条件は $z = 0$ において $\partial T / \partial z = 0$ である。すなわちゴムから基板への熱移動を無視するということである。この近似はすべり速度が速い時に特に良い。また、これは $-\infty < z < \infty$ で熱拡散方程式を解くのと同値である。対称性から $e^{-2qz}$ を $e^{-2q|z|}$ として解くと、以下の式(2.60)を得る。

$$T(z, t) = T_0 + \int_0^\infty dq f(q) \times \frac{(-1)}{(2\pi)^2} \int d\omega dk \frac{1}{\omega + iDk^2} \frac{1}{\omega + i\epsilon k^2 + 4q^2} \frac{4q}{k^2 + 4q^2} e^{i(kz - \omega t)} \quad (2.60)$$

$\omega$ の積分を実行して以下を得る。

$$T(z, t) = T_0 + \int_0^\infty dq f(q) \frac{1}{2\pi} \int dk \frac{1}{Dk^2} (1 - e^{-Dk^2 t}) \frac{4q}{k^2 + 4q^2} e^{ikz} \quad (2.61)$$

スケール $\lambda = 2\pi/q$ における温度は下記より得られる。

$$T_q = \frac{\int_0^\infty dz T(z, t) e^{-2qz}}{\int_0^\infty dz e^{-2qz}} \quad (2.62)$$

式(18)を使うと、

$$T_q = T(q) = T_0 + \int_0^\infty dq' g(q, q') f(q') \quad (2.63)$$

ここで、

$$g(q, q') = \frac{1}{\pi} \int dk \frac{1}{Dk^2} (1 - e^{-Dk^2 t_0}) \frac{4q'}{k^2 + 4q'^2} \frac{4q^2}{k^2 + 4q^2} \quad (2.64)$$

但し、 $t_0 \approx R/v$ はゴムがマクロ凹凸接触をしている時間の約半分を表している。 $R$ はマクロ凹凸の接触領域の半径である。

式(2.63)(2.64)より $T_q$ が得られたら、摩擦係数は以下の式から計算できる.

$$\mu \approx \frac{1}{2} \int_{q_0}^{q_1} dq q^3 C(q) P(q) \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi, T_q)}{(1-\nu^2)\sigma_0} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} P(q) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \exp[-x^2 G(q)] \\ &= [\pi G(q)]^{-1/2} \quad (\because \text{ガウス積分}). \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$G(q) = \frac{1}{8} \int_{q_0}^{q_1} dq q^3 C(q) \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0} \right|^2. \quad (2.67)$$

---

## 3 摩擦試験

---

### 3.1 路面サンプルの表面粗さパワースペクトル

#### 3.1.1 路面サンプル

本研究の摩擦試験では、3M 社製すべり止めテープ セーフティーウォーク タイプ B と、MARAZZI 社製屋外用タイル コンテニユアを用いる (Fig. 3-1 参照). 以降, それぞれ路面 A, 路面 B と呼ぶ.



Fig. 3-1 セーフティーウォーク タイプ B(左) と コンテニユア(右).

### 3.1.2 表面高さデータの計測

路面サンプルの表面粗さパワースペクトルを得るため、まず、表面凹凸の高さデータを計測する必要がある。本研究では、Fig. 3-2 に示すレーザー顕微鏡（KEYENCE VK-9500）を用いて計測を行った。また、Table 3-1 に計測条件を示す。ここで、対物レンズは 10 倍と 100 倍の 2 種を用い、計測倍率はそれぞれ 200 倍と 2000 倍となった。2 種の計測倍率を用いたのは、計測倍率によって最終的に得られるパワースペクトルの波数領域に差異が生じ、計測倍率が高い程、高い波数領域のデータが得られるためである。本計測では、2 種の計測倍率により、 $10^3 < q < 10^7$  [1/m] の波数範囲（ $10^{-3} < \lambda < 10^{-7}$  [m] の波長範囲）の表面粗さパワースペクトルを得る。



Fig. 3-2 レーザー顕微鏡.

Table 3-1 計測条件.

Measuring machine	Laser microscope (KEYENCE VK-9500)
Observed area	2.849×2.849 [mm <sup>2</sup> ] (×200)
	0.281×0.281 [mm <sup>2</sup> ] (×2000)
Points	2048×2048

### 3.1.3 表面粗さパワースペクトルの計算

得られた表面高さデータから、路面 A と路面 C のそれぞれの表面粗さパワースペクトルを計算した。路面 A, 路面 B の表面粗さパワースペクトルを、それぞれ Fig. 3-3, Fig. 3-4 に示す。横軸は波数  $q$ 、縦軸は表面粗さパワースペクトル  $C(q)$  である。実表面の表面粗さパワースペクトルにはばらつきが存在するため、 $C(q)$  を求める際、波数  $q$  に対する平均化処理を行った。また、各観測倍率において計測のノイズの影響が出ていると考えられる高波数側のデータはカットした。Fig. 3-3, Fig. 3-4 において、低波数側の 3 点の平均から横軸に並行な 1 本目の直線を生成し、その他の数点のデータから最小 2 乗法を用いて 2 本目の直線を生成する。この 2 直線の交点からロールオフ波数を、2 本目の直線の傾きからハースト数を決定する[17]。

計算結果から、用いた試料の表面粗さパワースペクトルのグラフがほぼ直線で得られ、観察した倍率において、試料表面がセルフアフィンフラクタル性を持つことがわかる。路面 A, 路面 B の表面粗さパワースペクトルから得られた情報を Table 3-2 に示す。 $h_0$  は  $\langle h^2 \rangle = h_0^2/2$  と定義され、路面の平均粗さに対応する。ハースト数  $H$  はグラフの近似直線の傾き  $a$  から、 $a = -2(H+1)$  によって計算する。

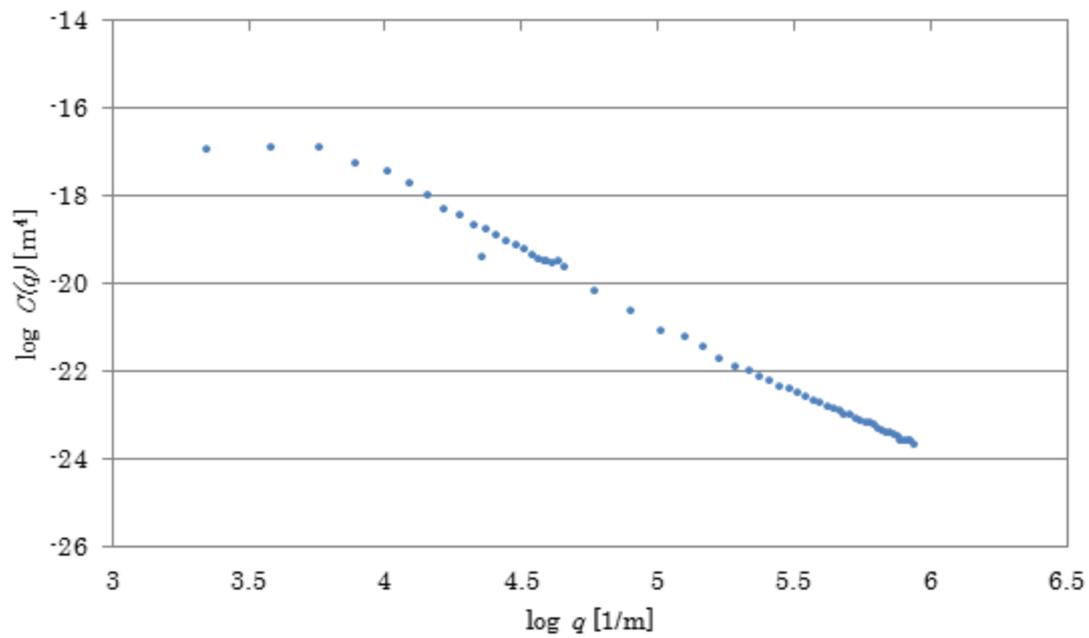


Fig. 3-3 表面粗さパワースペクトル(路面 A).

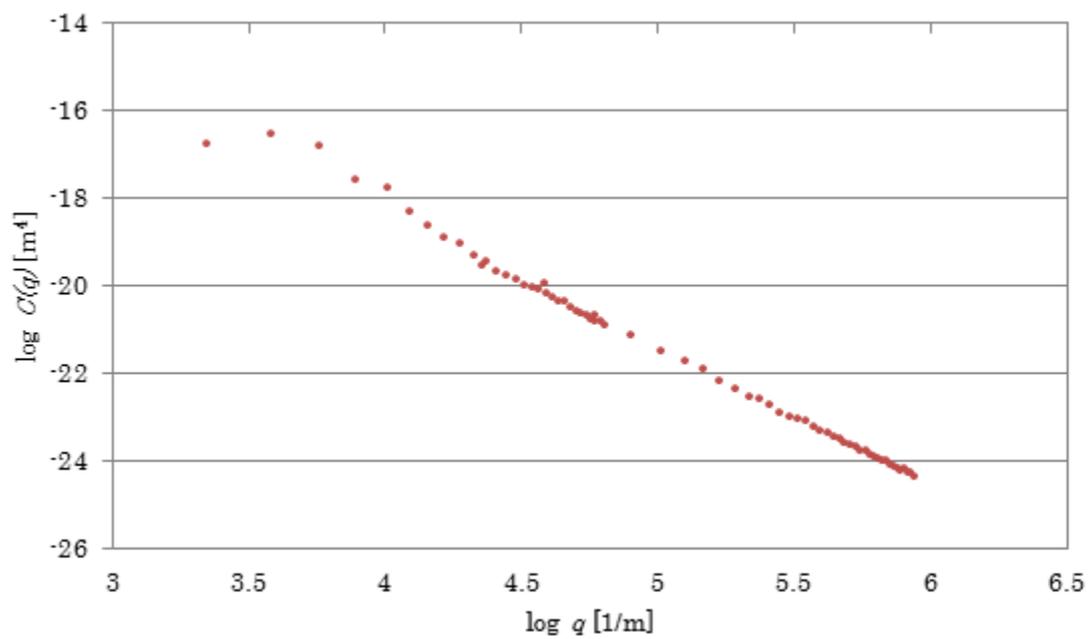


Fig. 3-4 表面粗さパワースペクトル(路面 B).

Table 3-2 路面サンプルの特性.

	路面 A	路面 B
サンプル	セーフティーウォーク B (住友 3M 社)	コンテニユア (MARAZZI 社)
$q_0$ [1/m]	6684.9	3341.7
$h_0$ [ $\mu$ m]	76.5587	62.7752
$H$	0.63069	0.60671

## 3.2 ゴムサンプル

摩擦試験で用いたゴム試験片は Fig. 3-5 に示すサンプルである。ピンオンディスク型摩擦試験機に円形( $\phi 11.8\text{mm} \times 2\text{mm}$ )のものを、直動型摩擦試験機に正方形( $20\text{mm} \times 20\text{mm} \times \text{mm}$ )のものをを用いる。ゴム試験片の配合データを Table 3-3 に示す。ただし、phr はゴム重量 100 に対する各種配合剤の重量部である。

Persson の理論による摩擦係数の計算にはゴム試験片の複素弾性率が必要である。そこで、ゴム試験片の複素弾性率を粘弾性試験によって求め、一般化 Maxwell モデルを用いて表現した。

ゴム試験片用の材料およびその組成情報の提供、粘弾性試験の実施、複素弾性率の一般化 Maxwell モデルへのフィッティングは株式会社ブリヂストンの協力によって行われた。



Fig. 3-5 円形サンプルゴム(左) と 正方形サンプルゴム(右).

Table 3-3 ゴム試験片の材料特性.

Diameter [mm]	40
SBR [phr]	100
Carbon black [phr]	70
Softener [phr]	40
Sulfur [phr]	1.5
Others	Age inhibitor, Rubber accelerator, etc.

Persson の理論による摩擦係数の計算には、ゴム試験片の複素弾性率が必要である。そこで、ゴム試験片の複素弾性率を粘弾性試験によって求めた。得られたデータの変形の周波数帯域は  $1\sim 10^5$  [Hz] である。これは、基本的に摩擦試験において路面凹凸によるゴムの変形周波数をカバーしているが、本研究では温度上昇の影響を考慮しているため、WLF 変換式の影響により低い周波数帯での複素弾性率の値が必要となる。本研究では、 $1\sim 10^2$  [Hz] での実測値を基に、 $0\sim 10^2$  [Hz] での複素弾性率の値を Maxwell モデルとは別にフィッティングした。最終的に使用した複素弾性率の値を Fig. 3-6 に示す。

$1\sim 10^5$  [Hz] の周波数帯域では、貯蔵弾性率、損失弾性率ともに単調に増加するが、より大きい周波数でゴムの貯蔵弾性率は一定になり、損失弾性率はピークを迎えた後、減少に転じることが一般に知られている[19]。

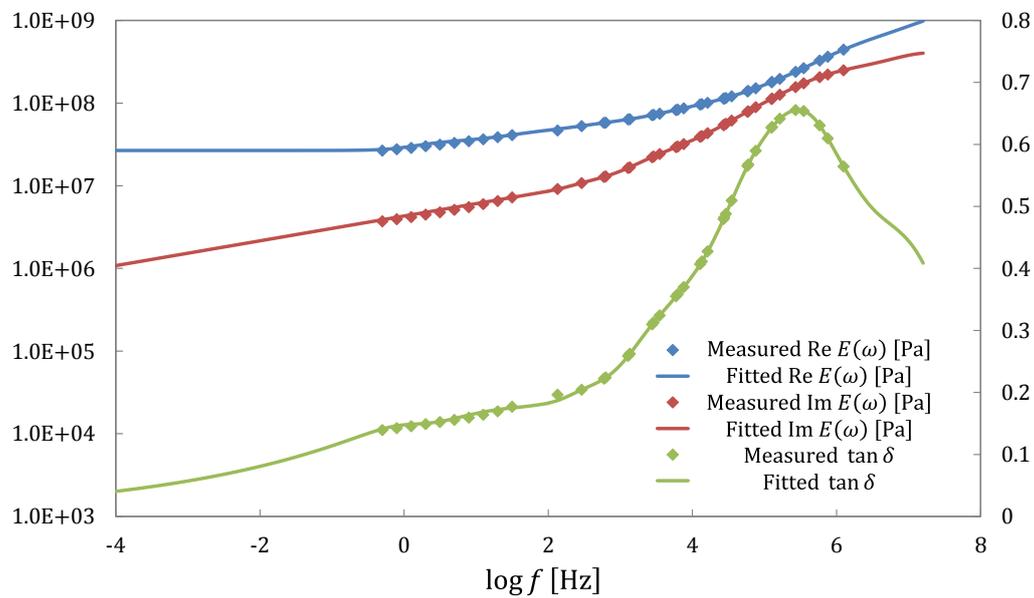


Fig. 3-6 複素弾性率.

### 3.3 摩擦試験機選定

すべり速度が大きくなるほど、摩擦に対するゴムの温度上昇の影響が大きくなる。Persson は実験と理論の比較[18]において、 $v < 1$  [mm/s]の範囲では熱の拡散に十分な時間があり、Flash Temperature の影響は無視できるとした。本研究の摩擦係数予測において、最小すべり速度での摩擦試験結果を用いて合わせ込みを行い、ロールオフ波数を決定する(4.2 節参照)。その際、Flash Temperature の影響を考慮できないため、摩擦試験における最小速度が $v < 1$  [mm/s]であることが望まれる。よって、本研究においては、最小すべり速度 $v = 0.1$  [mm/s]を実現する摩擦試験機を選定した。

## 3.4 ピンオンディスク型摩擦試験

### 3.4.1 試験概要

本項では、ピンオンディスク型摩擦試験機の紹介と、すべり摩擦試験の試験条件について述べる。

本試験は、機械工学科加藤・崔研究室所有の摩擦摩耗試験機 FPR-2000(RHESCA 社 Fig. 3-7 参照)を用いた。FPR-2000 はピンオンディスク型、つまりプラットホームが回転することですべり速度を生み出す方式を取っている。本試験では、プラットホームに路面を設置し、中心から 10mm の位置にサンプルゴムを押し付け、往復すべり試験を行った。試験片として、円形サンプルゴムを用いた。試験条件を Table 3-4 に示す。FPR-2000 は回転数を 0.1 回転刻みでしか指定できない。すべり速度に端数が出ているのは、中心からの距離と回転数によって速度が決まるからである。



Fig. 3-7 FPR-2000(SSTL HP <http://www.sstl.t.u-tokyo.ac.jp/> より).

Table 3-4 試験条件(ピンオンディスク型摩擦試験機).

路面	荷重[g]	往復角[°]	すべり速度[mm/s]	計測時間[秒]	試行回数
A	200	30	0.105	300	3
A	200	30	0.209	300	3
A	200	30	0.314	300	3
A	200	30	0.419	300	3
A	200	30	0.524	300	3
A	200	30	1.097	300	3
A	200	30	1.990	300	3
A	200	30	3.037	300	3
A	200	30	3.979	300	3
A	200	30	5.027	300	3
A	200	30	9.948	300	3
B	200	30	0.105	300	3
B	200	30	0.209	300	3
B	200	30	0.314	300	3
B	200	30	0.419	300	3
B	200	30	0.524	300	3
B	200	30	1.097	300	3
B	200	30	1.990	300	3
B	200	30	3.037	300	3
B	200	30	3.979	300	3
B	200	30	5.027	300	3
B	200	30	9.948	300	3

### 3.4.2 試験結果

路面 A の試験結果を Fig. 3-8 に、路面 B の試験結果を Fig. 3-9 に示す。各すべり速度毎にサンプリングされたデータの標準偏差をとって、エラーバーで示している。すべらせた直後のデータは、計測が安定しなかったため除いた。またデータのばらつきが生じてしまったため、路面・速度に対する摩擦係数の正確な定量評価は難しいが、全体的な傾向や相対比較には有効なデータが得られた。データのばらつきの原因として、回転中心より 10mm の位置に  $\phi 11.8\text{mm}$  のゴムサンプルを設置しているため、サンプルの接地面内で中心からの距離に応じて速度差が生じてしまうことが考えられる。

Fig. 3-8, Fig. 3-9 より、路面 A では  $-4.0 \leq \log v \leq -2.7[\text{m/s}]$ 、路面 C では  $-4.0 \leq \log v \leq -2.4[\text{mm/s}]$  において摩擦係数は増加した。ここで、路面 B の  $-3.5 \leq \log v \leq -3.4[\text{m/s}]$  で摩擦係数は減少しているように見えるが、摩擦係数の減少幅に対するエラーバーの幅が大きいため、 $-3.5 \leq \log v \leq -3.4[\text{m/s}]$  において、摩擦係数が増加から減少に転じたとは言い切れない。

路面 A の  $-2.7 \leq \log v \leq -2.5[\text{m/s}]$  と  $-2.3 \leq \log v \leq -2.0[\text{m/s}]$ 、路面 B の  $-2.4 \leq \log v \leq -2.3[\text{m/s}]$  において、摩擦係数は減少した。本試験では、どの速度域においても摩擦係数は路面 A が路面 B より大きい値を示した。最大値は、路面 A で 1.80、路面 B で 1.38 であった。

## 3 摩擦試験

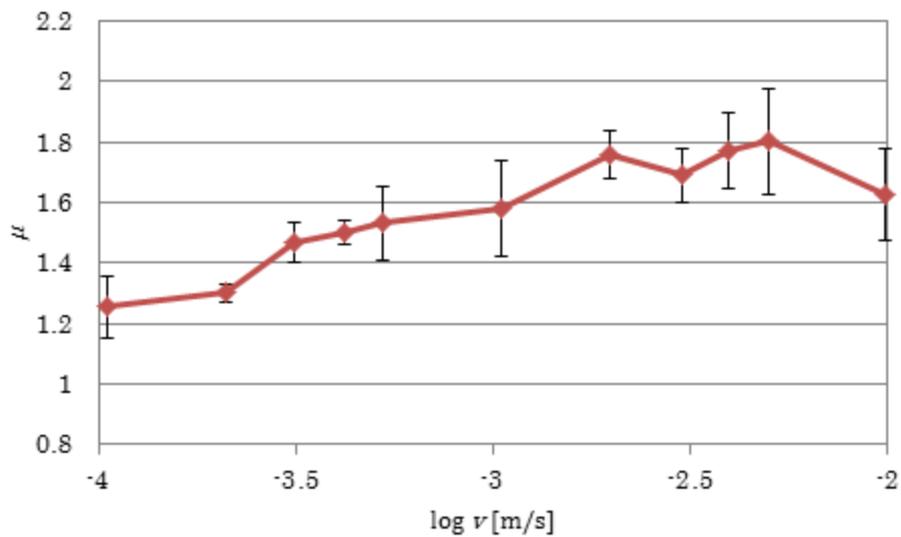


Fig. 3-8 FPR-2000 摩擦試験結果(路面 A).

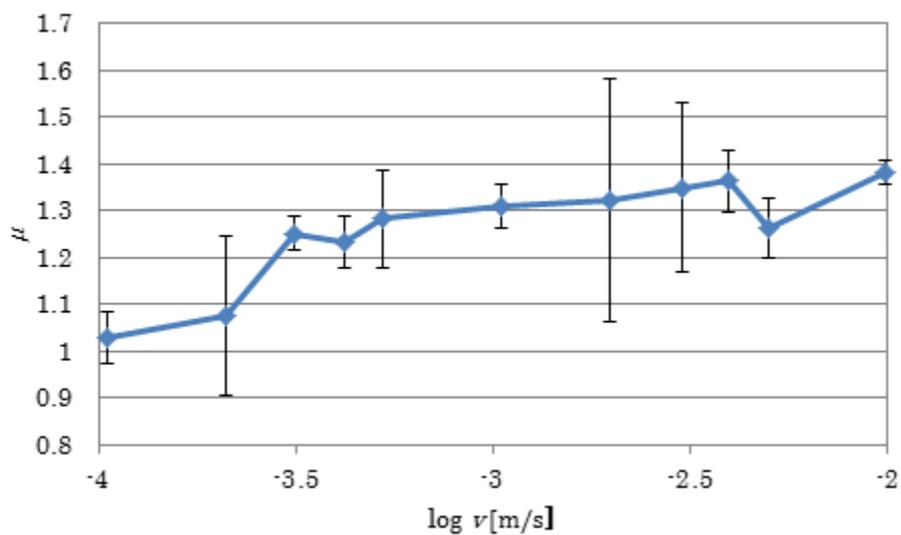


Fig. 3-9 FPR-2000 摩擦試験結果(路面 B).

## 3.5 直動型摩擦試験

### 3.5.1 試験概要

本項では、直動型摩擦試験機の紹介と、試験条件について述べる。

本試験に用いた TL201Ts(Fig. 3-10 参照)はトリニティーラボ社の直動型摩擦試験機である。TL201Ts では、プラットホームが平行移動することですべり速度を生み出す。本試験では、プラットホームに路面を設置し、正方形サンプルゴム(Fig. 3-5 参照)を押し付けた。試験条件を Table 3-5 に示す。サンプリングスピードが 0.01 秒と十分小さいため、移動距離 20mm で十分なデータ点数が確保できた。



Fig. 3-10 TL201Ts(トリニティーラボ社 HP <http://www.trinity-lab.com/TL201.htm> より).

Table 3-5 試験条件(直動型摩擦試験機).

路面	荷重[g]	すべり速度[mm/s]	計測距離[mm]	試行回数
A	100	0.1	20	3
A	100	0.2	20	3
A	100	0.3	20	3
A	100	0.4	20	3
A	100	0.5	20	3
A	100	1.0	20	3
A	100	2.0	20	3
A	100	3.0	20	3
A	100	4.0	20	3
A	100	5.0	20	3
A	100	10.0	20	3
B	100	0.1	20	3
B	100	0.2	20	3
B	100	0.3	20	3
B	100	0.4	20	3
B	100	0.5	20	3
B	100	1.0	20	3
B	100	2.0	20	3
B	100	3.0	20	3
B	100	4.0	20	3
B	100	5.0	20	3
B	100	10.0	20	3

### 3.5.2 試験結果

路面 A の試験結果を Fig. 3-11 に，路面 B の試験結果を Fig. 3-12 に示す．各すべり速度毎にサンプリングされたデータの標準偏差をとって，エラーバーで示している．すべらせた直後のデータは，計測が安定しなかったため除いた．路面 B において， $-2.5 \leq \log v \leq -2.0$ [m/s]ではデータのばらつきが激しく，信頼性の高い結果とは言えない．データのばらつきの原因として，ゴムサンプルと路面間で発生するスティックスリップ現象の影響が考えられる．路面 B におけるスティックスリップ現象については，付録 B にて説明する．またスティックスリップ現象が起きていると考えられる速度域ほどではないが，路面 B のその他の速度域と路面 A でもデータのばらつきが存在する．そのため，路面・速度に対する摩擦係数の正確な評価ができたとは言いがたいが，サンプルの接地面内で速度差が生じてしまうピンオンディスク型の特性を考慮すると，直動型における試験結果のほうがピンオンディスク型における試験結果より信頼性の高いデータが得られたと考えられる．

路面 A，路面 B 両方で  $-4.0 \leq \log v \leq -2.5$ [m/s] において，摩擦係数は増加した．路面 A の  $-3.5 \leq \log v \leq -3.4$  ，路面 B の  $-3.4 \leq \log v \leq -3.3$ [m/s] で摩擦係数は減少しているように見えるが，摩擦係数の減少幅に対するエラーバーの幅が大きいため，摩擦係数が増加から減少に転じたとは言いきれない．

$-4.0 \leq \log v \leq -3.0$ [m/s] において，摩擦係数は，路面 A では 2.2，路面 B では 2.4 上昇した．また，両路面とも  $\log v$  が  $-3$ [m/s] に近づくとつれて，上昇率が緩やかになっている．本試験ではどの速度域でも摩擦係数は常に路面 A が路面 B より大きく，最大値は，路面 A で 1.69 ，路面 B で 1.33 であった．

ピンオンディスク型摩擦試験機と直動型摩擦試験機での計測結果の比較を，路面 A については Fig. 3-13 に，路面 B については Fig. 3-14 にそれぞれ示す．両図とも，青色の線がピンオンディスク型，赤色の線が直動型である．路面 A，路面 B 共に  $-4.0 \leq \log v \leq -3.0$ [m/s] では，どちらの試験機においても摩擦係数は増加している．一方で  $-3.0 \leq \log v \leq -2.0$  [m/s] においては速度依存性に違いが見られる．このことから，低速度域 ( $-4.0 \leq \log v \leq -3.0$ [m/s]) においては，本試験における摩擦係数の測定結果にある程度の信頼性が担保されたものと考えられる．

## 3 摩擦試験

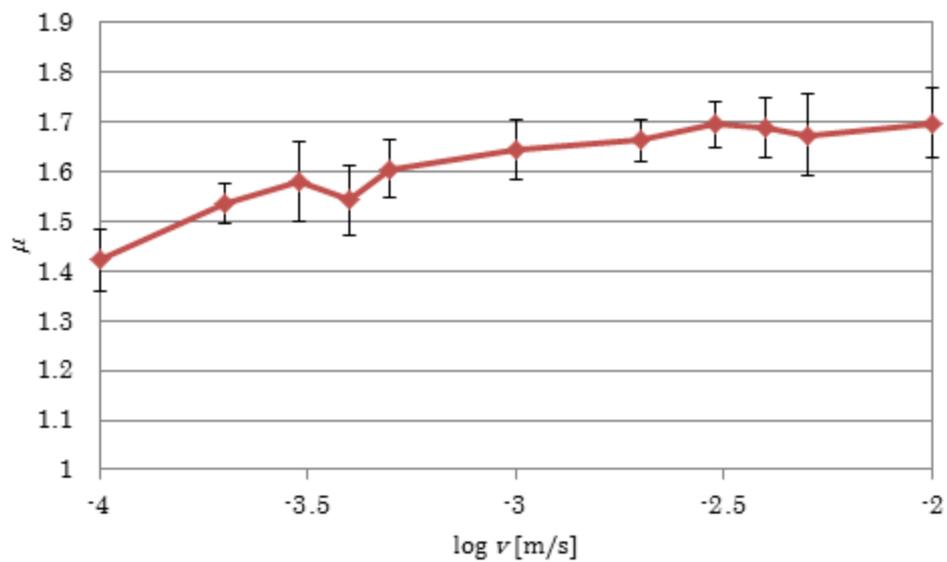


Fig. 3-11 直動型 試験結果(路面 A).

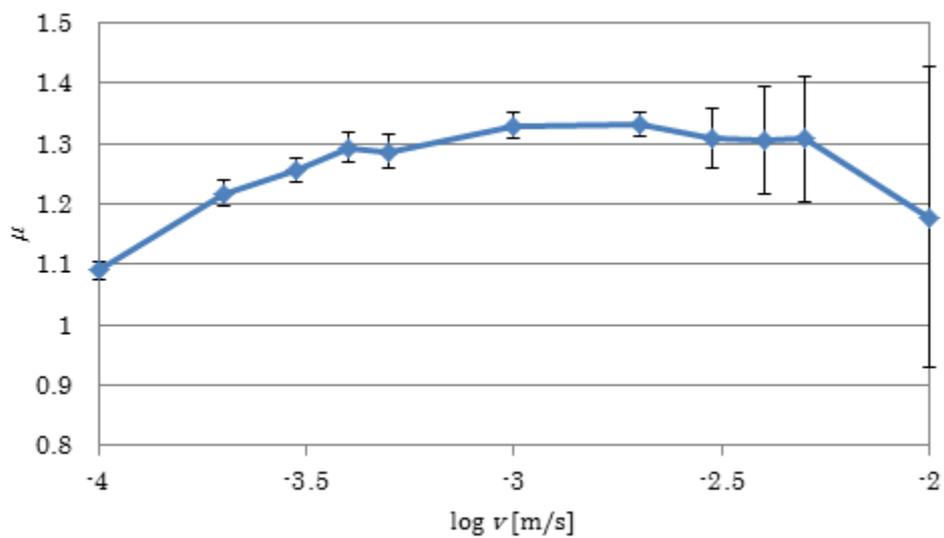


Fig. 3-12 直動型 試験結果(路面 B).

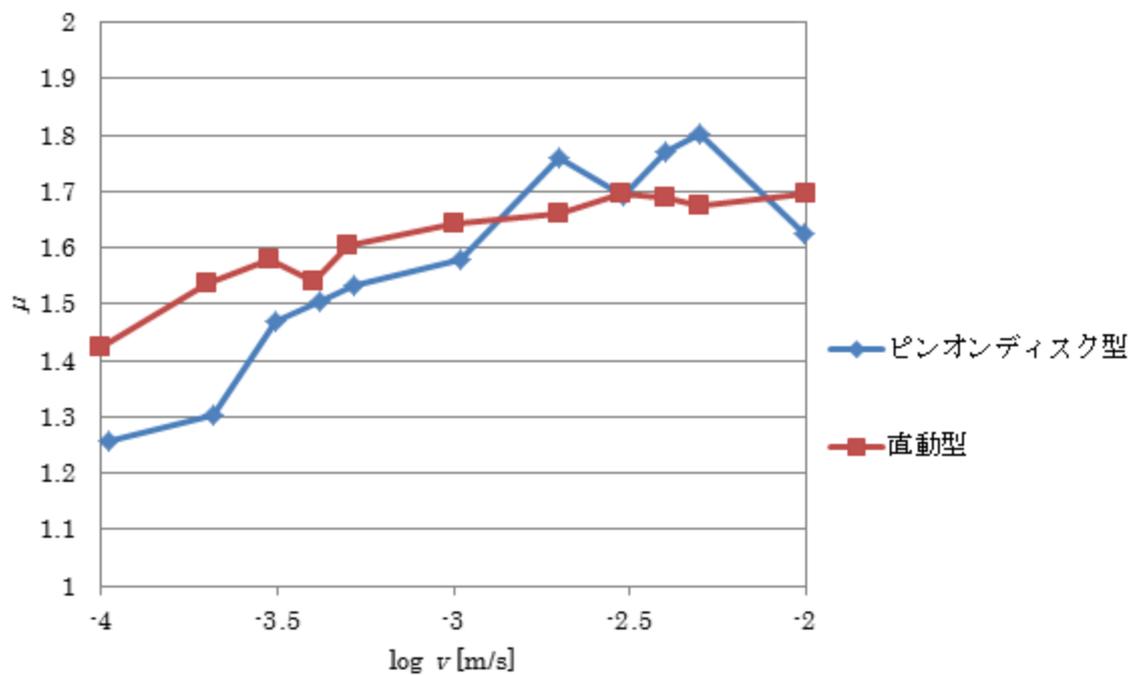


Fig. 3-13 ピンオンディスク型と直動型の比較(路面 A).

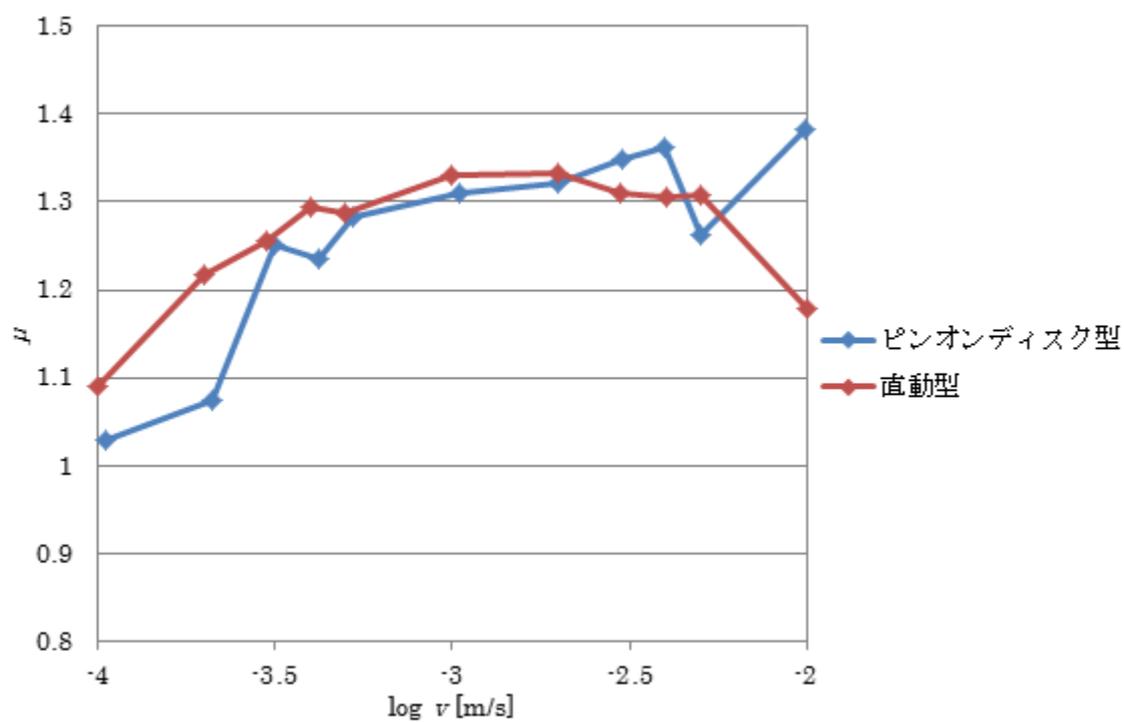


Fig. 3-14 ピンオンディスク型と直動型の比較(路面 B).

---

## 4 摩擦係数予測

---

## 4.1 Persson の摩擦モデルのカットオフ波数 $q_1$ 依存性

### 4.1.1 計算条件

Persson の摩擦理論においては、マイクロ領域の力学的取り扱いについての考察が不足しており、カットオフ波数  $q_1$  の理論的決定法が示されていない。カットオフ波数  $q_1$  の取り方によって摩擦係数の値は大きく変わり得る。そこで、摩擦係数のカットオフ波数  $q_1$  依存性を調べるために、 $q_1 = q_0 \zeta_{\max}$  で定義される  $\zeta_{\max}$  に対するパラメータサーベイを行う。具体的には、 $\zeta_{\max} = 10^{2.0}, 10^{2.4}, 10^{2.8}, 10^{3.2}, 10^{3.6}, 10^{4.0}$  について摩擦係数の計算を行う。尚、本節では Flash Temperature の影響を考慮しない。尚、本節における計算は、文献[20]にて行われたものである。

以下に、摩擦係数の計算に必要な情報をまとめる。また、計算条件を Table 4-1 に示す。

・摩擦係数  $\mu$  の計算式

$$\mu \approx \frac{1}{4\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^{q_1/q_0} d\zeta \zeta^{-2H+1} P(\zeta) \int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi \operatorname{Im} \frac{E(\zeta q_0 v \cos\phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0}, \quad (4.1)$$

ここで、真実接触領域の割合  $P(\zeta)$  は次の式で計算される。

$$P(\zeta) \approx \left(1 + [\pi G(\zeta)]^{3/2}\right)^{-1/3}, \quad (4.2)$$

$$G(\zeta) = \frac{1}{16\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^{\zeta} d\zeta' \zeta'^{-2H+1} \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(q_0 \zeta' v \cos\phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0} \right|^2 \quad (4.3)$$

・すべり速度範囲

本研究の粘弾性試験で得られた複素弾性率の周波数帯域は  $1 \sim 10^5$  [Hz] である。ゴムが路面上をすべる際、路面の波数  $q$  の凹凸から受ける変形周波数  $f$  は  $f = qv/2\pi$  で表されるので、 $f$  の最大値  $f_{\max} = 10^5$  [Hz] に対して、 $v_{\max} = 2\pi f_{\max}/q_1$  で表される速度  $v_{\max}$  が、摩擦係数の計算が可能な速度の最大値である。

$q_1$  に対する感度解析では、 $\zeta_{\max} = 10^{2.0}, 10^{2.4}, 10^{2.8}, 10^{3.2}, 10^{3.6}, 10^{4.0}$  について計算を行うが、ロールオフ波長  $q_0$  が大きい路面 A での  $\zeta_{\max} = 10^{4.0}$  に対応するカットオフ波長は  $q_1 = 6684.93 \times 10^4$  [1/m] なので、計算可能な速度の最大値は  $v_{\max} = 2\pi \times 10^5 / 6684.93 \times 10^4 \approx 0.094$  [m/s] となる。よって、摩擦試験と同じ速度範囲  $10^{-4} \leq v \leq 10^{-2}$  で計算を行うことが可能となる。

Table 4-1 摩擦係数の計算条件.

		Surface A	Surface B
Surface data	$q_0$ [1/m]	6684.93	3341.74
	$h_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	76.5587	62.7752
	$H$	0.630691	0.606717
Rubber data	Viscoelastic property $E(\omega)$ [Pa]	if $\omega < 2\pi \times 10^2$ $\text{Re } E(\omega) = \sum_{i=0}^n E_i$ $\text{Im } E(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{0.15} \times 10^{6.634}$	
		if $\omega \geq 2\pi \times 10^2$ $E_0 + \sum_{i=1}^n \{(1/E_i) + (1/i\omega\eta_i)\}^{-1}$	
	Poisson's ratio $\nu$	0.49	
Normal stress $\sigma_0$ [Pa]		2450.0	
Maximum magnification $\zeta_{\max}$		$10^{2.0}, 10^{2.4}, 10^{2.8}, 10^{3.2}, 10^{3.6}, 10^{4.0}$	
Sliding speed range [m/s]		$1.0 \times 10^{-4} \sim 1.0 \times 10^{-2}$	

接触圧 $\sigma_0$ は摩擦試験に合わせて設定した.

$$\sigma_0 = \frac{mg}{A_0} = \frac{0.1 \text{ [kg]} \times 9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}}{(20.0 \times 10^{-3})^2 \text{ [m}^2\text{]}} = 2450.0 \text{ [Pa]}$$

### 4.1.2 計算結果

Fig. 4-1, Fig. 4-2 にゴム試験片の路面 A, 路面 B それぞれの特性を用いて摩擦係数を計算した結果を示す.  $\zeta_{\max} = 10^{2.0}, 10^{2.4}, 10^{2.8}, 10^{3.2}, 10^{3.6}, 10^{4.0}$  とそれぞれ設定して計算した. また, Table 4-2 にそれぞれの  $\zeta_{\max}$  に対応する波長  $\lambda_{\min} = 2\pi/q_0\zeta_{\max}$  を示す.  $\lambda_{\min}$  は考慮する路面凹凸の最小波長を意味する.

Fig. 4-1 および Fig. 4-2 より, 最大倍率  $\zeta_{\max}$  の増加に伴って摩擦係数が増大している. Persson の摩擦モデルでは, 路面特性によって多少の差はあるものの, 摩擦係数のカットオフ波数  $q_1 (= q_0\zeta_{\max})$  の依存性が強いことがわかる.

一般的に, 吸着膜や潤滑剤などの存在しない比較的清浄な表面同士の摩擦 (乾燥摩擦) の摩擦係数は 0.5~1.5 程度である[21].  $v=10^{-3}$  [m/s] 以上ではゴムの温度上昇と摩耗の影響が出ることを考慮すると[18], 路面 A では  $\zeta_{\max} = 1000 \sim 1500$  程度の計算結果が, 路面 B では  $\zeta_{\max} = 2000 \sim 5000$  程度の計算結果が, 摩擦係数として妥当な値を与える. また, Persson は摩擦係数の数値計算において, 観察された最小の摩耗粒子の大きさからカットオフ波数  $q_1 = 5 \times 10^6$  [1/m] とした[21]が, これは本摩擦モデルの計算において, 路面 A では  $\zeta_{\max} = 747.9$  に対応し, 路面 B では  $\zeta_{\max} = 1496.22$  に対応する. これらの値は上述の  $\zeta_{\max}$  の値と比較して小さく, Persson のカットオフ波数を用いると, 一般的な摩擦係数の値[17]よりも小さい値を見積もってしまう可能性が高い.

Table 4-2 最大倍率と最小波数の関係.

$\zeta_{\max}$	Surf. A, $\lambda_{\min}$ [ $\mu\text{m}$ ]	Surf. B, $\lambda_{\min}$ [ $\mu\text{m}$ ]
$10^{2.0}$	9.39	18.8
$10^{2.4}$	5.93	11.8
$10^{2.8}$	3.74	7.48
$10^{3.2}$	2.36	4.72
$10^{3.6}$	1.48	2.97
$10^{4.0}$	0.939	1.88

## 4 摩擦係数予測

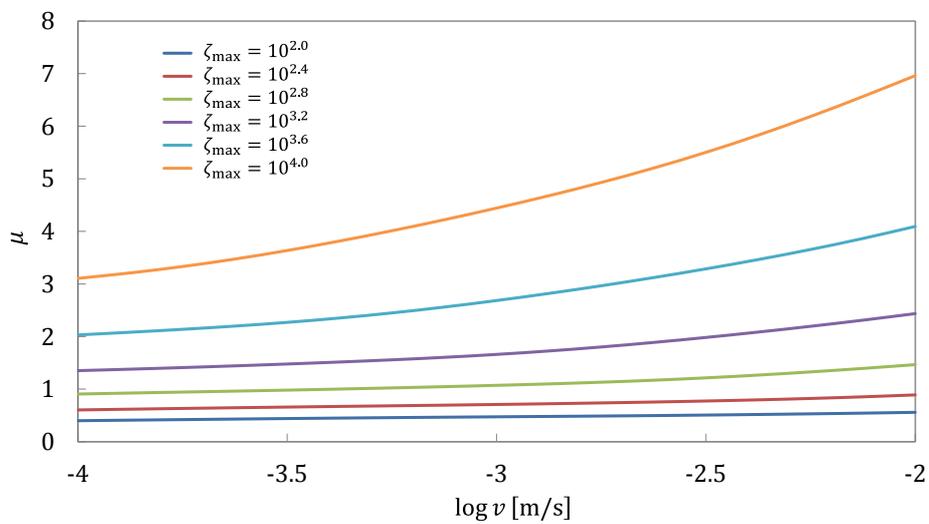


Fig. 4-1 様々な最大倍率における摩擦係数の計算結果(路面 A).

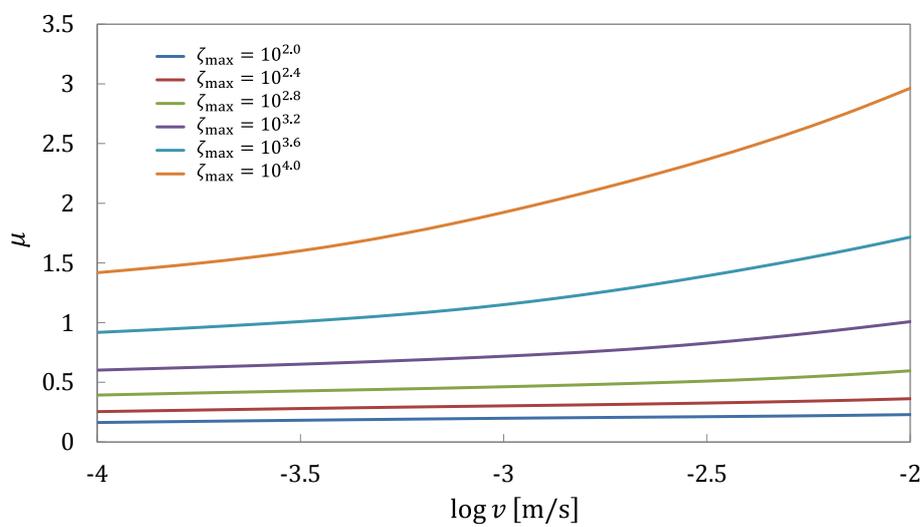


Fig. 4-2 様々な最大倍率における摩擦係数の計算結果(路面 B).

## 4.2 Flash Temperature が摩擦係数に与える影響

本節では第3章に記述した摩擦試験の結果を基に $q_1$ を決定し、Flash Temperature を考慮したモデルと考慮しないモデルの計算結果比較を行い、Flash Temperature がゴム摩擦係数に与える影響について考察する。尚、本節の計算は、文献[20]にて行われたものである。

### 4.2.1 計算条件

解析における計算条件を Table 4-3 にまとめる. 基本的に前節と同条件であるが, ゴムの温度計算に必要な情報を追加している. 本モデルにおいてカットオフ波数 $q_1$ の関数である摩擦係数 $\mu(q_1)$ は単調増加関数であるので, 実験より求められた摩擦係数 $\mu_{\text{exp}}$ に対して $q_1$ は唯一つに定まる.  $q_1$ の計算には二分法を用いた. Fig. 4-3 にそのアルゴリズムを示す.

温度計算を行う際にゴム温度の初期分布 $T_q$ を仮定して入力する必要があるが, 本研究では $T_q(t=0) = T_0 (= \text{const.})$ とした. 本研究では定常すべりのみを検討しているため,  $T_q$ の初期分布は結果に影響を与えない.

本研究において, 摩擦試験は速度区間 $1.0 \times 10^{-4} \leq v \leq 1.0 \times 10^{-2}$ で行われた. 仮にカットオフ波数 $q_1$ に速度依存性がないと仮定した場合, それぞれの路面において, 温度上昇がほとんど生じていないであろう低速度域での摩擦係数値を使って $q_1$ を決定するのが望ましい. そこで, 本研究では摩擦試験における最小速度 $v = 1.0 \times 10^{-4}$  [m/s] での摩擦係数 $\mu$ から逆算して $q_1$ を決定することとした. 路面 A, 路面 B それぞれのカットオフ波数は $q_1$  (Surf. A) =  $1.19195 \times 10^7$  [1/m],  $q_1$  (Surf. B) =  $1.92297 \times 10^7$  [1/m]となった.

Table 4-3 Flash Temperature を考慮する場合と考慮しない場合の計算条件.

		Surface A	Surface B
Surface data	$q_0$ [1/m]	6684.93	3341.74
	$q_m$ [1/m]	6751.7793	
	$q_1$ [1/m]	$1.19195 \times 10^7$	$1.92297 \times 10^7$
	$h_0$ [ $\mu\text{m}$ ]	76.5587	62.7752
	$H$	0.630691	0.606717
Rubber data	Viscoelastic property $E(\omega)$ [Pa]	if $\omega < 2\pi \times 10^2$ $\text{Re } E(\omega) = \sum_{i=0}^n E_i$ $\text{Im } E(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{0.15} \times 10^{6.634}$ if $\omega \geq 2\pi \times 10^2$ $E_0 + \sum_{i=1}^n \left\{ (1/E_i) + (1/i\omega\eta_i) \right\}^{-1}$	
	Poisson's ratio $\nu$	0.49	
	Mass density $\rho$ [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]	1000.0	
	Heat conductivity $\lambda$ [ $\text{W}/\text{mK}$ ]	0.2	
	Specific heat $C_V$ [ $\text{J}/\text{kgK}$ ]	1850.0	
	Glass-transition temperature $T_g$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]	-15.0	
Environmental temperature $T_0$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]		26.85	
Normal stress $\sigma_0$ [Pa]		2450.0	
Sliding speed range [m/s]		$1.0 \times 10^{-4} \sim 1.0 \times 10^{-2}$	

ゴムの材料定数は文献[22]を参考に設定した。

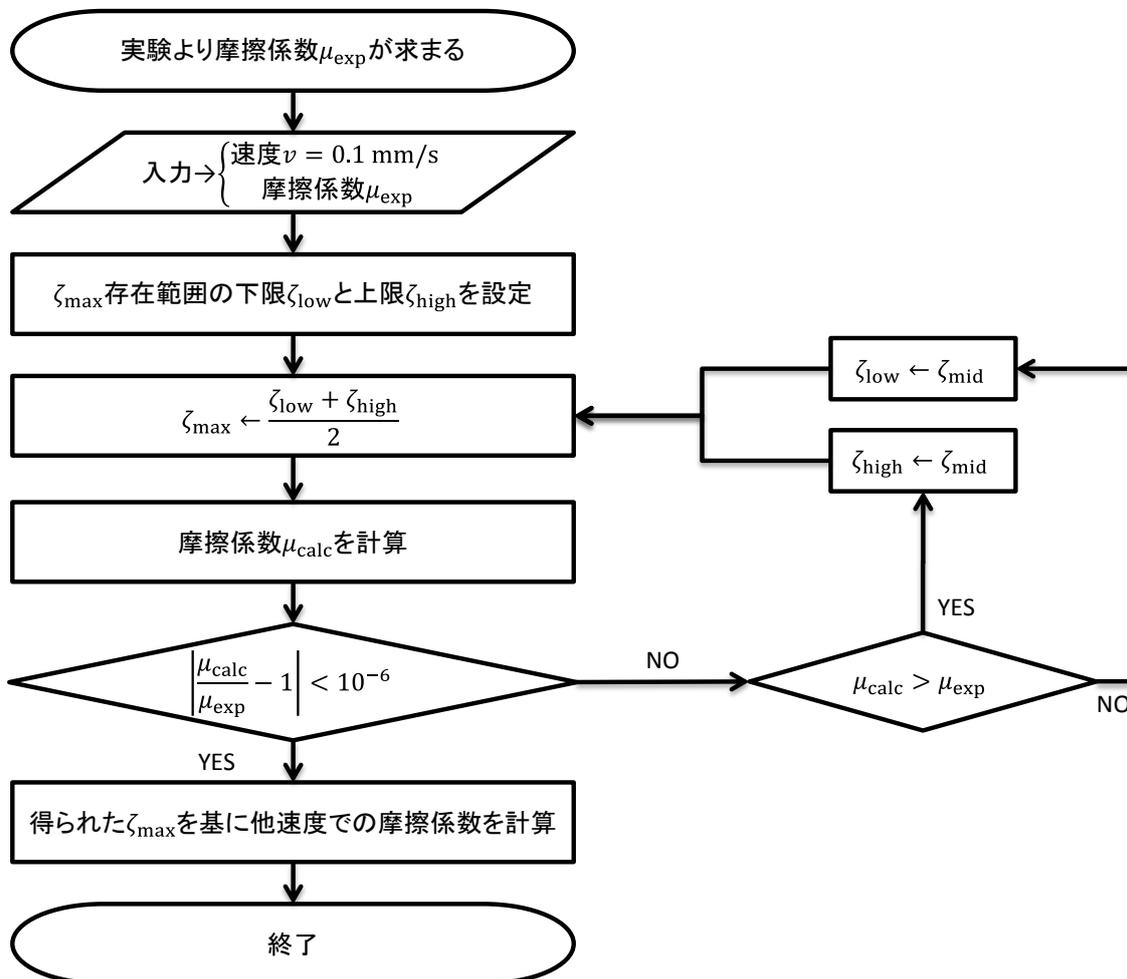


Fig. 4-3 最大倍率計算のアルゴリズム.

#### 4.2.2 計算結果 (Flash Temperature を考慮しないモデル)

はじめに, Flash Temperature の効果を考慮しない計算, すなわち式(4.1)を用いて計算を行った. 路面 A, 路面 B それぞれの特性を用いて計算を行った結果と実験結果を比較したものを Fig. 4-4 に示す. 図中の実線は計算結果, 破線は実験結果を示し, また, 青色は路面 A, 赤色は路面 B を示す.

路面 A, 路面 B とともに摩擦係数の合わせ込みを行った速度  $v = 1.0 \times 10^{-4}$  [m/s] での値は当然一致している. また, 速度が  $1.0 \times 10^{-3}$  [m/s] より小さい領域において, 摩擦係数の計算値と実験値はよく一致している. しかし, 速度が  $1.0 \times 10^{-3}$  [m/s] より大きい領域においては, 路面 A, 路面 B とともに計算値の方が実験値より 1 程度大きくなっており, 温度上昇を無視したモデルが実際の摩擦現象を表現していない.

速度が  $1.0 \times 10^{-3}$  [m/s] を上回った領域で摩擦係数の計算値が速度の増加に伴って大きく上昇し, 実験値から値が逸れているのは, 本計算において Flash Temperature に依る複素弾性率  $E(\omega)$  の特性変化を考慮していないためであると考えられる.

## 4 摩擦係数予測

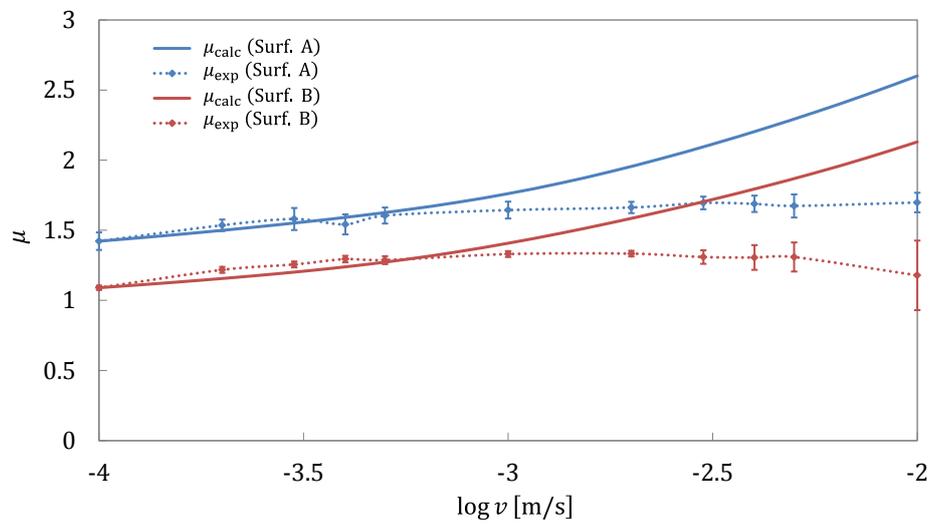


Fig. 4-4 Flash Temperature を考慮しない場合の摩擦係数の計算結果.

### 4.2.3 計算結果 (Flash Temperature を考慮したモデル)

本項では Flash Temperature を考慮した計算結果を示す. 計算手法は第 2 章に示した通りである. WLF 変換式の係数には  $C_1 = 14.9$ ,  $C_2 = 76.5$  の値を用いた. 路面 A, 路面 B それぞれの特性を用いて計算を行った結果と実験結果を比較したものを Fig. 4-5 に示す. Fig. 4-5 において (a) は路面 A, (b) は路面 B についての結果を示し, 図中の実線は計算結果, 破線は実験結果を示す. また, Fig. 4-6 には各すべり速度におけるゴム温度を, Fig. 4-7 には  $v = 0.01$  [m/s] でのスケール毎のゴム温度を示す.

路面 A, 路面 B ともに摩擦係数の合わせ込みを行った速度  $v = 1.0 \times 10^{-4}$  [m/s] での値はおおよそ一致している. 僅かに値がずれているのは, 実際の計算では, 路面 A で  $1.6$  [°C] 程度, 路面 B で  $1.2$  [°C] 程度の温度上昇が発生したことによる.

本研究で実験および計算を行った速度域全体において, 路面 A においては計算値と実験値がよく一致していると言える. Flash Temperature を考慮していないモデルと比較して, 速度増加に伴う摩擦係数の上昇が抑えられたためである. 一方, 路面 B においては, 高速度域にて計算値と実験値の大きな差が見られる. これは, 摩擦試験においてスティックスリップ現象が発生し, 実験値が本来の値よりも小さくなっている可能性があることが原因であると考えられる. 路面 B におけるスティックスリップ現象は, 付録 B で考察している.

路面 A, B ともに, Flash Temperature を無視したモデルよりも摩擦係数予測精度は高くなった. ゴム - 路面間の摩擦係数予測においての Flash Temperature を考慮することは重要であると考えられる.

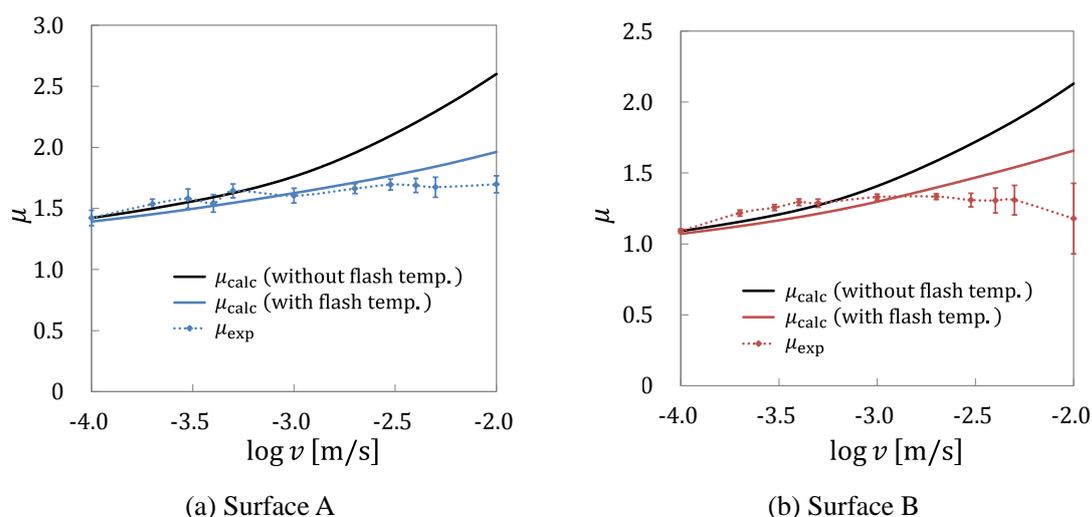


Fig. 4-5 Flash Temperature を考慮した場合の摩擦係数の計算結果.

## 4 摩擦係数予測

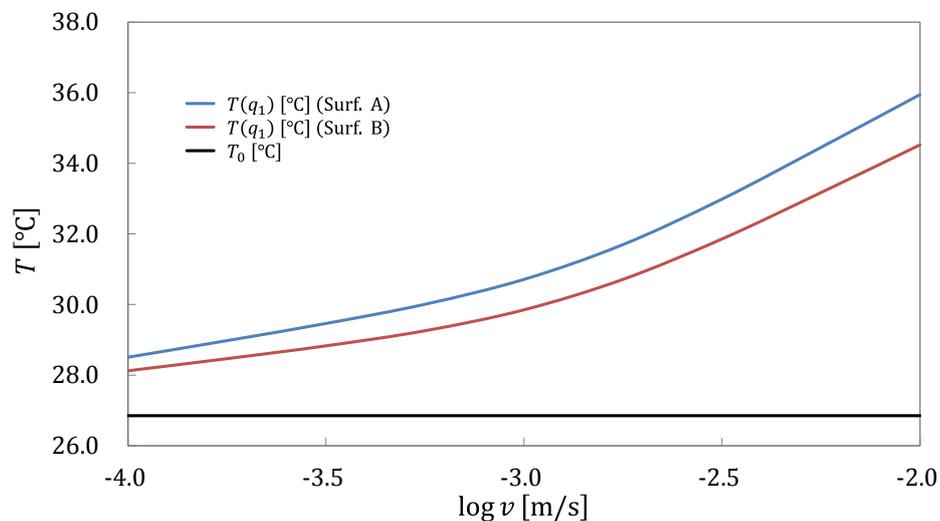
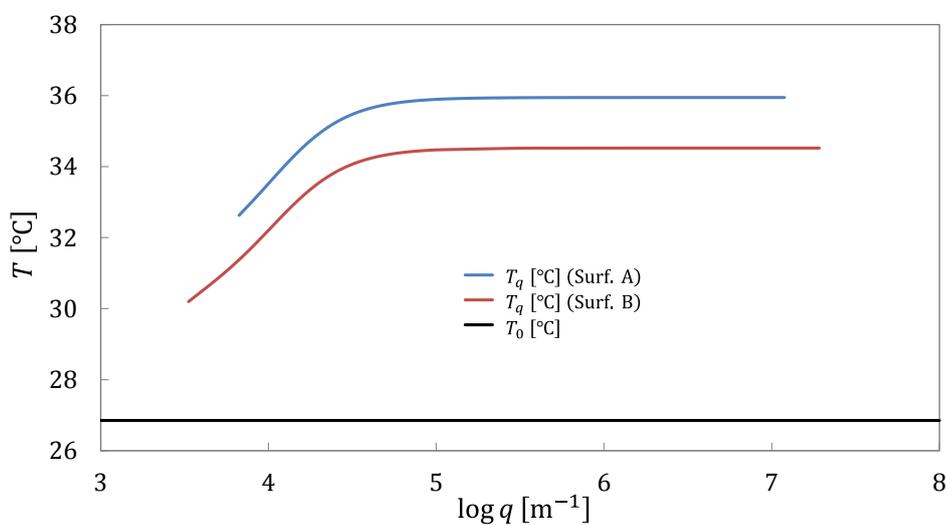


Fig. 4-6 カットオフ波数スケールでのゴム温度の計算結果.

Fig. 4-7  $v = 0.01$  [m/s] におけるスケール毎のゴム温度( $q_0 \leq q \leq q_1$ ).

#### 4.2.4 考察

本モデルにおいて、摩擦係数は速度に対して単調増加である。実験値も速度に対して単調増加であったが、温度上昇を考慮しない場合、速度の増加に従って計算値が実験値より大きくなる結果となってしまう。Flash Temperature を考慮した場合、速度に対する摩擦係数の上昇率を抑えられ、実験値に近づき摩擦係数の予測精度が高くなる。 $v < 1.0 \times 10^{-3}$  [m/s] では、Flash Temperature を考慮した場合と考慮しない場合の計算結果の差異は小さく、高い精度での予測が必要でない場合は Flash Temperature の影響は無視できる。

今回、摩擦係数を合わせ込んだ速度  $v = 1.0 \times 10^{-4}$  [m/s] において、予想よりも大きい温度上昇が起こったので、より小さい速度で合わせ込んだ方がより精度の高い予測が得られる可能性が高い。しかし、Fig. 4-5 からわかる通り、 $v = 1.0 \times 10^{-4}$  [m/s] における摩擦係数の実験値と計算値の差異はごくわずかなので、十分な精度の予測が得られたといえる。

今回の計算では路面 B の方が路面 A よりも温度上昇の幅が小さい結果となった。この主な原因はロールオフ波長の値が路面 B の方が小さい ( $q_0(\text{Surf. A}) > q_0(\text{Surf. B})$ ) ことである。すなわち路面 B の方が大きい体積スケールで熱の拡散が起こり、温度の上昇幅が小さくなったのである。

ここで、ロールオフ波長決定法について考察する。路面 A における表面粗さパワースペクトルを Fig. 4-8 に再掲する。Fig. 4-8 において、低波数側の 3 点の平均から横軸に並行な 1 本目の直線を生成し、その他の数十点のデータから最小 2 乗法を用いて 2 本目の直線を生成する。この 2 直線の交点からロールオフ波数  $q_0$  を決定している。Fig. 4-8 の横軸は  $\log q$  であるため、2 直線の交点がわずかにずれるだけで  $q_0$  の値は大きく変化してしまう。しかし、1 本目の直線はわずか 3 点の表面粗さパワースペクトルから生成されているため、決して高い精度であるとはいえず、精度向上のためには  $q < q_0$  のデータを増やすことが不可欠である。さらに、Fig. 4-8 において、 $q = 10^6$  [1/m] 程度までしか表面粗さパワースペクトルがないにも関わらず、計算に考慮される最小スケールは  $10^7$  [1/m] を超えている。より信頼性の高い直線を生成するためには、 $10^7$  [1/m] を超える波数領域での表面粗さパワースペクトルが必要である。

以上より、ロールオフ波長は Flash Temperature の計算に大きな影響を持つにも関わらず、その決定法には課題を残している。

Flash Temperature の計算結果の妥当性を、摩擦における表面温度の概算から検証する。

サンプルゴムが路面上をすべるとき、摩擦によって生じた単位時間当たり、単位面積当たりの発熱量  $q$  [W/m<sup>2</sup>] は、摩擦係数  $\mu$ 、荷重  $W$  [N]、すべり速度  $v$  [m/s]、正方形サンプルゴムの一辺の長さ  $d$  [m] を用いて、

$$q = \frac{\mu W v}{d^2}$$

と表すことができる。

Persson の理論に基づき、摩擦によって発生したエネルギーが、全てゴムサンプルに流入

すると仮定する[8]と、サンプルゴムの表面温度上昇 $\Delta T_m$  [°C]は、ゴムの熱伝導率 $\lambda$  [W/mK]を用いて、

$$\Delta T_m = 0.849 \frac{qd}{\lambda}$$

と見積もることができる[23].

上記の計算に基づき、 $v = 0.01$  [m/s] におけるマクロなゴムの表面温度上昇を見積もったところ、路面 A で  $\Delta T_m = 3.53$  [°C]、路面 B で  $\Delta T_m = 2.45$  [°C] であった。一方、Fig. 4-7 より、 $v = 0.01$  [m/s]、 $q = q_0$  におけるゴム温度上昇の計算結果は、路面 A で  $\Delta T_{q_0} = 5.75$  [°C]、路面 B で  $\Delta T_{q_0} = 3.35$  [°C] であった。路面 A、B 共に、マクロなゴムの表面温度上昇の方が、 $q = q_0$  におけるゴム温度上昇の計算結果より大きい。これは、スケールが小さくなるほど温度上昇が大きくなる本研究理論と合致する。よって、本研究においてはスケール毎のゴム温度上昇はうまく推定されたものと考えられる。

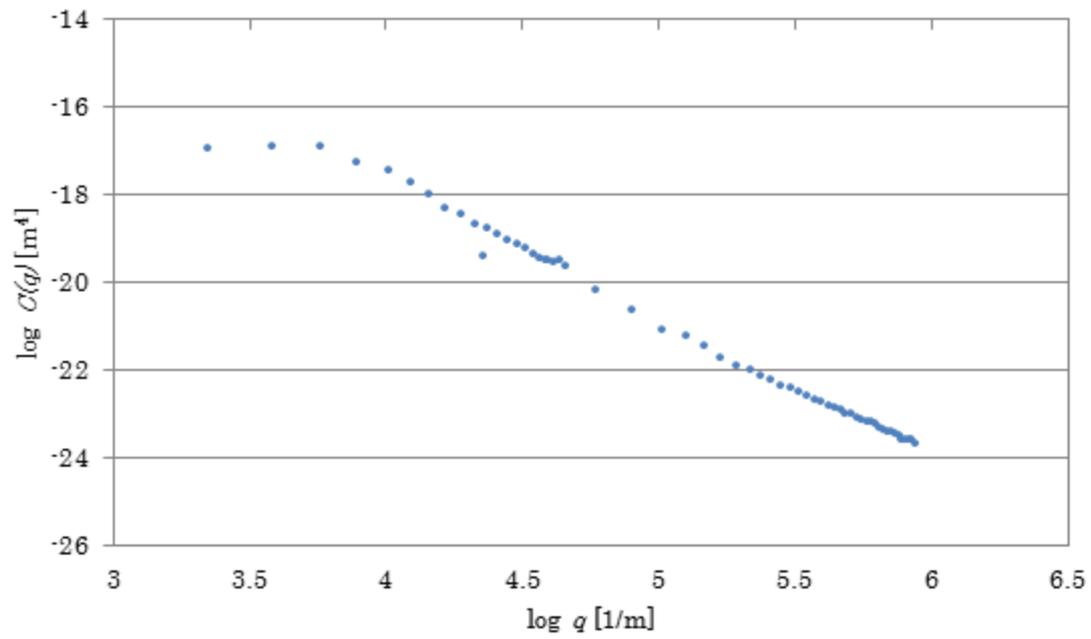


Fig. 4-8 表面粗さパワースペクトル(路面 A).

---

## 5 結論と今後の展望

---

## 5.1 本研究における結論

本研究では、2種類の摩擦試験機で摩擦試験を行い、試験結果が信頼性を確認した。さらに、Perssonの摩擦理論を基に、摩擦試験における最小速度での摩擦係数から逆算し、カットオフ波数を決定する摩擦理論を構築した。その理論に、実際の路面、ゴム物性の条件を適用し、Flash Temperatureを考慮した摩擦係数の予測計算を行い、摩擦試験の結果との比較・検証を行った。そこで、摩擦係数の予測計算と試験結果との比較において、Flash Temperatureを考慮することで、精度の高い摩擦係数予測が可能になることを確認した。また、スティックスリップ現象などの、本摩擦理論の適用範囲より大きなスケールで起こる現象によって、計算値と実験値に差異が生じることがわかった。

## 5.2 今後の展望

摩擦現象は、非常に多くの要因が複雑に絡まり合って発現している。そのため、摩擦係数を理論的に予測することは難しく、本研究の摩擦モデルにおいても、路面特性に起因する摩擦現象の一部を説明するにとどまっている。本摩擦係数予測では、実験値と計算値を合わせ込むことで、実験値と計算値がある程度同じ大きさになっている。つまり、本摩擦係数予測は、摩擦係数の速度依存性のみを説明したものとなっている。Gabriel らは、表面のマクロな幾何形状が摩擦力に与える影響を示した[24]。本摩擦モデルにおいて考慮したスケールより、さらにマクロな幾何形状の影響を取り入れることで、ある路面における合わせ込みを他の路面に適用するといった、より自由度の高い摩擦係数予測ができる可能性がある。また、スティックスリップ現象についても、マクロな幾何形状を考慮することで摩擦理論に組み込むことができる可能性がある。

## 付録 A：摩擦試験(直動型)の各走データ

本研究における摩擦試験のうち、TL201Ts(直動型摩擦試験機)での試験について詳しく述べる。試験概要及び解析に用いた結果については、3.3節を参照されたい。

本摩擦試験では、0.1~10 [mm/s] の各すべり速度を1つのゴムサンプルで測定し、ゴムサンプルを取り替え、計3走の計測を行った。3.3.2項で示した試験結果は、3走分のデータで平均、ないし標準偏差をとっている。路面Aと路面Bの各走の試験結果を、それぞれFig. A-1とFig. A-2に示す。N1, N2, N3は、それぞれ1走目、2走目、3走目の結果を表している。

路面Aの摩擦試験において、 $\log v = -3.4, -3.3$  [m/s] では各走の摩擦係数の速度依存性が異なる。これは路面上に残った摩耗粒が影響しているものと考えられる。試験ごとに路面の掃除は行なっているが、それでも摩耗粒が完全に取り除かれるわけではない。もし摩耗粒が路面上にあると、ゴムサンプルが摩耗粒に乗り上げてしまい、摩擦現象に大きな影響を及ぼす可能性がある。他の速度域においては、細かな違いはあるものの、各走の速度依存性は一致したと言える。

路面Bの摩擦試験では、 $-3.4 \leq \log v \leq -3.3$  [m/s] においては、N3のみ摩擦係数が減少した。これも摩耗粒の影響だと考えられる。この速度域を除けば、各走の摩擦係数の速度依存性は一致している。

路面A、路面B共に摩擦係数の絶対値は各走で差異があった。これはゴム表面や路面の計測位置ごとの個体差が影響しているものと考えられる。

以上より、路面A、路面B共に、摩擦係数の絶対値の違いはあるものの、速度依存性は一致した。よって3走分のデータを平均して、路面やゴムの個体差による絶対値の違いを平準化する今回の手法は妥当だったと言える。

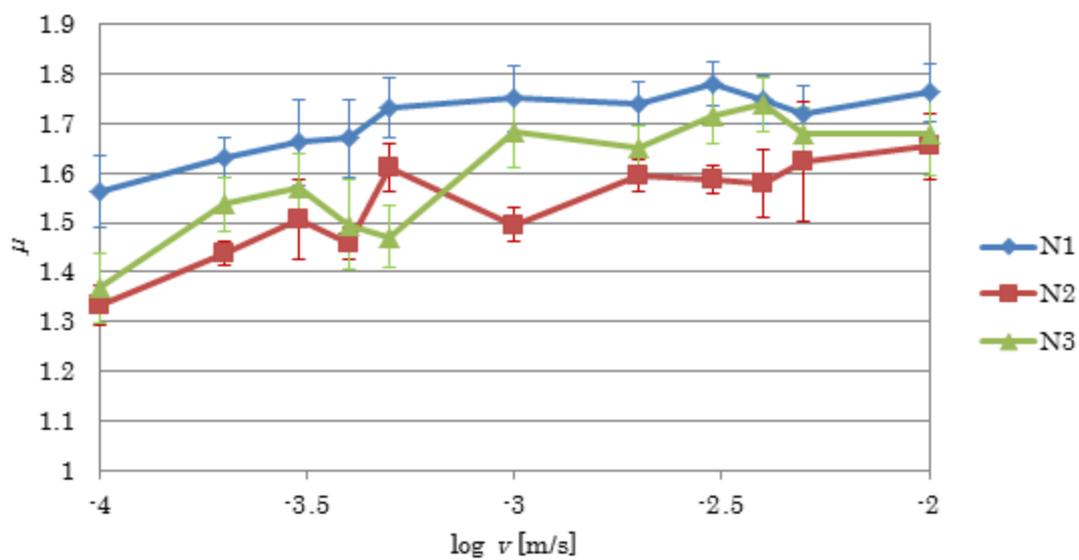


Fig. A-1 各走データ(路面 A).

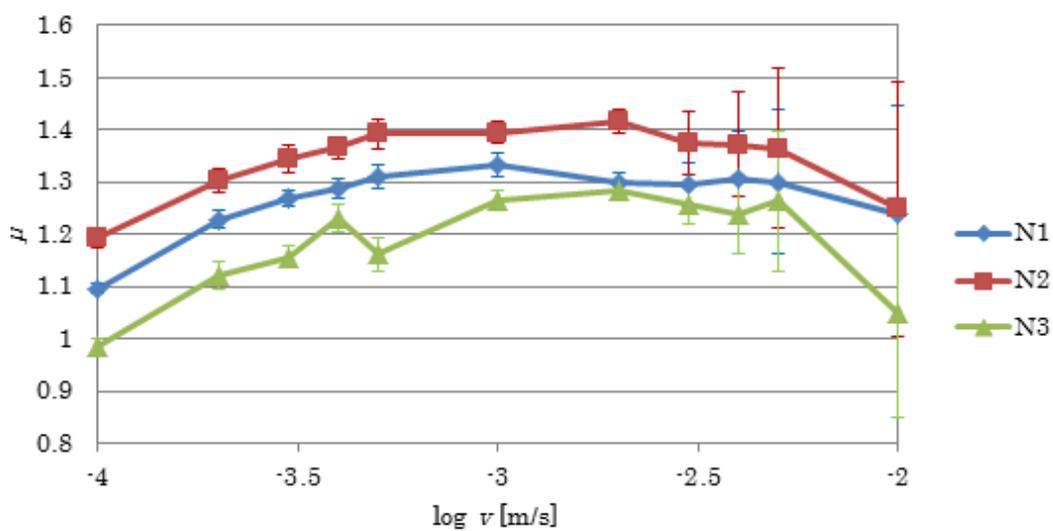


Fig. A-2 各走データ(路面 B).

## 付録 B：路面 B のスティックスリップ現象

定常的な振動を行なっている系は一般的には外部から強制的に加振されている場合が多いが、例外的に外部から加える力は一方向なのにそれを受け取った系は定常的に振動する場合がある。これをスティックスリップ現象という[1]。動摩擦係数が静止摩擦係数より小さいことが、スティックスリップ現象を引き起こす原因とされている[25]。ゴム材料ではほとんどの摩擦すべりにおいてスティックスリップ現象が発生している[1]。

路面 B の直動型摩擦試験結果をそれぞれ Fig. B-1 に再掲する。各すべり速度毎にサンプリングされたデータの標準偏差をとって、エラーバーで示している。Fig. B-1 において、 $v = 3.0$  [mm/s] ( $\log v = -2.5$  [m/s]) より高速度の領域では、低速度領域に比べて、エラーバーが大きくなっていることがわかる。 $v = 0.2$  [mm/s] と  $v = 5.0$  [mm/s] の 2 走目のサンプリングデータを、それぞれ Fig. B-2 と Fig. B-3 に示す。Fig. B-2 では、摩擦係数は上下のブレが小さいのに対し、Fig. B-3 では摩擦係数の上下のブレが激しい。このことから、 $v = 0.2$  [mm/s] に比べ  $v = 5.0$  [mm/s] では、振動の大きなスティックスリップ現象が発生していると考えられる。ここでは、エラーバーの比較的大きな  $v \geq 3.0$  [mm/s] ( $\log v = -2.5$  [m/s]) の領域でスティックスリップ現象が起きているとする。その他の領域でも、厳密に言えばスティックスリップ現象は起きていると考えられるが、振動が著しく小さいため無視する。

一般的に、速度上昇に伴って動摩擦係数が減少することがスティックスリップ現象の原因とされている[25]。しかし、Fig. B-1 からわかる通り、本実験において、スティックスリップ現象を起こすことと動摩擦係数の間には、相関関係は認められない。一般材料では、静止摩擦係数は路面に対し一定値で定義されるが、ゴム材料では摩擦すべりにおいて大きく変形するために、静止摩擦係数が変形の仕方に依存するからだと考えられる。よって、ゴム材料におけるスティックスリップ現象の発生条件を考えるためには、静止摩擦係数と動摩擦係数の差以外の指標が必要となる。

ここで、本摩擦試験における、滑り始めから摩擦係数が安定するまでの間の摩擦係数の極大値について考える。Fig. B-2 においては、摩擦係数の極大値はすべり時間 16480ms での 1.38 であり、Fig. B-3 においては、60ms での 2.41 である。2 走目における、各速度の摩擦係数の極大値、摩擦係数の平均値(Fig. B-1 における値)、その差を Table B-1 に示す。数値は左から、1 走目、2 走目、3 走目である。スティックスリップ現象が起きるのは、すべり速度が 3.0mm/s ( $\log v = -2.5$  [m/s]) 以上のときである。2 走目において、摩擦係数の極大値と摩擦係数の平均値との差は、すべり速度 3.0mm/s ( $\log v = -2.5$  [m/s]) 以上では常に 0.56 以上である。一方、すべり速度 2.0mm/s ( $\log v = -2.7$  [m/s]) 以下では常に 0.52 以下であり、0.1, 0.2, 0.3, 0.5mm/s では著しく小さくなる。

本試験 2 走目において、スティックスリップ現象を起こす場合、摩擦係数の極大値と摩擦係数の平均値との差が、一定値以上になることがわかった。一方、スティックスリップ現象を起こさない場合には、摩擦係数の極大値と摩擦係数の平均値との差が、一定値以下

になった。また、1走目、3走目でも完全ではないものの、同様の傾向が見られた。

摩擦係数の極大値と摩擦係数の平均値との差が大きいほど、スティックスリップ現象が起きやすいことがわかった。今回の結果は、ゴム材料におけるスティックスリップ現象の発生条件を突き止める手法の確立につながる可能性がある。

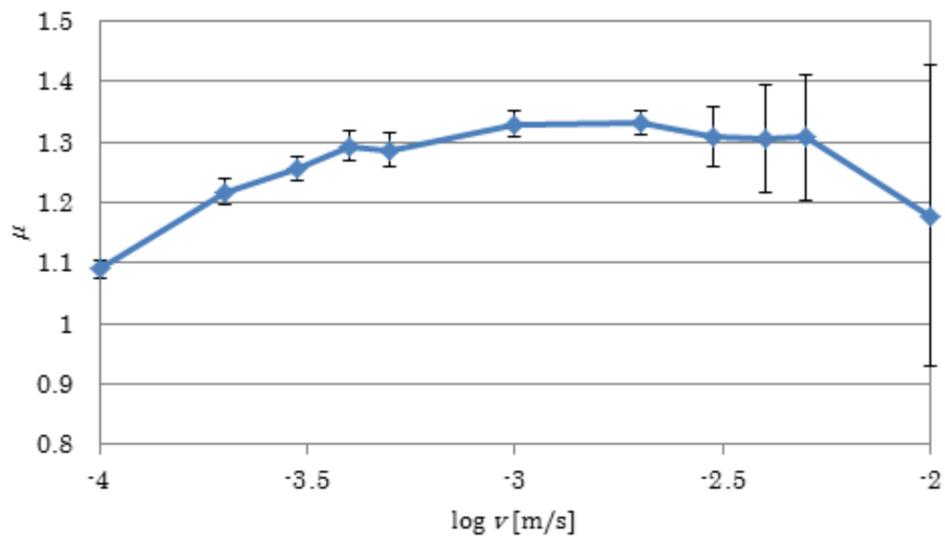


Fig. B-1 直動型 試験結果(路面 B).

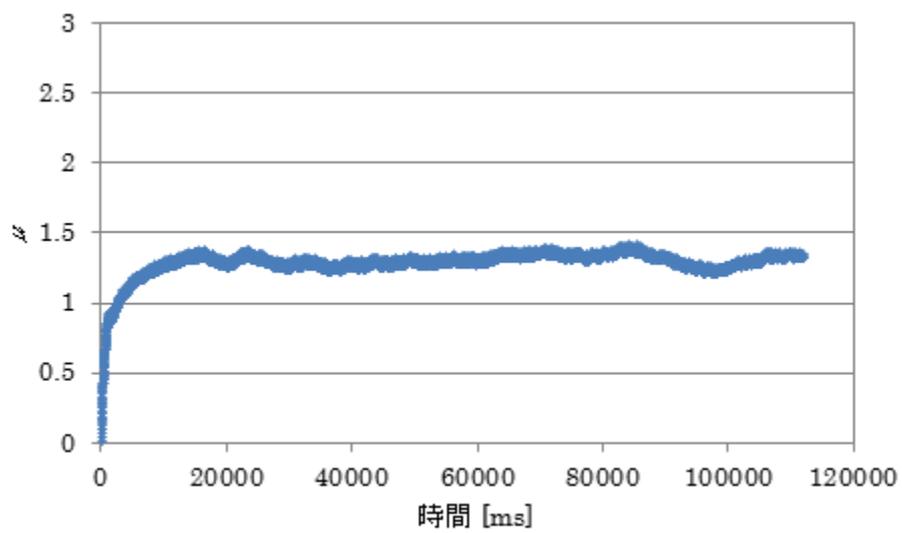


Fig. B-2 サンプルングデータ(0.2mm/s).

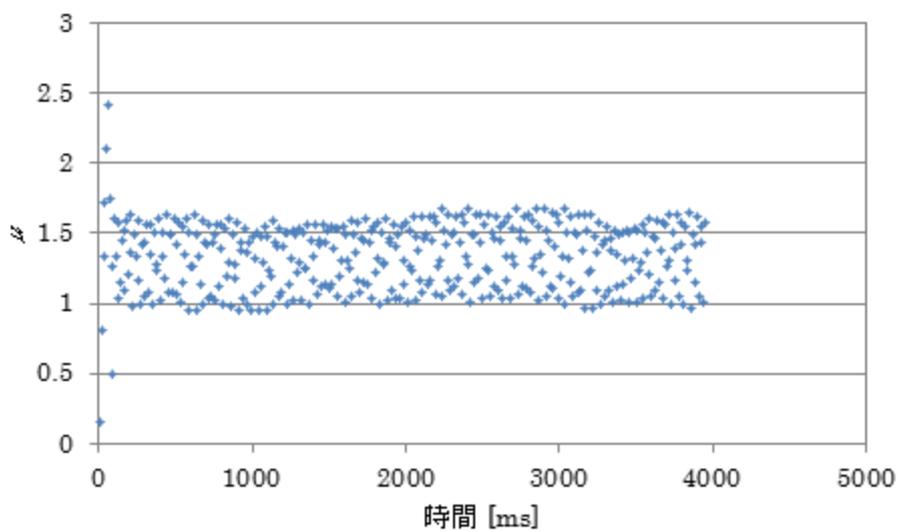


Fig. B-3 サンプリングデータ(5.0mm/s).

Table B-1 摩擦係数の極大値と摩擦係数の平均値との比較(路面 B).

すべり速度[mm/s]	摩擦係数の極大値	摩擦係数の平均値	差
0.1	1.33, 1.26, 1.11	1.10, 1.19, 0.98	0.21, 0.07, 0.12
0.2	1.25, 1.38, 1.21	1.22, 1.30, 1.12	0.03, 0.08, 0.09
0.3	1.49, 1.38, 1.43	1.26, 1.34, 1.15	0.23, 0.04, 0.28
0.4	1.48, 1.68, 1.55	1.28, 1.37, 1.23	0.20, 0.31, 0.32
0.5	1.16, 1.39, 1.23	1.30, 1.39, 1.16	-0.14, 0.00, 0.09
1.0	1.71, 1.80, 1.78	1.33, 1.39, 1.26	0.38, 0.41, 0.52
2.0	1.70, 1.94, 1.87	1.30, 1.42, 1.28	0.40, 0.52, 0.59
3.0	1.98, 2.18, 2.03	1.29, 1.37, 1.26	0.79, 0.81, 0.77
4.0	1.90, 1.93, 2.17	1.30, 1.37, 1.24	0.60, 0.56, 0.93
5.0	1.32, 2.41, 2.41	1.29, 1.36, 1.26	0.03, 0.85, 1.15
10.0	2.10, 2.57, 1.42	1.23, 1.25, 1.05	0.87, 1.32, 0.37

## 付録 C：マクロな路面凹凸の摩擦係数に対する寄与

3.1.1 項で示した路面サンプルとは別に、凹凸が著しく大きな路面での直動型摩擦試験を行った。その路面サンプルを路面 C とよぶ。画像を Fig. C-1 に示す。また、試験条件を Table C-1 に示す。

試験結果を Fig. C-2 に示す。各すべり速度毎にサンプリングされたデータの標準偏差をとって、エラーバーで示している。すべらせた直後のデータは、計測が安定しなかったため除いた。測定範囲のすべてのすべり速度において、摩擦係数は  $1.2 < \mu < 1.3$  であり、摩擦係数の速度依存性は認められなかった。また、計測中激しい振動が発生し、全速度領域でエラーバーが上下それぞれ 0.5 以上になった。

ここで、路面 A(3.1.1 項参照)と路面 C の表面粗さパワースペクトルを Fig. C-3 に示す。緑色の点が路面 A、青色の点が路面 C の表面粗さパワースペクトルを表している。また、路面 A と路面 C の摩擦試験結果を Fig. C-4 に示す。緑色の線が路面 A、青色の線が路面 C の摩擦係数を表している。Fig. C-3 より、路面 A と路面 C の表面粗さパワースペクトルは、共にセルフアフィンフラクタル性を持ち、傾きやロールオフ波数に大きな違いはない。よって、本研究の摩擦理論を念頭に考えるならば、路面 A と路面 C の摩擦係数は共に速度依存性を持つと予想される。しかし、Fig. C-4 の通り、本試験における速度領域内で、路面 C の摩擦係数は速度依存性を持たなかった。

路面 A の摩擦試験では、路面とゴムは見た目には完全に接触していたのに対し、路面 C の摩擦試験では、路面上の大きな凹凸数個の上部にしかゴムは接触していなかった。この路面 A、路面 C とゴム間における見かけの接触領域の違いは、表面粗さパワースペクトルには表れない、マクロな凹凸の違いによって生まれたものである。このことが、路面 A と路面 C の摩擦係数の速度依存性の違いに何らかの影響を及ぼしている可能性がある。よって、ゴム-路面間の正確な摩擦係数の導出を目指すにあたって、表面粗さパワースペクトルで表される波数領域よりもさらにマクロな領域の凹凸を考慮したモデルが必要になる可能性がある。

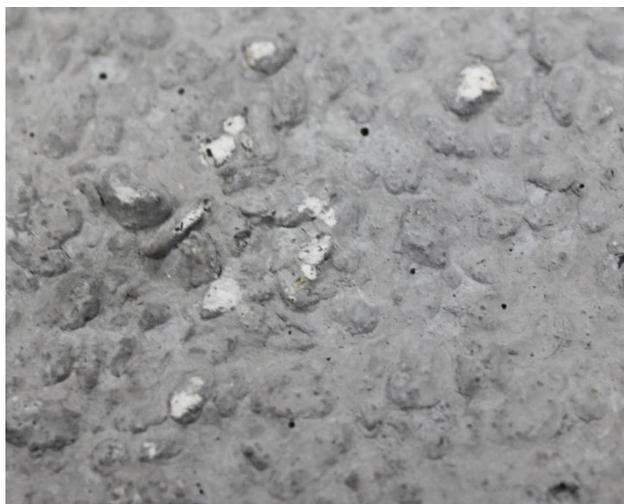


Fig. C-1 路面 C の表面画像.

Table C-1 路面 C の試験条件(直動型摩擦試験機).

路面	荷重[g]	すべり速度[mm/s]	計測距離[mm]	試行回数
C	100	0.1	20	1
C	100	0.2	20	1
C	100	0.3	20	1
C	100	0.4	20	1
C	100	0.5	20	1
C	100	1.0	20	1
C	100	2.0	20	1
C	100	3.0	20	1
C	100	4.0	20	1
C	100	5.0	20	1
C	100	10.0	20	1

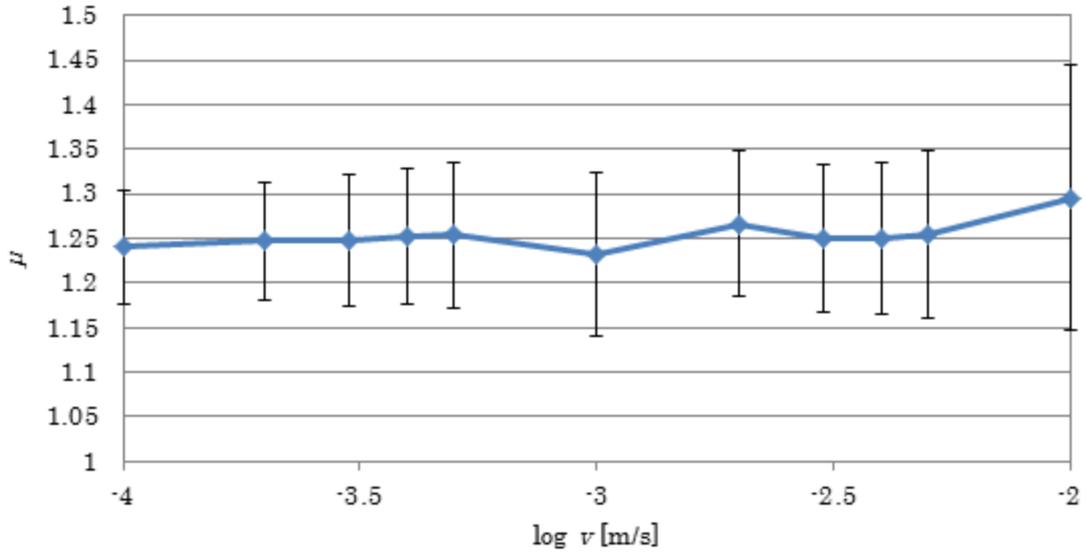


Fig. C-2 直動型 試験結果(路面 C).

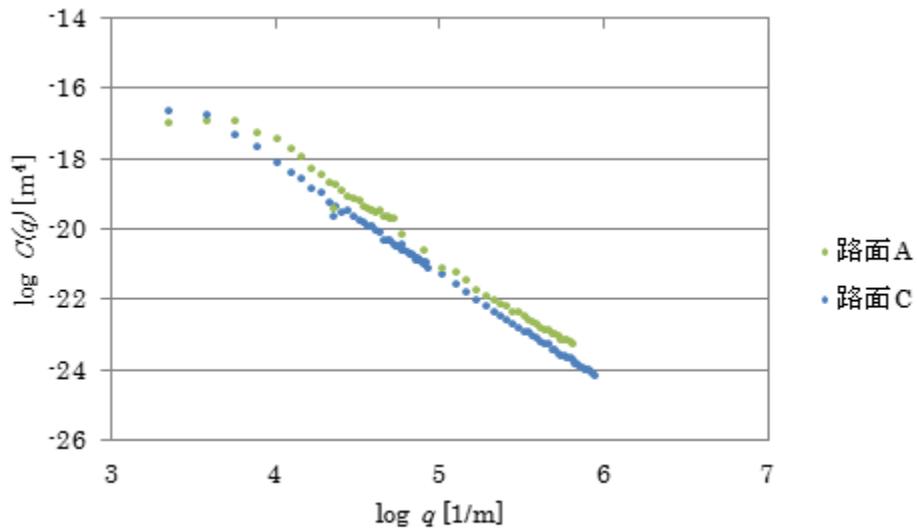


Fig. C-3 路面 A と路面 C のパワースペクトル比較.

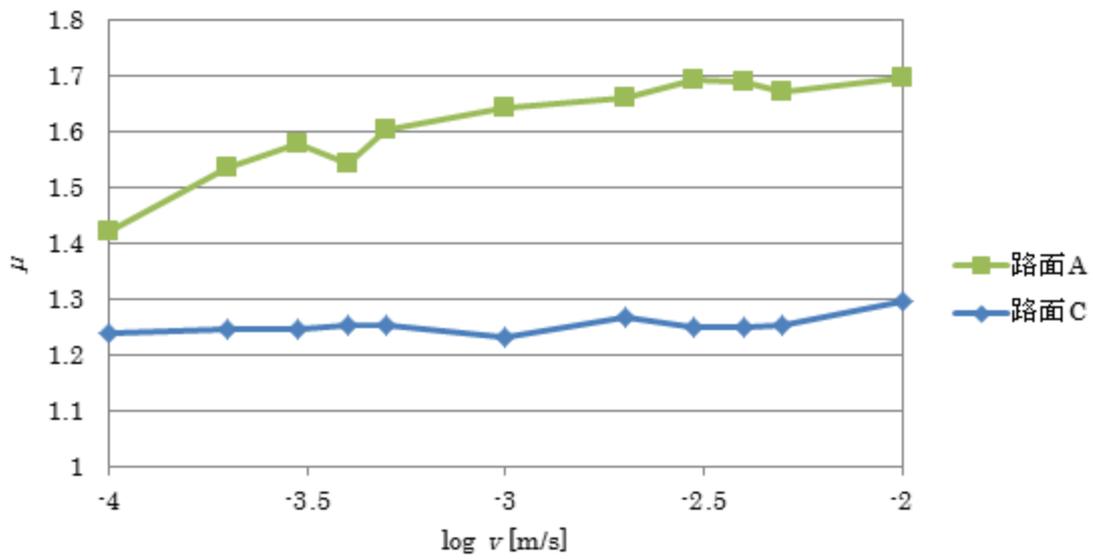


Fig. C-4 路面 A と路面 C の試験結果比較.

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、多くの方にご指導、ご協力をいただきました。

指導教員である酒井信介教授には、研究の進め方を論理的に享受していただきました。心より感謝申し上げます。

泉聡志准教授には、研究テーマの設定や研究手法のアドバイスなど、多くの助言をいただきました。心より感謝申し上げます。

原祥太郎講師には、研究のアドバイスはもちろんのこと、その明るいお人柄で研究室の雰囲気盛り上げていただきました。ありがとうございました。

田中展助教には、研究の進め方やデータの処理の仕方など、細かく親身になって面倒を見ていただきました。ありがとうございました。

浅川武技術官と小川恵子秘書には、様々な部分で裏から研究を支えていただきました。

博士課程の皆さんには、研究に対する真摯な姿勢を学ばせていただきました。

修士課程の皆さんには、研究に関する技術的な指導から研究室の運営に至るまで、本当にお世話になりました。特に、同じ研究テーマの修士2年の森住竜雄さんには、年長者として研究チームを引っ張っていただきました。

学部4年の皆さんには、同級生として、研究以外のことも含めいろいろな相談をさせていただきました。特に、同じ研究テーマの伊藤哲久君には、持ち前の明るいキャラクターで研究テーマの雰囲気を盛り上げてもらいました。

また、ピンオンディスク型の摩擦試験を行う際に、加藤孝久教授、野坂正隆講師をはじめ、加藤・崔研究室の皆様には大変お世話になりました。この場を借りてお礼申し上げます。

株式会社ブリヂストンの門脇弘様には、ゴムサンプルの手配等で大変お世話になりました。門脇様なしでは、本論文が完成することはありませんでした。心よりお礼申し上げます。

労働安全衛生総合研究所の山際謙太様には、路面データ取得の際に大変お世話になりました。また、研究室のOBとして、公私共に良くしていただきました。本当にありがとうございました。

株式会社トリニティーラボ様には、本研究に最適な摩擦試験機を提供していただきました。この場を借りてお礼申し上げます。

本当に多くの皆様の力を借りて、本論文は完成に至りました。来年度は修士課程へと研究のステージを移すこととなりますが、多くの方の支えで自分が研究できていることを忘れず、何事にも感謝の気持ちを持ち、真摯に取り組んでいこうと思っております。

2013年2月1日

荒牧 純平

## 参考文献

- [1] 深堀 美英, “設計のための高分子の力学 高分子鎖が織りなす力学の世界,” 技報堂出版, 2000.
- [2] J. F. Archard, “Contact and Rubbing of Flat Surfaces,” *Journal of Applied Physics*, Vol.24, No.8, pp.981-988, 1953.
- [3] Eugene Guth, “Theory of Filler Reinforcement,” *Journal of Applied Physics*, Vol.16, No.20, pp.20-25, 1945.
- [4] Meng-Jiao Wang, “Effect of polymer-filler and filler-filler interactions on dynamic properties of filled vulcanizates,” *Rubber Chemistry and Technology*, Vol.71, No.3, pp.520-589, 1998.
- [5] Jianping Gao, W. D. Luedtke, D. Gourdon, M. Ruths, J. N. Israelachvili, Uzi Landman, “Frictional Forces and Amonton’s Law : From the Molecular to the Macroscopic Scale,” *The Journal of Physical Chemistry B*, Vol.108, pp.3410-3425, 2004.
- [6] F. P. Bowden, D. Tabor, “THE FRICTION AND LUBRICATION OF SOLIDS,” Oxford at The Clarendon Press, 1950.
- [7] Izabela Szlufarska, Michael Chandross, Robert W Carpick, “Recent advances in single-asperity nanotribology,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, Vol.41, pp.1-39, 2008.
- [8] B. N. J. Persson, “On the theory of rubber friction,” *Surface Science*, Vol.401, pp.445-454, 1998.
- [9] B. N. J. Persson, E. Tosatti, “Qualitative theory of rubber friction and wear,” *Journal of Chemical Physics*, Vol.112, No.4, pp.2021-2029, 2000.
- [10] B. N. J. Persson, “Theory of rubber friction and contact mechanics,” *The Journal of Chemical Physics*, Vol.115, No.8, pp.3840-3861, 2001.
- [11] B. N. J. Persson, O Albohr, U Tartaglino, A I Volokitin, E Tosatti, “On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, Vol.17, pp.1-62, 2005.
- [12] B. N. J. Persson, “Rubber friction : role of the flash temperature,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, Vol.18, pp.7789-7823, 2006.
- [13] B. N. J. Persson, “Adhesion between an elastic body and a randomly rough hard surface” *The European Physical Journal E*, Vol.8, pp.385-401, 2002.
- [14] B. N. J. Persson, E. Tosatti, “The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids,” *The Journal of Chemical Physics*, Vol.115, No.12, pp.5597-5610, 2001.
- [15] 熊沢 卓, “マルチスケールモデルによるタイヤゴムの摩擦係数予測”, 東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻, 修士論文, 2011
- [16] 原 義則, “塗膜の物性評価(1),” *塗料の研究*, No.151, pp.23-33, 2009.

- [17] 伊藤 哲久, “表面の凹凸がゴムの摩擦特性に及ぼす影響の有限要素法解析”, 東京大学工学部機械工学科, 卒業論文, 2012.
- [18] B. Lorenz, B. N. J. Persson, S. Dieluwit, T. Tada, “Rubber friction : Comparison of theory with experiment,” *The European Physical Journal E*, Vol.34, No.12, pp.1-11, 2011.
- [19] F. R. Schwarzl, H. W. Bree, C. J. Nederveen, G. A. Schwippert, L. C. E. Struik, C. W. van der Wal, “Behaviour of unfilled and filled rubbers in shear in the glass-rubber transition region,” *Rheologica Acta*, Vol.5, No.4, pp.170-175, 1966.
- [20] 森住 竜雄, “温度依存性を考慮したゴム-路面間摩擦のマルチスケール評価”, 東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻, 修士論文, 2012.
- [21] 広中 清一郎, “摩擦と摩耗のはなし,” *日本ゴム協会誌*, Vol.72, No.4, pp.186-193, 1999.
- [22] <http://www.packing.co.jp/>
- [23] 木村 正芳, “図解 トライボロジー 摩擦の科学と潤滑技術,” 日刊工業新聞社, 2007.
- [24] P. Gabriel, A.G. Thomas, J.J.C. Busfield, “Influence of interface geometry on rubber friction,” *Wear*, Vol.268, pp.747-750, 2010.
- [25] 加藤 孝久, 益子 正文, “トライボロジーの基礎,” 培風館, 2004.

以上

卒業論文

Flash Temperature を考慮した  
タイヤゴムの摩擦特性評価

p.1 – p.89 完

2013 年 2 月 1 日提出

指導教員 酒井 信介 教授

110170 荒牧 純平