

修士論文

温度依存性を考慮した  
ゴム-路面間摩擦のマルチスケール評価  
p.1 — p.108 完

2013 年 2 月 7 日提出

指導教員 泉 聡志 准教授

116234 森住 竜雄

---

## 目次

---

---

|       |                                        |    |
|-------|----------------------------------------|----|
| 1     | 序論 .....                               | 9  |
| 1.1   | 研究の背景 .....                            | 10 |
| 1.2   | 従来の研究 .....                            | 11 |
| 1.3   | 研究の目的 .....                            | 12 |
| 1.4   | 本論文の構成.....                            | 13 |
| 2     | タイヤ - 路面間の摩擦理論.....                    | 14 |
| 2.1   | 摩擦現象のマルチスケール性.....                     | 15 |
| 2.2   | 接触理論 .....                             | 16 |
| 2.3   | すべり摩擦 .....                            | 25 |
| 2.4   | ゴムの温度上昇を考慮した摩擦係数.....                  | 31 |
| 3     | 路面表面粗さパワースペクトル.....                    | 36 |
| 3.1   | 表面粗さパワースペクトルの定義.....                   | 37 |
| 3.2   | セルフアフィンフラクタル表面.....                    | 38 |
| 3.3   | 路面サンプルの表面粗さパワースペクトル.....               | 39 |
| 3.3.1 | 路面サンプル.....                            | 39 |
| 3.3.2 | 表面高さデータの計測.....                        | 40 |
| 3.3.3 | 表面粗さパワースペクトルの計算.....                   | 41 |
| 4     | ゴムの粘弾性特性.....                          | 43 |
| 4.1   | タイヤゴムの粘弾性特性.....                       | 44 |
| 4.2   | バネ・ダンパモデルによる粘弾性特性の表現.....              | 45 |
| 4.3   | 摩擦試験用ゴム試験片の粘弾性特性.....                  | 47 |
| 5     | 摩擦試験 .....                             | 50 |
| 5.1   | ゴムサンプル.....                            | 51 |
| 5.2   | 直動型摩擦試験.....                           | 52 |
| 5.2.1 | 試験概要.....                              | 52 |
| 5.2.2 | 試験結果.....                              | 54 |
| 6     | 摩擦係数予測 .....                           | 55 |
| 6.1   | Persson の摩擦モデルのカットオフ波数 $q_1$ 依存性 ..... | 56 |
| 6.1.1 | 計算条件.....                              | 56 |
| 6.1.2 | 計算結果.....                              | 58 |
| 6.2   | ゴムの温度上昇が摩擦係数に与える影響.....                | 60 |
| 6.2.1 | 計算条件.....                              | 60 |
| 6.2.2 | 計算結果（温度上昇無視） .....                     | 60 |
| 6.2.3 | 計算結果（温度上昇考慮） .....                     | 63 |
| 6.2.4 | 考察 .....                               | 66 |

---

---

|       |                               |     |
|-------|-------------------------------|-----|
| 6.3   | カットオフ波数の理論的な同定方法の検討.....      | 67  |
| 6.3.1 | 弾性エネルギー密度を用いた手法.....          | 67  |
| 6.3.2 | 最小曲率半径を用いた手法.....             | 71  |
| 7     | 結論と今後の課題.....                 | 76  |
| 7.1   | 結論 .....                      | 77  |
| 7.2   | 今後の課題 .....                   | 78  |
| 付録 A: | 剛性マトリクス $\mathbf{M}$ の導出..... | 79  |
| 付録 B: | パワースペクトル関係式の導出.....           | 91  |
| 付録 C: | マクロ凹凸接触と温度上昇.....             | 92  |
| 付録 D: | 弾性エネルギー密度の導出.....             | 95  |
| 付録 E: | 摩擦係数の垂直応力依存性.....             | 98  |
| 付録 F: | 実験結果（昨年度）との比較 .....           | 101 |
| 謝辞    | .....                         | 104 |
| 参考文献  | .....                         | 106 |

---

---

## 図目次

---

---

|                                                                                                                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Fig. 1-1 Simulation of tire property (© Bridgestone Corporation). . . . .                                                                                             | 10 |
| Fig. 2-1 A rubber block squeezed against a hard, rough, substrate. . . . .                                                                                            | 15 |
| Fig. 2-2 Elastic contact between a flat rubber surface and a hard solid substrate. . . . .                                                                            | 16 |
| Fig. 2-3 The energy dissipated during the time period $t_0$ (macro) . . . . .                                                                                         | 26 |
| Fig. 2-4 The energy dissipated during the time period $t_0$ (micro) . . . . .                                                                                         | 26 |
| Fig. 2-5 The viscoelastic modulus $E(\omega)$ of a typical rubber-like material. . . . .                                                                              | 32 |
| Fig. 2-6 A rubber block sliding on an asperity with shorter wavelength asperities. . . . .                                                                            | 33 |
| Fig. 3-1 The surface roughness power spectrum of a surface which is a self-affine fractal for<br>$q_0 < q < q_1$ . . . . .                                            | 38 |
| Fig. 3-2 (a) Safety-walk type B (b) Continua. . . . .                                                                                                                 | 39 |
| Fig. 3-3 Laser microscope. . . . .                                                                                                                                    | 40 |
| Fig. 3-4 The surface roughness power spectrum of each surface. . . . .                                                                                                | 41 |
| Fig. 4-1 The relation between viscoelasticity and other properties [26]. . . . .                                                                                      | 44 |
| Fig. 4-2 (a) Voigt • Kelvin Model (b)Maxwell Model. . . . .                                                                                                           | 46 |
| Fig. 4-3 Generalized Maxwell Model. . . . .                                                                                                                           | 46 |
| Fig. 4-4 Test piece. . . . .                                                                                                                                          | 48 |
| Fig. 4-5 The effect of the rubber temperature on the loss tangent. . . . .                                                                                            | 49 |
| Fig. 4-6 The complex modulus of elasticity. . . . .                                                                                                                   | 49 |
| Fig. 5-1 Square rubber sample. . . . .                                                                                                                                | 51 |
| Fig. 5-2 TL201Ts (© Trinity Lab INC.). . . . .                                                                                                                        | 52 |
| Fig. 5-3 Experimental results of each surface. . . . .                                                                                                                | 54 |
| Fig. 6-1 Numerical results of friction coefficient for a rubber sliding on surface A with various<br>maximum magnifications. . . . .                                  | 59 |
| Fig. 6-2 Numerical results of friction coefficient for a rubber sliding on surface B with various<br>maximum magnifications. . . . .                                  | 59 |
| Fig. 6-3 The calculation algorithm for $\zeta_{\max}$ on each surface. . . . .                                                                                        | 62 |
| Fig. 6-4 Numerical results of friction coefficient without flash temperature. . . . .                                                                                 | 62 |
| Fig. 6-5 Numerical results of friction coefficient with flash temperature. . . . .                                                                                    | 63 |
| Fig. 6-6 Numerical results rubber temperature as a function of the logarithm of sliding velocity<br>at the scale of cut-off wavevector $q_1$ of each surface. . . . . | 64 |
| Fig. 6-7 Numerical results of rubber temperature as a function of the logarithm of the wave<br>vector at sliding velocity $v = 0.01$ m/s of each surface. . . . .     | 64 |
| Fig. 6-8 Numerical results of the normalized area of contact as a function of the logarithm of<br>the sliding velocity. . . . .                                       | 65 |
| Fig. 6-9 The calculation algorithm for elastic energy density. . . . .                                                                                                | 68 |

---

---

|                                                                                                                                        |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Fig. 6-10 Numerical results of friction coefficient based on elastic energy density. ....                                              | 70  |
| Fig. 6-11 Numerical results of elastic energy density based on friction tests. ....                                                    | 70  |
| Fig. 6-12 Numerical results of curvature radius as a function of the logarithm of the wavevector $q$ . ....                            | 72  |
| Fig. 6-13 Numerical results of curvature radius at the scale of cut-off wavevector $q_1$ based on friction tests of each surface. .... | 73  |
| Fig. 6-14 Numerical results of friction coefficient based on curvature radius. ....                                                    | 75  |
| Fig. 6-15 The energy dissipation at the scale of (a) $q_0 < q < q_1$ (b) $q > q_1$ . ....                                              | 75  |
| Fig. C-1 Numerical results of friction coefficient as a function of the logarithm of the sliding velocity. ....                        | 93  |
| Fig. C-2 Numerical results of rubber temperature as a function of the logarithm of the sliding velocity. ....                          | 94  |
| Fig. C-3 Numerical results of the normalized area of contact as a function of the logarithm of the sliding velocity. ....              | 94  |
| Fig. E-1 Numerical results of friction coefficient as a function of the logarithm of the normal stress. ....                           | 99  |
| Fig. E-2 Numerical results of rubber temperature as a function of the logarithm of the normal stress. ....                             | 100 |
| Fig. E-3 Numerical results of the normalized area of contact as a function of the logarithm of the normal stress. ....                 | 100 |
| Fig. F-1 Numerical results of friction coefficient as a function of the logarithm of the sliding velocity. ....                        | 102 |
| Fig. F-2 Numerical results of rubber temperature as a function of the logarithm of the sliding velocity. ....                          | 103 |
| Fig. F-3 Numerical results of the normalized area of contact as a function of the logarithm of the sliding velocity. ....              | 103 |

---

---

## 表目次

---

---

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Table 3-1 Conditions of the measurements. ....                                           | 40  |
| Table 3-2 Surface properties. ....                                                       | 42  |
| Table 4-1 Test piece properties. ....                                                    | 48  |
| Table 5-1 Conditions of friction tests. ....                                             | 53  |
| Table 6-1 Calculation conditions of friction coefficient. ....                           | 57  |
| Table 6-2 Relation between maximum magnification and minimum wavelength. ....            | 58  |
| Table 6-3 Calculation conditions with or without flash temperature. ....                 | 61  |
| Table 6-4 Calculation conditions of elastic energy density. ....                         | 69  |
| Table 6-5 Calculation conditions of curvature radius. ....                               | 72  |
| Table 6-6 Calculation conditions of friction coefficient based on curvature radius. .... | 74  |
| Table C-1 Calculation conditions for investigating $q_m$ dependence. ....                | 92  |
| Table E-1 Calculation conditions for investigating normal stress dependence. ....        | 98  |
| Table F-1 Calculation conditions for validating experimental results of last year. ....  | 101 |

---

---

# 1 序論

---

## 1.1 研究の背景

タイヤは唯一路面に接して車両を支える重要な機械要素であり，その摩擦係数は車両自体の性能を左右する重要な因子となる．タイヤの摩擦係数は一般的に路面の表面特性やゴムの粘弾性特性などによって定められ，すべり速度に顕著に依存することが知られている[1]．このように，タイヤの摩擦現象は様々な特性に依存する非常に複雑な現象であり，モデル化は容易ではない．

タイヤの摩擦現象を複雑にしている大きな要因の 1 つとして，路面粗さのマルチスケール性が挙げられる．従来の路面モデルでは単一のスケールで見た路面表面粗さのみを考えていた[2][3]が，実際の路面は様々なスケールの粗さが複雑に存在している．そのため，タイヤー路面間の摩擦力や摩擦係数を正確に推定するためには，路面粗さのスケールを跨いだ統計的扱いが不可欠である．

タイヤの摩擦現象を複雑化しているもう 1 つの要因として，ゴムの粘弾性特性が挙げられる．粘弾性特性はゴムの分子鎖の挙動や，ポリマーと充てん剤の相互作用などに起因しており，その原理の解明，変形挙動の正確な表現を目指し，多くの研究が行われてきた[4]-[6]．ゴムのような高分子材料を使用した製品の開発においては，この粘弾性特性を考慮した解析が重要となる．

このように，現状ではタイヤー路面間の摩擦現象を正確に記述し，摩擦係数を予測することは困難である．しかし，企業におけるタイヤ設計のためのシミュレーション（Fig. 1-1 参照）は実際上不可欠なものであり，そこでは摩擦係数の設定が重要な問題となる．そのため，タイヤの研究開発において摩擦係数の設定は実験値を用いているのが現状である．しかし，実験によって得られた摩擦係数では解析精度に問題があり，その上実験は大きな費用と時間を要する．そのため，摩擦係数を正確に予測できるような数理モデルを構築し，様々な条件下での摩擦係数を理論的に求めることができれば，タイヤ開発におけるコスト削減・開発期間の短縮・シミュレーション精度の向上が期待できる．

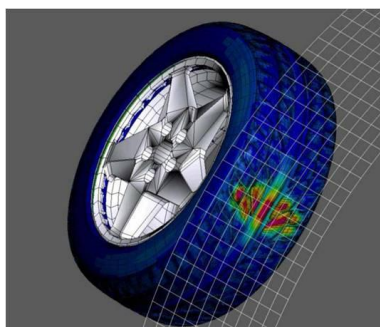


Fig. 1-1 Simulation of tire property (© Bridgestone Corporation).

## 1.2 従来の研究

よく知られた Amontons の法則[7]によれば, 2 固体間のマクロの摩擦力  $F_f$  は荷重  $L$  に比例し,  $F_f = \mu L$  を満たす. ここで,  $\mu$  はマクロな摩擦係数であり,  $F_f$  は見かけの接触面積に依らない. その後, 真実接触領域についての考察[8]から, 摩擦力が真実接触面積に比例することが示された. これまでに, 様々な曲率半径の完全に滑らかな表面に対して, 摩擦特性を明らかにするための実験やシミュレーションが行われた[9].

しかし, タイヤ - 路面間のようなゴムの摩擦は, 多くの点で他の固体間の摩擦特性とは異なる挙動を示すため, 滑らかな表面同士の摩擦理論を適用することは難しい. その摩擦特性の違いは, 広い周波数帯域で見られるゴムの非常に低い弾性率と大きい内部摩擦に起因している. ゴムの内部摩擦に起因する摩擦力を評価するためには, 表面の粗さによるゴムの変形を考えなければならない. そこで, Persson は単一の粗さを持つ理想化された表面に対するゴムの摩擦理論を構築した[10][11]. その後, Persson は実際の路面が不規則に粗い表面を持つことに着目し, さまざまなスケールの粗さを考慮した摩擦モデルを提案した[12][13]. この摩擦モデルによれば, 路面表面粗さパワースペクトルとゴムの粘弾性特性からゴムのヒステリシスロスに起因するゴム - 路面間の摩擦係数を計算することができる. さらに, Persson は, 摩擦によるゴムの局所的加熱 (Flash temperature) を取り入れ, より正確な摩擦係数の導出を試みた[14]. また, 表面間の凝着力についても接触理論に基づいた評価を行った[15][16]が, 路面の粗さにおいては凝着の効果はほぼ無視できるとして摩擦モデルに凝着の効果は取り入れられていない.

上記のように, タイヤのゴム - 路面間の摩擦係数を理論的に予測するにあたり, Persson の理論は有効な手段であると考えられる. ただし, Persson の理論ではカットオフ波数  $q_1$  の決定方法についての考察が不足しており, ミクロ領域で起こる素過程を考慮に入れたモデル化が必要である. この問題に対して, 熊沢[17]はゴムの弾性エネルギー密度の限界値を設定することにより, 計算スケールの決定を試みた. 熊沢の研究では, 限界弾性エネルギー密度から得られた計算スケールを使って摩擦係数を計算し, 摩擦試験によって測定した実験値との比較が行われた. しかし, 摩擦試験で測定した速度範囲において, 摩擦係数の実験値は速度の増加に伴って摩擦係数は上昇して下降した (極大値を有した) のに対し, 計算値はなだらかに減少した. 熊沢の検討から, 弾性エネルギー密度によるアプローチのみでは計算スケールを決定づけるのは困難であると判明したので, 接触面における局所温度などの摩擦に寄与する他の効果を考慮に入れ, モデルの拡張もしくは修正が必要だと考えられる.

### 1.3 研究の目的

本研究の目的は、摩擦係数を理論的に計算・予測するための摩擦モデルを構築することである。具体的には、路面のさまざまなスケールの粗さを考慮した B.N.J. Persson の摩擦モデルを基に、実際の路面粗さデータや粘弾性データを用いた計算を行うことで摩擦係数を計算する。その際、弾性エネルギー密度や最小曲率半径、温度上昇などを考慮したモデルを導入することによって、実際の摩擦試験と対応した実用上有効な摩擦係数の計算方法の確立を目指す。

## 1.4 本論文の構成

本論文の構成を以下に示す.

### 第1章「序論」

本研究の背景, 従来の研究, 研究の目的について述べる.

### 第2章「タイヤ - 路面間の摩擦理論」

タイヤ - 路面間の摩擦について, 概要を述べ, 本研究で用いる Persson の接触理論・摩擦理論について説明する.

### 第3章「路面表面粗さパワースペクトル」

路面表面粗さパワースペクトルについて, 定義と一般的性質を説明し, 実際の表面粗さパワースペクトルデータを示す.

### 第4章「ゴムの粘弾性特性」

ゴムの粘弾性特性について, 摩擦に対する重要性和数学的表現方法について述べ, 摩擦試験用ゴム試験片の複素弾性率を示す.

### 第5章「摩擦試験」

すべり速度・路面条件を変えて行った摩擦試験について述べる.

### 第6章「摩擦係数予測」

ミクロスケールのゴムの挙動を考慮した摩擦モデルを構築し, そのモデルに基づいた摩擦係数の計算について述べる. また, 摩擦試験結果と計算結果の比較・検証を行う.

### 第7章「考察と今後の課題」

本研究の結論と今後の課題について述べる.

---

## 2 タイヤ - 路面間の摩擦理論

---

## 2.1 摩擦現象のマルチスケール性

ゴムと固く粗い路面間の摩擦力は、主として、接触表面間の相互作用により生じる凝着(粘着)項と、ゴムが路面上の凹凸により周期的な変形を行う際に発生するエネルギーロスに起因するヒステリシス項が含まれることが知られている。本章では、ゴムと固く粗い路面間の摩擦において特に重要であるヒステリシス項について、B.N.J.Persson の摩擦モデル[12]を説明する。

路面表面の凹凸はあらゆるスケールで存在する (Fig. 2-1 参照)。例えば、あるスケールで見た凹凸の表面を拡大すると、そこにもまた凹凸が存在する。このような凹凸は分子スケールまで存在する。Persson はあらゆるスケールの路面粗さの摩擦力に対する寄与を全て考慮することで、任意の粗さを持つ路面に対するゴムの摩擦理論を構築した。つまり、摩擦力を、路面表面のあらゆるスケールの凹凸によるエネルギーロスの積算と等価と考えた。ただし、Persson の理論の実際の系への適用においては、ある大きさより小さいスケールの表面粗さの影響は無視される。この点については、6 章で詳しく述べる。

タイヤに用いられる材料特性に対する解析においては、充てん剤とポリマーの相互作用に対する TEM 画像を用いた研究[18]や、分子鎖網目モデルによる粘弾性応答シミュレーション[19]のような分子鎖レベルの現象の解析が行われている。さらに、分子動力学シミュレーションを用いた分子スケールでの摩擦現象の解析[20]も行われている。また、高分子の様々なスケールの現象を組み合わせるシミュレーションを行うソフトウェアの開発も進められている[21][22]。マクロスケールにおいては、表面形状が摩擦に及ぼす影響の有限要素法による解析[23]が行われている。このように、摩擦は様々なスケールで起こる現象が複雑に重なり合って起こる現象であり、そのため、摩擦力や摩擦係数を正確に予測・評価することは非常に困難である。本研究では、タイヤ設計における性能予測において実用上有効な手法として、Persson のモデルに基づく摩擦係数予測手法を提案する。

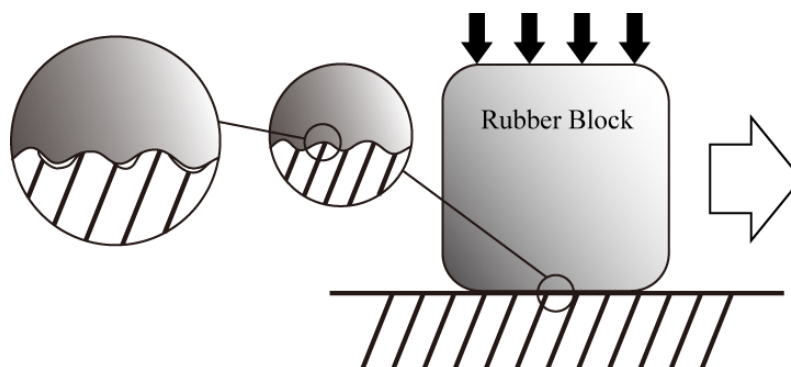


Fig. 2-1 A rubber block squeezed against a hard, rough, substrate.

## 2.2 接触理論

平らな表面を持つゴムブロックが、粗い路面表面に押しつけられている状態を考える。このとき、見かけ上ゴムの表面全体が路面に接触しているが、観察倍率を上げ、より詳細に見ると、そこには接触部と非接触部が混在している。さらにその接触部を拡大して見ると、その中にも接触部と非接触部が混在している (Fig. 2-2 参照)。このように見かけ上の接触領域は観察倍率によって変化し、真の接触領域は見かけの接触領域よりも非常に小さくなる。

Persson の摩擦理論においては路面の凹凸を波数空間で表す。つまり、摩擦力を路面の凹凸の波長の大きさごとに求める。波数は観察倍率に対応し、より大きい波数（より小さい波長）の凹凸ほど観察倍率は大きい。ここで、ある波数の路面凹凸の摩擦力への寄与を考えると、実際にゴムの変形をもたらす、摩擦力に寄与するのは、その波数に対応する観察倍率において、見かけ上ゴムと路面が接触している部分のみである。そこで、波数  $q$  における見かけ上の接触領域の割合  $P(q)$  を考慮することによって、各スケールの凹凸による摩擦力を正しく見積もることが可能となる。 $P(q)$  は次のように定義される。

$$P(q) = \frac{A(\zeta)}{A_0} \quad (2.1)$$

ここで、 $A_0$  は公称接触領域、 $A(\zeta)$  は倍率  $\zeta$  における見かけ上の接触領域である。また、 $q = q_0 \zeta$ 、 $q_0$  は低波数ロールオフであり、 $q$  が最も小さい波数  $q_0$  の  $\zeta$  倍の波数であるというを示している。本節では、この  $P(q)$  の導出を説明する。

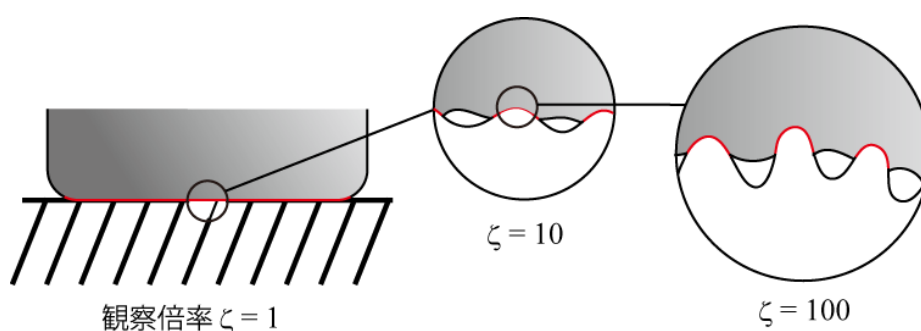


Fig. 2-2 Elastic contact between a flat rubber surface and a hard solid substrate.

ゴムブロックと路面の接触において、 $A_0$  を公称接触領域（倍率  $\zeta = 1$  での見かけの接触領域）とすると、全荷重  $F_N$  は次式のように表される．

$$F_N = \sigma_0 A_0,$$

ここで、 $\sigma_0$  は公称垂直応力である．長さスケール  $\lambda = L/\zeta$  を考える．ここで、 $L$  は公称接触領域の直径である． $q_0 = 2\pi/L$  と定義すると、 $q = q_0\zeta$  より、

$$P(q) = P(q_0\zeta) \equiv P(\zeta).$$

倍率  $\zeta$  における見かけの接触領域の平均垂直応力を  $\langle \sigma \rangle_\zeta$  と書けば、全荷重は常に一定であるので、

$$\sigma_0 A_0 = \langle \sigma \rangle_\zeta P(\zeta) A_0.$$

よって、

$$P(\zeta) = \frac{\sigma_0}{\langle \sigma \rangle_\zeta}. \quad (2.2)$$

したがって、 $P(\zeta)$  を求めるためには、まず  $\langle \sigma \rangle_\zeta$  を求めなければならない．長さスケール  $\lambda = L/\zeta$  での応力の確率分布を  $P(\sigma, \zeta)$  と書けば、

$$\langle \sigma \rangle_\zeta = \frac{\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta)}{\int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta)}. \quad (2.3)$$

よって、式(2.3)を式(2.2)に代入して、

$$P(\zeta) = \frac{\sigma_0 \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta)}{\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta)}. \quad (2.4)$$

あるスケールにおいて、見かけ上の接触領域ではゴムと路面は完全に接触していると仮定すると、

$$P(\sigma, \zeta) = \langle \delta(\sigma - \sigma_1(\mathbf{x})) \rangle,$$

ここで、 $\sigma_1(\mathbf{x})$  は倍率  $\zeta$  でかかる垂直応力である． $\langle \dots \rangle$  はアンサンブル平均を表し、次式のように定義される．

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{A_0} \int d^2x f(x).$$

$\sigma_1 + \Delta\sigma$  を、長さスケール  $L/(\zeta + \Delta\zeta)$  における垂直応力とすると、

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \zeta + \Delta\zeta) &= \langle \delta(\sigma - \sigma_1 - \Delta\sigma) \rangle \\
&= \int d\sigma' \langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \delta(\sigma - \sigma_1 - \sigma') \rangle \\
&= \int d\sigma' \langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle P(\sigma - \sigma', \zeta),
\end{aligned}$$

ここで,

$$\langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dw \langle e^{iw(\sigma' - \Delta\sigma)} \rangle.$$

右辺を  $\Delta\sigma = 0$  の周りでテイラー展開すると,

$$\begin{aligned}
\langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int dw \left\langle e^{iw\sigma'} \left( 1 - iw\Delta\sigma - \frac{w^2}{2} \Delta\sigma^2 + \dots \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dw e^{iw\sigma'} \left( 1 - \frac{w^2 \langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \right),
\end{aligned}$$

ただし, 虚数項と 3 次以上の微小項は無視した. よって,

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \zeta + \Delta\zeta) &= \int d\sigma' P(\sigma - \sigma', \zeta) \frac{1}{2\pi} \int dw e^{iw\sigma'} \left( 1 - \frac{w^2 \langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \right) \\
&= \int d\sigma' P(\sigma - \sigma', \zeta) \left[ \delta(\sigma') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma'^2} \delta(\sigma') \langle \Delta\sigma^2 \rangle \right] \\
&= P(\sigma, \zeta) + \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2}.
\end{aligned}$$

左辺を  $\Delta\zeta = 0$  の周りでテイラー展開すれば, 次式が得られる. ただし, 2 次以上の微小項は無視する.

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \zeta) + \frac{\partial P(\sigma, \zeta)}{\partial \zeta} \Delta\zeta &= P(\sigma, \zeta) + \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial P(\sigma, \zeta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{\Delta\zeta} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}, \quad (2.5)$$

ここで,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{\Delta\zeta}.$$

$P(\sigma, 1) = P_0(\sigma)$  とおくと,

$$P_0(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0).$$

式(2.5)は拡散型の方程式である．一般的な拡散方程式における時間項は倍率  $\zeta$  に，空間座標は垂直応力  $\sigma$  に置き換えられている．よって，倍率  $\zeta$  を上げていく（より小さいスケールを見ていく）と， $P(\sigma, \zeta)$  は  $\sigma$  空間でより広がっていく．表面間の凝着は無いという仮定では， $\sigma = 0$  で剥離が起こるので，境界条件は次のようになる．

$$P(0, \zeta) = 0.$$

式(2.5)の両辺に  $\sigma$  をかけて， $\sigma$  にわたって積分すると，

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\sigma \sigma \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \int_0^\infty d\sigma \sigma f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって，

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta) = 0.$$

$\zeta$  で積分して，

$$\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta) = \sigma_0, \quad (2.6)$$

ただし，総荷重はあらゆるスケールで不変という仮定を用いた．

次に式(2.5)を  $\sigma$  にわたって積分すると，

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\sigma \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \int_0^\infty d\sigma f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) &= f(\zeta) \left\{ \frac{\partial P(\infty, \zeta)}{\partial \sigma} - \frac{\partial P(0, \zeta)}{\partial \sigma} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) &= -f(\zeta) \frac{\partial P(0, \zeta)}{\partial \sigma}. \end{aligned}$$

$\zeta$  で積分して，

$$\begin{aligned} \left[ \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta') \right]_1^\zeta &= - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} \\ \Leftrightarrow \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) - \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, 1) &= - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} \\ \Leftrightarrow \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) &= 1 - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

式(2.4)に式(2.6)と式(2.7)を代入して,

$$P(\zeta) = 1 - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma}. \quad (2.8)$$

次に,  $\langle \Delta \sigma^2 \rangle$  を計算する.

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^2 \rangle &= \frac{1}{A_0} \int d^2x \sigma_z(\mathbf{x}) \sigma_z(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{A_0} \int d^2x \sigma_z(\mathbf{x}) \int d^2q \sigma_z(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2q \sigma_z(-\mathbf{q}) \sigma_z(\mathbf{q}) \\ &= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} \frac{(2\pi)^2}{A_0} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ u_z(\mathbf{q}) &\rightarrow h(\mathbf{q}) \text{ とすれば,} \\ &= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} \frac{(2\pi)^2}{A_0} \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle \\ &= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} C(q), \end{aligned}$$

ここで,  $M_{zz}$  は次式で表される.

$$(M_{zz})^{-1} = -\frac{Eq}{2(1-\nu^2)}.$$

$M_{zz}$  の導出については付録 A に詳細を記述する. よって,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^2 \rangle &= \frac{1}{4} \int d^2q q^2 C(q) \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{1-\nu^2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \int dq q^3 C(q) \int d\phi \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{1-\nu^2} \right|^2. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta \sigma^2 \rangle}{\Delta \zeta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta \sigma^2 \rangle}{\Delta q} q_0 \quad (\because q = q_0 \zeta) \\ &= \frac{1}{8} q_0 q^3 C(q) \int d\phi \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{1-\nu^2} \right|^2. \end{aligned}$$

新たに  $f(\zeta) = f(q)$  と置き,  $g(q) = f(q)/\sigma_0^2$  とすると,

$$g(q) = \frac{1}{8} q_0 q^3 C(q) \int d\phi \left| \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-v^2)\sigma_0} \right|^2. \quad (2.9)$$

ここからは, 式(2.5)を解くことを考える. 式(2.5)を再掲すると,

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}. \quad (2.5)$$

境界条件は,

$$P(0, \zeta) = P(\sigma_Y, \zeta) = 0, \quad (2.10)$$

$$P(\sigma, 1) \equiv P_0(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0). \quad (2.11)$$

ここでは, 一般的な条件を設定し,  $P(\sigma, \zeta)$  は  $0 < \sigma < \sigma_Y$  でのみ定義されたとした. 後に,  $\sigma_Y \rightarrow \infty$  とすることで最終的な解を導く. 式(2.5)の一般解は次のように表される.

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta) \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right). \quad (2.12)$$

式(2.12)を式(2.5)に代入して,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial A_n}{\partial \zeta} \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -f(\zeta) \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 A_n \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right) \right] \\ \Leftrightarrow \frac{dA_n}{d\zeta} &= -f(\zeta) \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 A_n. \end{aligned}$$

$\zeta$  で積分して,

$$A_n(\zeta) = C \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta')\right] \quad (C = \text{const.}).$$

$\zeta = 1$  を代入すれば,

$$C = A_n(1).$$

よって,

$$A_n(\zeta) = A_n(1) \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta')\right].$$

式(2.12)に代入して,

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(1) \exp \left[ - \left( \frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right). \quad (2.13)$$

三角関数の直交性より、次の等式が成り立つ、

$$\int_0^{\sigma_Y} d\sigma \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \sin \left( \frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) = \frac{\sigma_Y}{2} \delta_{nm}, \quad (2.14)$$

ここで、 $n$ 、 $m$  は自然数とする．式(2.12)の両辺に  $\sin(m\pi\sigma/\sigma_Y)$  をかけて、 $0 \sim \sigma_Y$  まで積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sigma_Y} d\sigma P \sin \left( \frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(1) \exp \left[ - \left( \frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \int_0^{\sigma_Y} d\sigma \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \sin \left( \frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right). \end{aligned}$$

式(2.14)を用いると、

$$\int_0^{\sigma_Y} d\sigma P \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) = A_n(1) \exp \left[ - \left( \frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \frac{\sigma_Y}{2}.$$

さらに、 $\zeta=1$ を代入すれば、

$$\begin{aligned} A_n(1) &= \frac{2}{\sigma_Y} \int_0^{\sigma_Y} d\sigma P(\sigma, 1) \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \frac{2}{\sigma_Y} \int_0^{\sigma_Y} d\sigma \delta(\sigma - \sigma_0) \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \frac{2}{\sigma_Y} \sin \alpha_n, \end{aligned} \quad (2.15)$$

ただし、

$$\alpha_n = \frac{n\pi\sigma_0}{\sigma_Y} \equiv s\sigma_0. \quad (2.16)$$

式(2.15)を式(2.13)に代入して、

$$P = \frac{2}{\sigma_Y} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n \exp \left[ - \left( \frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \sin \left( \frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right). \quad (2.17)$$

極限  $\sigma_Y \rightarrow \infty$  をとると、

$$\sum_n \rightarrow \int_0^\infty dn = \frac{\sigma_Y}{\pi} \int_0^\infty ds \quad \left( \because s = \frac{n\pi}{\sigma_Y} \right).$$

よって、式(2.17)は次のようになる.

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \sin(s\sigma_0) \exp \left[ -s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \sin(s\sigma), \quad (2.18)$$

ここで、次に示す  $J$  を考える.

$$J = \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma},$$

ただし、式(2.8)より、 $P(\zeta) = 1 - J$  である. 式(2.18)より、

$$\frac{\partial P(\sigma, \zeta')}{\partial \sigma} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \exp \left[ -s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'') \right] \cos(s\sigma).$$

よって、

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \exp \left[ -s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'') \right], \quad (2.19)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \exp \left[ -s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'') \right] &= \left[ -\frac{1}{s^2} \exp \left[ -s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'') \right] \right]_1^\zeta \\ &= \frac{1}{s^2} \left( 1 - \exp \left[ -s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \right). \end{aligned}$$

式(2.19)に代入して、

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \frac{1}{s^2} \left( 1 - \exp \left[ -s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp \left[ -s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp \left[ -s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right], \end{aligned}$$

ただし、

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} = 1,$$

という関係式を用いた. よって、

$$\begin{aligned} P(\zeta) &= 1 - J \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp \left[ -s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right]. \end{aligned}$$

$s\sigma_0 = x$  と置き換えると、

$$P(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \exp \left[ -x^2 \int_1^\zeta d\zeta' g(\zeta') \right], \quad (2.20)$$

ただし,  $g(q) = g(q_0 \zeta) \equiv g(\zeta)$  であり, 式(2.9)によって与えられる. まとめると,

$$P(q) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \exp \left[ -x^2 G(q) \right], \quad (2.21)$$

ただし, 式(2.9)より,

$$G(q) = \frac{1}{8} \int_{q_0}^{q_1} dq q^3 C(q) \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-v^2)\sigma_0} \right|^2. \quad (2.22)$$

さらに, ほとんどの場合,  $\sigma_0 \ll E(0)$  であり, この場合  $G(q) \gg 1$  となり, 式(2.21)の積分範囲の内  $x \ll 1$  の部分の寄与のみが計算結果に影響する. よって,  $\sin x \approx x$  と近似することができ, 次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} P(q) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \exp \left[ -x^2 G(q) \right] \\ &= [\pi G(q)]^{-1/2} \quad (\because \text{ガウス積分}). \end{aligned}$$

このとき,  $P(q) \sim \sigma_0$  が成り立つので, 2.3 節で導出する摩擦係数の式と合わせると, 摩擦係数が公称垂直応力  $\sigma_0$  に依存しないことがわかる. さらに,  $G(q) \rightarrow 0$  のとき  $P(q) \rightarrow 1$  を考慮すると, 補間公式より, 次の近似式が成り立つ.

$$P(q) = \left( 1 + [\pi G(q)]^{3/2} \right)^{-1/3}. \quad (2.23)$$

## 2.3 すべり摩擦

本節では Persson の摩擦モデルによる摩擦係数の導出を説明する。  
ゴムブロックが粗い路面上をすべる際の変位場  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  について,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t),$$

と仮定すると,

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2x dt \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t)},$$

ここで,  $\mathbf{x} - \mathbf{v}t = \mathbf{k}$  とおくと,  $\mathbf{v}$  は  $\mathbf{x}$  に依存しないため  $d\mathbf{k}/d\mathbf{x} = 1$  より,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2k dt \mathbf{u}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{k} + i(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v})t} \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}) \mathbf{u}(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Fig. 2-3 より, ゴムと路面間のせん断摩擦力を  $\sigma_f$  とすると, 時間  $t_0$  の間に摩擦によって散逸するエネルギー  $\Delta E$  は,

$$\Delta E = \sigma_f A_0 v t. \quad (2.25)$$

また, Fig. 2-4 のように  $\Delta E$  をゴムの変形に使われたエネルギーとして表すと,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int d^2x dt \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int d^2x dt \left[ \frac{d}{dt} \int d^2q d\omega \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int d^2q d\omega (-i\omega) \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) \left[ \int d^2x dt \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \right] \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) \cdot \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{q}, -\omega), \end{aligned} \quad (2.26)$$

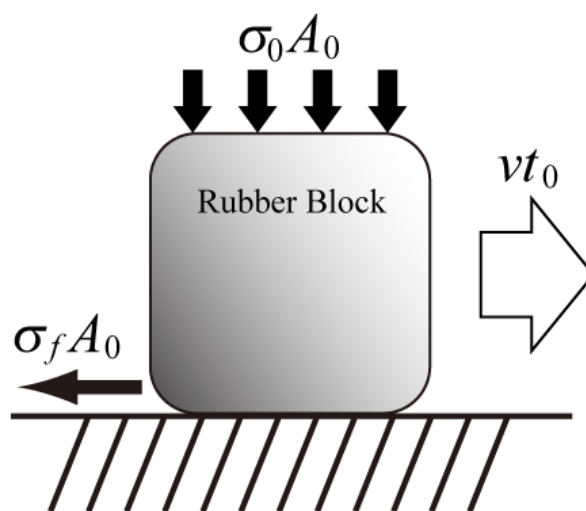


Fig. 2-3 The energy dissipated during the time period  $t_0$  (macro) .

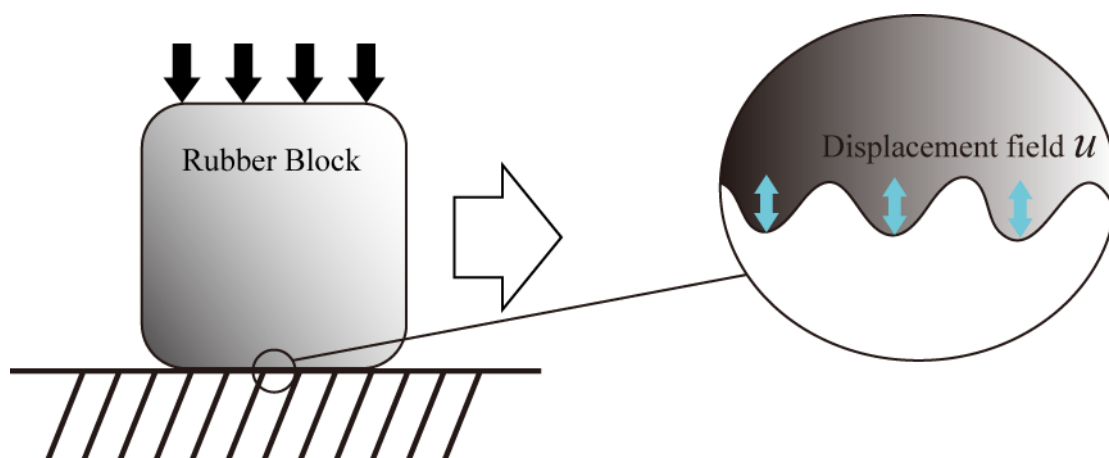


Fig. 2-4 The energy dissipated during the time period  $t_0$  (micro) .

ここで,

$$u_z(\mathbf{q}, \omega) = M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) \sigma_z(\mathbf{q}, \omega),$$

より,

$$\sigma_z(-\mathbf{q}, -\omega) = [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(-\mathbf{q}, -\omega).$$

式(2.26)に代入して, 式(2.24)を用いると,

$$\begin{aligned} \Delta E &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) u_z(\mathbf{q}, \omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(-\mathbf{q}, -\omega) \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \delta(-\omega + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) [\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})]^2 [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}), \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} [\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})]^2 &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \delta(0) \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} dt \\ &= \frac{t_0}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}), \end{aligned}$$

という関係式を用いると,

$$\begin{aligned} \Delta E &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2q d\omega (-i\omega) \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (2.27)$$

式(2.27)と式(2.25)を比較して,

$$\begin{aligned} \sigma_f A_0 v t &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ \Leftrightarrow \sigma_f &= \frac{(2\pi)^2}{v A_0} \int d^2q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle, \end{aligned} \quad (2.28)$$

ここで,  $\langle \dots \rangle$  はアンサンブル平均を表し,

$$\begin{aligned} \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle &= \frac{1}{A_0} \int d^2x u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}), \end{aligned}$$

という関係を用いた. さらに, ゴムが  $\mathbf{x}$  方向にすべるとすれば,  $\omega = vq_x$  と書けるので,

$$\sigma_f = -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle [M_{zz}(-\mathbf{q}, -q_x v)]^{-1}. \quad (2.29)$$

路面の表面プロファイルは次のように記述される.

$$z = h(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} = (x, y)).$$

ゴムが路面上をすべる際, 路面の表面プロファイルに完全に追従するとすれば,

$$u_z \simeq h(\mathbf{x}),$$

と書けるので, 式(2.29)は次のように表される.

$$\sigma_f = -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle [M_{zz}(-\mathbf{q}, -q_x v)]^{-1}. \quad (2.30)$$

今, 路面表面粗さパワースペクトルは次のように定義される.

$$C(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 x \langle h(\mathbf{x}) h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.31)$$

さらに,  $\langle h(\mathbf{x}) h(\mathbf{x}') \rangle$  が  $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$  のみに依存することを用いると, 次の関係式が得られる.

$$\langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q). \quad (2.32)$$

式(2.32)の導出については付録 B に詳細を記述する. 式(2.32)と  $M_{zz}$  を式(2.30)に代入すれば,

$$\begin{aligned} \sigma_f &= -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q) \left[ -\frac{2(1-v^2)}{E(-\omega)q} \right]^{-1} \\ &= i \frac{1}{2} \int d^2 q q^2 \cos \phi C(q) \frac{E(-\omega)}{1-v^2} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2 q q^2 \cos \phi C(q) \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{1-v^2}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

$M_{zz}$  の導出については付録 A に詳細を記述する.  $q_x = q \cos \phi$ ,  $E = E(\omega) = E(qv \cos \phi)$  である. 厳密には  $v$  も周波数に依存するが, その依存度は無視できるほど小さい.

Amontons-Coulomb の法則より, 摩擦係数  $\mu$  を  $\mu = \sigma_f / \sigma_0$  と定義すると,

$$\mu = \frac{1}{2} \int d^2 q q^2 \cos \phi C(q) P(q) \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-v^2)\sigma_0}, \quad (2.34)$$

ここで、2.2 で導出した真実接触領域の割合  $P(q)$  を導入した．さらに、波数空間において直交座標から極座標への座標変換を考えると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} q_x = q \cos \phi \\ q_y = q \sin \phi \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} dq_x = \cos \phi dq - q \sin \phi d\phi \\ dq_y = \sin \phi dq + q \cos \phi d\phi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} dq_x \\ dq_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -q \sin \phi \\ \sin \phi & q \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq \\ d\phi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

右辺の行列のヤコビアン  $|J|$  は、

$$|J| = q \cos^2 \phi + q \sin^2 \phi = q.$$

よって、

$$d^2 q = dq_x dq_y = q dq d\phi.$$

したがって、式(2.34)は次のように表される．

$$\mu = \frac{1}{2} \int dq q^3 C(q) P(q) \int_0^{2\phi} d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-v^2) \sigma_0}. \quad (2.35)$$

さらに、路面がセルフアフィンフラクタル性を持つと仮定すると、

$$C(q) \simeq k \left( \frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)} \quad (k = \text{const.}),$$

と表すことができる．セルフアフィンフラクタル表面についての詳細は 3.2 節で述べる．

$\langle h^2 \rangle = h_0^2 / 2$  と定義すると、式(2.31)より、

$$\begin{aligned} \frac{h_0^2}{2} &= 2\pi \int_{q_0}^{q_1} dq q C(q) \\ &= 2\pi \int_{q_0}^{q_1} dq q k \left( \frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)} \\ &= \frac{\pi}{H} q_0^{2(H+1)} k (q_0^{-2H} - q_1^{-2H}), \end{aligned}$$

ここで、 $q_0 \ll q_1$  より、

$$\frac{h_0^2}{2} \simeq \frac{\pi}{H} q_0^2 k.$$

よって,

$$k \approx \frac{H}{2\pi} \left( \frac{h_0}{q_0} \right)^2.$$

したがって,

$$C(q) \approx \frac{H}{2\pi} \left( \frac{h_0}{q_0} \right)^2 \left( \frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)}. \quad (2.36)$$

式(2.36)を式(2.35)に代入して,  $q = q_0 \zeta$  を用いて  $\mu$  を  $\zeta$  で表した近似式は次のようになる.

$$\mu \approx \frac{1}{4\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^{q_t/q_0} d\zeta \zeta^{-2H+1} P(\zeta) \int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi \operatorname{Im} \frac{E(\zeta q_0 v \cos\phi)}{(1-v^2)\sigma_0}. \quad (2.37)$$

さらに, 式(2.22)は次のように書きかえられる.

$$G(\zeta) = \frac{1}{16\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^\zeta d\zeta' \zeta'^{-2H+1} \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(q_0 \zeta' v \cos\phi)}{(1-v^2)\sigma_0} \right|^2. \quad (2.38)$$

## 2.4 ゴムの温度上昇を考慮した摩擦係数

ゴムブロックの温度場は式(2.39)で定義される.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D \nabla^2 T = \frac{\dot{Q}(x, t)}{\rho C_V} \quad (2.39)$$

ここで、 $\dot{Q}$ は内部摩擦による単位時間単位体積当たりの熱生成、 $D(= \lambda/\rho C_V)$ は温度拡散率、 $C_V$ は比熱である.

ゴムが速度 $v$ で滑っているとき、凹凸は $\omega_0 \sim v/d$ の周波数で脈動力を生み出し、 $d^3$ オーダー体積でのエネルギー散逸が起こる.  $v$ が十分に大きい場合、無視できる熱拡散が時間間隔 $d/v$ で起こり、凹凸近傍のゴムの温度上昇は $\Delta T \approx Q/\rho C_V$ 程度となる. ただし、 $Q$ は(単位体積の)体積要素 $d^3$ 内の摩擦熱エネルギーの量である. 熱拡散の影響が無視できるのは、 $d/v < d^2/D$ のとき、すなわち、有効接触時間が拡散時間よりも小さいときである. 本節では基板が様々な長さスケールの粗さを持つ場合のFlash temperatureの影響の理論について記述する.

最初に、表面粗さが単一長さスケールであり、平均二乗粗さ $h_0$ 、スケール $\lambda_0 = 2\pi/q_0$ の場合を考える. 表面粗さパワースペクトルは $C(q) = (h_0^2/2\pi q_0)\delta(q - q_0)$ 、凹凸の曲率は $R \approx 1/q_0^2 h_0$ と表せられる. 接触領域の代表長さは $\sim d$ である.  $d$ 以下のスケールには凹凸は存在しない(単一スケール)と仮定する. 距離 $d$ をすべるのに掛かる時間は $d/v$ である. この間、要素体積 $\sim d^3$ で生成される熱エネルギーは $\mu F_N d$ であり、垂直抗力 $F_N = \sigma d^2$ と表現できるので、単位体積当たりの熱生成 $Q = \mu F_N d/d^3 = \mu \sigma$ である. 熱拡散を無視すると、温度上昇幅 $\Delta T$ は $\Delta T \approx Q/\rho C_V \approx \mu \sigma/\rho C_V$ と表される. 文献[10]において以下が示されている.

$$\mu \approx \sigma \frac{\text{Im } E(\omega_0, T)}{|E(\omega_0, T)|^2}$$

ただし、 $\omega_0 = vq_0$ である. Greenwood[24][25]の接触理論より、 $\sigma = q_0 h_0 |E(\omega_0, T)|$ なので、摩擦係数は、

$$\mu \approx q_0 h_0 \frac{\text{Im } E(\omega_0, T)}{|E(\omega_0, T)|} \quad (2.40)$$

温度(上昇幅)は、

$$\Delta T \approx (q_0 h_0)^2 \frac{\text{Im } E(\omega_0, T)}{\rho C_V} \quad (2.41)$$

$$T = T_0 + (q_0 h_0)^2 \frac{\text{Im } E(\omega_0, T)}{\rho C_V}$$

となる. ただし、 $T_0$ は環境温度を表している. 複素弾性率 $E(\omega, T)$ は温度に依存するので、Williams-Landel-Ferry (WLF) 変換式を用いて、以下のように書ける.

$$E(\omega, T) = E(\omega a_T/a_{T_0}, T_0) \quad (2.42)$$

ただし,  $a_T$  は以下の式を満たす.

$$\log_{10} a_T \approx -\frac{C_1(T - T_g)}{C_2 + (T - T_g)} \quad (2.43)$$

式(2.40)-(2.43)を使えば, 与えられた複素弾性率  $E(\omega, T_0)$  から温度  $T$  の影響を考慮した摩擦係数  $\mu$  が得られる.

Flash temperature の定量的影響を理解するには, 一般的なゴム粘弾性係数の周波数依存性を理解する必要がある. Fig. 2-5 に典型的な複素弾性率の実部と虚部を示す. 複素弾性率は, 低周波側 ( $\omega < 10^0 \text{ [s}^{-1}]$ ) では実部が比較的小さくて, およそ一定値である“ゴムのよう”特性を持っているが, 高周波側では, 弾性的に硬くなる“ガラスのよう”特性になる. 高周波側 ( $\omega > 10^6 \text{ [s}^{-1}]$ ) では, 実部は一定値となるが, 低周波側より大きい値になる. 中間の周波数帯 ( $10^0 < \omega < 10^6 \text{ [s}^{-1}]$ ) は“移行領域”になっていて, 損失正接が大きくなっている. この領域が路面を滑っている時の摩擦性質を主に決定づけている.

Flash temperature のゴム摩擦への影響は, ゴム振動周波数  $\omega_0$  が,  $\text{Im}E(\omega, T_0)/|E(\omega, T_0)|$  の値が最大値となる周波数  $\omega_1$  よりも, 小さいか大きいかによって依存する. 温度上昇は, 粘弾性スペクトルを高周波側にシフトさせるので,  $\omega_0 < \omega_1$  の場合, Flash temperature は摩擦を減少させる. 一方で  $\omega_0 > \omega_1$  の場合はその逆になる. 大抵の場合は  $\omega_0 < \omega_1$  なので, Flash temperature を考慮に入れると摩擦は減少する. これは極めて重要な実践結果でもある[14].

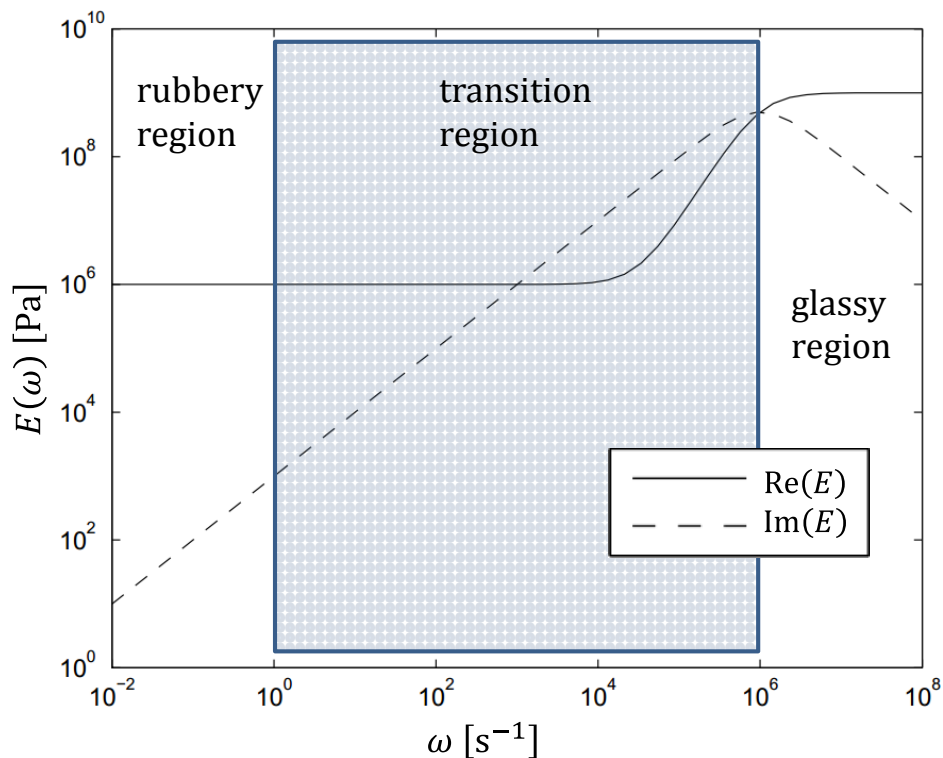


Fig. 2-5 The viscoelastic modulus  $E(\omega)$  of a typical rubber-like material.

ここからは、マルチスケール表面での定常すべりについて議論する。微小凹凸上で発生した熱の重なりも考慮する。すなわち一つの微小凹凸接触領域で生じた温度上昇が周辺の微小凹凸接触領域の温度上昇に寄与するということである。マクロ凹凸内の微小凹凸での熱の推定に‘平均場’型を使う。

ゴムが様々な長さスケールを持った表面上をすべる場合を考える。このとき、ゴム内部の温度上昇における概略図を Fig. 2-6 に示す。Fig. 2-6 では大きい凹凸の中に小さい凹凸が形成されている。環境温度を $T_0$ とすると、大きいスケールでの発熱が小さなスケールを与えるので、 $T_1 = T_0 + \Delta T_1$  ( $d_1$ スケール)で、 $T_2 = T_1 + \Delta T_2$  ( $d_2$ スケール)という具合に、スケールを小さくするに従って温度が上昇すると考えられる。

マクロ凹凸接触領域での平均せん断応力は、以下の式(2.44)になる。

$$\sigma = \sigma_f \frac{A_0}{A(\zeta_m)} \quad (2.44)$$

ここで、 $\sigma_f$ は公称摩擦せん断応力で、 $A(\zeta_m)$ は倍率 $\zeta = \zeta_m = \lambda_0/\lambda_m = q_m/q_0$ におけるマクロ凹凸接触面積である。式(2.35)、式(2.44)、および $P(q) = A(\zeta)/A_0$ の関係を使うと式(2.45)が言える。

$$\sigma_m = \frac{1}{2} \int d^2 q \, q^2 \cos \phi \, C(q) \frac{P(q)}{P(q_m)} \text{Im} \frac{E(qv \cos \phi, T_q)}{1 - v^2} \quad (2.45)$$

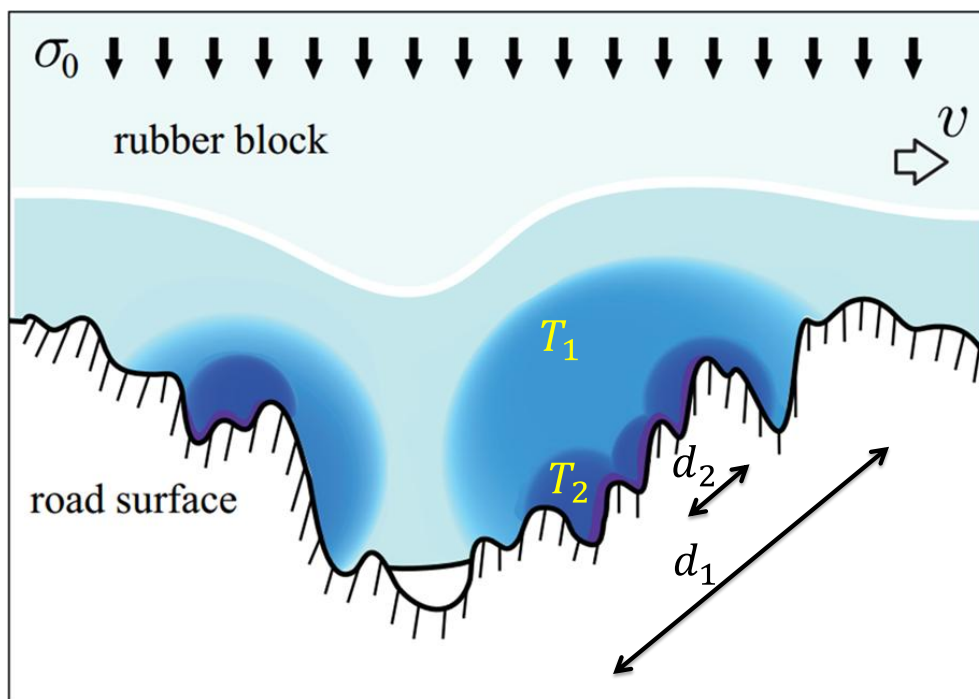


Fig. 2-6 A rubber block sliding on an asperity with shorter wavelength asperities.

ここで、 $T_q$ はスケール $\lambda = 2\pi/q$ における温度である。マクロ接触領域における単位面積、単位時間当たりのエネルギー散逸は式(2.46)になる。

$$J = \frac{v}{2} \int d^2q \, q^2 \cos \phi \, C(q) \frac{P(q)}{P(q_m)} \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi, T_q)}{1 - v^2} \quad (2.46)$$

$\lambda = 2\pi/q$ の凹凸から生じた単位体積当たりのエネルギーは、崩壊して $e^{-2qz}$ オーダーになるので、単位時間、単位体積当たり生成エネルギーを得るために式(2.46)の被積分関数に掛ける係数は、下式から $2q e^{-2qz}$ である。

$$\frac{e^{-2qz}}{\int_0^\infty dz e^{-2qz}} = 2q e^{-2qz}$$

式(2.46)に適用すると、単位体積、単位時間当たりのエネルギー生成は下式である。

$$\dot{Q}(z, t) = \theta(t) \frac{v}{2} \int d^2q \, 2q^3 e^{-2qz} \cos \phi \, C(q) \frac{P(q)}{P(q_m)} \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi, T_q)}{1 - v^2}$$

ここで、熱生成は $t = 0$ の時に始まるとする。ステップ関数を以下のように記述する。

$$\theta(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int d\omega \frac{1}{\omega + i\varepsilon} e^{-i\omega t}$$

ただし、 $\varepsilon$ は微小実数である。従って、

$$\frac{\dot{Q}(z, t)}{\rho C_V} = \int_0^\infty dq \, f(q) \frac{(-1)}{i(2\pi)^2} \int d\omega dk \frac{1}{\omega + i\varepsilon} \frac{4q}{k^2 + 4q^2} e^{i(kz - \omega t)}$$

となる。ここで、

$$f(q) = \frac{v q^4}{\rho C_V} C(q) \frac{P(q)}{P(q_m)} \int d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi, T_q)}{1 - v^2}$$

である。

式(2.39)の温度拡散方程式を解くための境界条件は $z = 0$ において $\partial T / \partial z = 0$ である。すなわちゴムから基板への熱移動を無視するということである。この近似はすべり速度が速い時に特に良い。これは、対称性から $e^{-2qz}$ を $e^{-2q|z|}$ として $-\infty < z < \infty$ で熱拡散方程式を解くのと同値である。この仮定の下に解くと以下の式(2.47)を得る。

$$\begin{aligned} T(z, t) &= T_0 + \int_0^\infty dq \, f(q) \\ &\times \frac{(-1)}{(2\pi)^2} \int d\omega dk \frac{1}{\omega + iDk^2} \frac{1}{\omega + i\varepsilon} \frac{4q}{k^2 + 4q^2} e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned} \quad (2.47)$$

$\omega$ の積分を実行して以下を得る。

$$T(z, t) = T_0 + \int_0^\infty dq \, f(q) \frac{1}{2\pi} \int dk \frac{1}{Dk^2} (1 - e^{-Dk^2 t}) \frac{4q}{k^2 + 4q^2} e^{ikz} \quad (2.48)$$

$\lambda = 2\pi/q$ における温度は下記より得られる.

$$T_q = \frac{\int_0^\infty dz T(z, t) e^{-2qz}}{\int_0^\infty dz e^{-2qz}}$$

式(2.48)を使うと,  $T_q$ は下式のように表される.

$$T_q = T(q) = T_0 + \int_0^\infty dq' g(q, q') f(q') \quad (2.49)$$

ここで,  $g(q, q')$ とは式(2.50)で表される関数である.

$$g(q, q') = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dk \frac{1}{Dk^2} (1 - e^{-Dk^2 t_0}) \frac{4q'}{k^2 + 4q'^2} \frac{4q^2}{k^2 + 4q^2} \quad (2.50)$$

ただし,  $t_0 \approx R/v$ はゴムがマクロ凹凸接触をしている時間の約半分を表している.  $R$ はマクロ凹凸の接触領域の半径である.

式(2.49)および式(2.50)より $T_q$ が得られたら, 摩擦係数は以下の式から計算できる.

$$\mu \approx \frac{1}{2} \int_{q_0}^{q_1} dq q^3 C(q) P(q) \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi, T_q)}{(1 - v^2) \sigma_0} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} P(q) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \exp[-x^2 G(q)] \\ &= [\pi G(q)]^{-1/2} \quad (\because \text{ガウス積分}). \end{aligned} \quad (2.52)$$

$$G(q) = \frac{1}{8} \int_{q_0}^{q_1} dq q^3 C(q) \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(qv \cos \phi)}{(1 - v^2) \sigma_0} \right|^2 \quad (2.53)$$

---

## 3 路面表面粗さパワースペクトル

---

### 3.1 表面粗さパワースペクトルの定義

Persson の摩擦モデルによると，路面表面粗さの摩擦力に対する寄与は路面の表面粗さパワースペクトル  $C(q)$  によって決まる．ここで， $C(q)$  は次のように定義される．

$$C(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x \langle h(\mathbf{x}) h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}, \quad (3.1)$$

ただし， $h(\mathbf{x})$  は位置  $\mathbf{x} = (x, y)$  における高さプロファイルであり， $\langle \dots \rangle$  はアンサンブル平均を表す．ここでは路面の等方性を仮定しているため，路面表面粗さパワースペクトルは波数ベクトル  $\mathbf{q}$  の絶対値  $|\mathbf{q}| = q$  のみに依存する．また，路面表面の統計的性質は基準位置に依らないと仮定しているため，高さプロファイルの自己相関関数は  $h(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}) h(\mathbf{x}_0) = h(\mathbf{x}) h(\mathbf{0})$  であることに注意されたい．つまり，路面表面粗さパワースペクトルは，路面表面の高さプロファイルの自己相関関数のアンサンブル平均をフーリエ変換したものと定義される．物理的には，路面表面粗さパワースペクトルは，路面凹凸の波数成分ごとの強さを表したものであると言える．

## 3.2 セルフアフィンフラクタル表面

セルフアフィンフラクタル表面とは、表面の観察倍率を上げる際、高さを平面座標とは異なる倍率で表示すると、観察倍率を上げる前の表面と同じ表面プロファイルが見られる表面のことである。具体的には、次のようなスケール変換を考える。

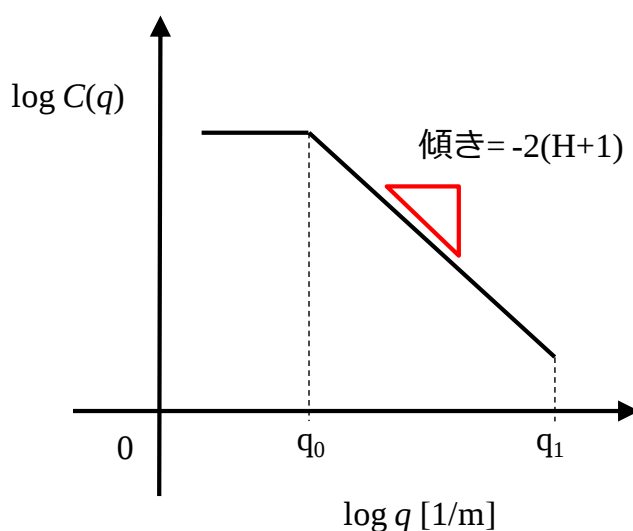
$$x \rightarrow \zeta x, y \rightarrow \zeta y, z \rightarrow \zeta^H z, \quad (3.2)$$

このとき、表面の統計的性質が倍率変更前後で変化しない表面がセルフアフィンフラクタル表面である。ここで、 $H$  はハースト指数であり、フラクタル次元  $D_f$  と、 $D_f = 3 - H$  の関係がある。さらに、セルフアフィンフラクタル表面では、

$$C(q) \sim q^{-2(H+1)}, \quad (3.3)$$

の関係が成り立つ。自然に生成された一般的な表面形状に見られるパワースペクトルと波数の関係を Fig. 3-1 に示す。ここで、セルフアフィンフラクタル性は  $q_0 < q < q_1$  の範囲で見られる。 $q_0$  は低波数ロールオフであり、セルフアフィンフラクタル性を示す波数の最小値を示す。 $q_1$  は高波数カットオフであり、その波長は分子スケールである。

クラック表面や路面のような自然生成された表面は、多くの場合このセルフアフィンフラクタル性を持つことが知られている。



**Fig. 3-1 The surface roughness power spectrum of a surface which is a self-affine fractal for  $q_0 < q < q_1$ .**

### 3.3 路面サンプルの表面粗さパワースペクトル

#### 3.3.1 路面サンプル

本研究の摩擦試験では, 3M 社製すべり止めテープ「セーフティーウォーク (タイプ B)」と, MARAZZI 社製屋外用タイル「コンテニユア」を用いる. 以降, それぞれ路面 A, 路面 B と呼ぶ.



(a)



(b)

**Fig. 3-2 (a) Safety-walk type B (b) Continua.**

### 3.3.2 表面高さデータの計測

路面サンプルの表面粗さパワースペクトルを得るため、まず、表面凹凸の高さデータを計測する必要がある。本研究では、Fig. 3-3 に示すレーザー顕微鏡（KEYENCE VK-9500）を用いて計測を行った。また、Table 3-1 に計測条件を示す。ここで、対物レンズは 10 倍と 100 倍の 2 種を用い、計測倍率はそれぞれ 200 倍と 2000 倍となった。2 種の計測倍率を用いたのは、計測倍率によって最終的に得られるパワースペクトルの波数領域に差異が生じ、計測倍率が高い程、高い波数領域のデータが得られるためである。本計測では、2 種の計測倍率により、 $10^3 < q < 10^7$  [1/m] の波数範囲（ $10^{-3} < \lambda < 10^{-7}$  [m] の波長範囲）の表面粗さパワースペクトルを得る。



Fig. 3-3 Laser microscope.

Table 3-1 Conditions of the measurements.

|                   |                                        |
|-------------------|----------------------------------------|
| Measuring machine | Laser microscope (KEYENCE VK-9500)     |
| Observed area     | 2.849×2.849 [mm <sup>2</sup> ] (×200)  |
|                   | 0.281×0.281 [mm <sup>2</sup> ] (×2000) |
| Points            | 2048×2048                              |

### 3.3.3 表面粗さパワースペクトルの計算

得られた表面高さデータから，路面 A と路面 B のそれぞれの表面粗さパワースペクトルを計算した．路面 A，路面 B のパワースペクトルを Fig. 3-4 に示す．横軸は波数  $q$ ，縦軸はパワースペクトル  $C(q)$  である．実表面の表面粗さパワースペクトルにはばらつきが存在するため， $C(q)$  を求める際，波数  $q$  に対する平均化処理を行った．また，各観測倍率において計測のノイズの影響が出ていると考えられる高波数側のデータはカットした．

計算結果から，用いた試料の表面粗さパワースペクトルのグラフがほぼ直線で得られ，観察した倍率において，試料表面がセルフアフィンフラクタル性を持つことがわかる．路面 A，路面 B の表面粗さパワースペクトルから得られた情報を Table 3-2 に示す． $h_0$  は  $\langle h^2 \rangle = h_0^2 / 2$  と定義され，路面の平均粗さに対応する．ハースト指数  $H$  はグラフの近似直線の傾き  $a$  から， $a = -2(H+1)$  によって計算する．

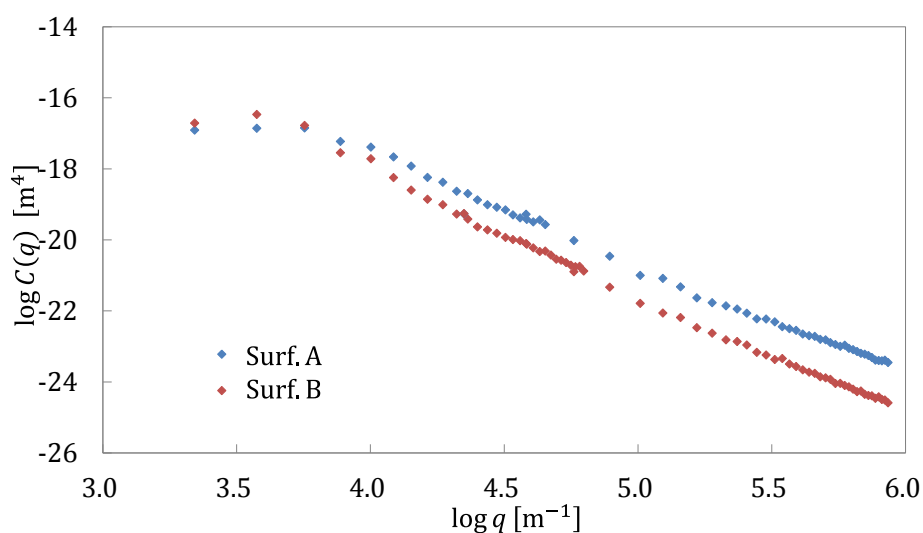


Fig. 3-4 The surface roughness power spectrum of each surface.

**Table 3-2 Surface properties.**

|                         | Surface A                                   | Surface B                             |
|-------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------|
| Sample                  | Safety-Walk type B<br>(Sumitomo 3M Limited) | Continua<br>(MARAZZI Japan Co., Ltd.) |
| $q_0$ [1/m]             | 6684.9                                      | 3341.7                                |
| $h_0$ [ $\mu\text{m}$ ] | 76.5587                                     | 62.7752                               |
| $H$                     | 0.63069                                     | 0.60671                               |

---

## 4 ゴムの粘弾性特性

---

## 4.1 タイヤゴムの粘弾性特性

タイヤ開発において、シミュレーション技術は、性能予測や構造解析など幅広く利用されており、その重要性は大きい。その解析に用いる材料特性として、タイヤゴムの粘弾性特性は非常に重要なものであり、タイヤの性能や特性に直に結びつくものと考えられている (Fig. 1-1 参照)。村岡[26]は、粘弾性特性がタイヤ開発にどのように用いられてきたか、現在どのような研究が行われているかについてまとめ、粘弾性特性を用いた解析手法の今後について考察した。

粘弾性特性がタイヤの摩擦性能に強く影響することはよく知られており、さまざまな研究が行われてきた。Grosch[27]は、粘弾性特性と摩擦特性の関係について実験値を用いて詳細に検証し、両者に密接な関係があることを示した。また、Ludema ら[28]は、接触面積とせん断強さを用いたモデルによって、摩擦特性と粘弾性特性を結びつけた。Persson の理論[12]においてもヒステリシスロスにおいては損失弾性率が、真実接触領域の割合においては複素弾性率のノルムが重要となる。この点において、Persson の理論は従来からの見解をよく表している。

粘弾性特性を用いた研究に関しては、最近ではゴム材料の充てん剤（フィラー）に関するものが増えている。タイヤゴムに用いる充てん剤としてはカーボンブラックが主流であり、近年は望ましい摩擦特性が得られることからシリカも多く用いられている。これら充てん剤の、ポリマーとの相互作用や粘弾性特性に及ぼす影響などについての研究が行われている[29]。

このように、粘弾性特性は摩擦特性を得るための重要な要素の一つであり、それを可能な限り正確に表現することが、摩擦特性の予測精度向上につながる。

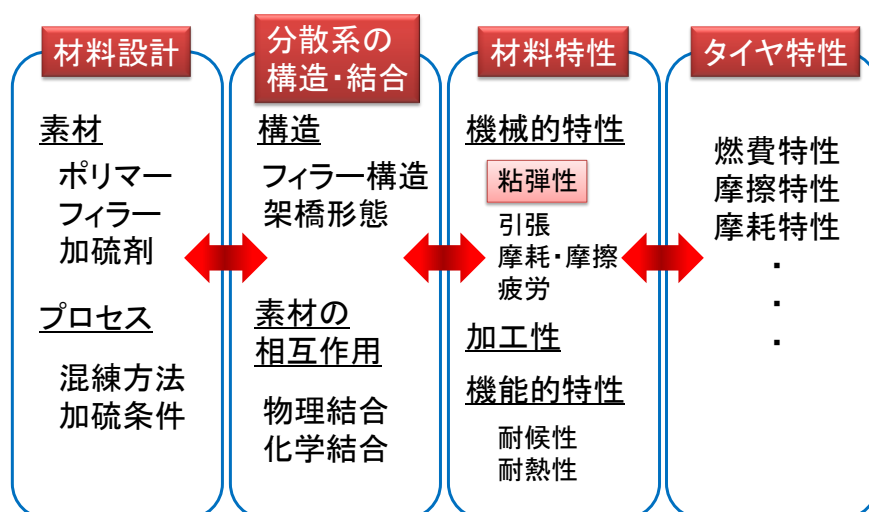


Fig. 4-1 The relation between viscoelasticity and other properties [26].

## 4.2 バネ・ダンパモデルによる粘弾性特性の表現

粘弾性体は非常に速い変形に対しては弾性的な、非常に遅い変形に対しては粘性的な振る舞いを見せる。このような挙動をスプリングとダッシュポットの力学モデルによって表現できれば、数学的に取り扱うことが容易になる。ここで、粘弾性体の典型的な挙動であるクリープと応力緩和を考える。この両挙動を表現するために考案された代表的なモデルが、Voigt・Kelvin モデルと Maxwell モデルである (Fig. 4-2 参照)。

実際の粘弾性体の力学的挙動は複雑であるため、構成要素数を増やして、より正確に挙動を近似することになる。そこで、本研究における粘弾性挙動の表現は Fig. 4-3 に示す一般化 Maxwell モデルを用いる。現在、粘弾性解析ではこの一般化 Maxwell モデルが広く使用されている。一般化 Maxwell モデルの応力緩和式と緩和弾性率はそれぞれ次のように表される。

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sum_{i=1}^n \sigma_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right), \quad (4.1)$$

$$E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^n E_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right), \quad (4.2)$$

ここで、 $\sigma$  は応力、 $E$  はヤング率である。 $\tau$  は緩和時間と呼ばれ、ダッシュポットの粘性係数  $\eta$  を用いて  $\tau = \eta/E$  で与えられる。また、動的変形 (周期変位) を与えた場合、すなわち  $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ 、 $\sigma = \sigma_0 e^{i(\omega t + \delta)}$  を仮定すると、 $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n$  より、

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E_0} = \frac{\sigma_k}{E_k} + \frac{\sigma_k}{i\omega\eta_k} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

また、

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$$

よって、複素弾性率は以下のように表される。

$$E(\omega) = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \sum_{i=0}^n \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = E_0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{1}{E_i} + \frac{1}{i\omega\eta_i}} \quad (4.3)$$

ここで、 $E(\omega)$  を、

$$E(\omega) = E' + iE'',$$

と表したとき、 $E'$  を貯蔵弾性率、 $E''$  を損失弾性率と呼ぶ。

Persson の摩擦理論では、式(4.3)で得られる複素弾性率を用いて摩擦係数の計算を行う。ただし、ゴムの複素弾性率はひずみ依存性があり、ひずみが小さいときは、応力とひずみは線形性を保つが、ひずみが大きくなると一般的には複素弾性率は低下する傾向にある[30]。

路面凹凸にゴムの変形が追従する場合、そのひずみ量を考慮した複素弾性率を用いる必要があり、複素弾性率のひずみ依存性が摩擦係数に与える影響について検討した研究例[31]もあるが、本研究では低ひずみ領域で実験・解析を行うので、ひずみの影響は考慮しないこととする。

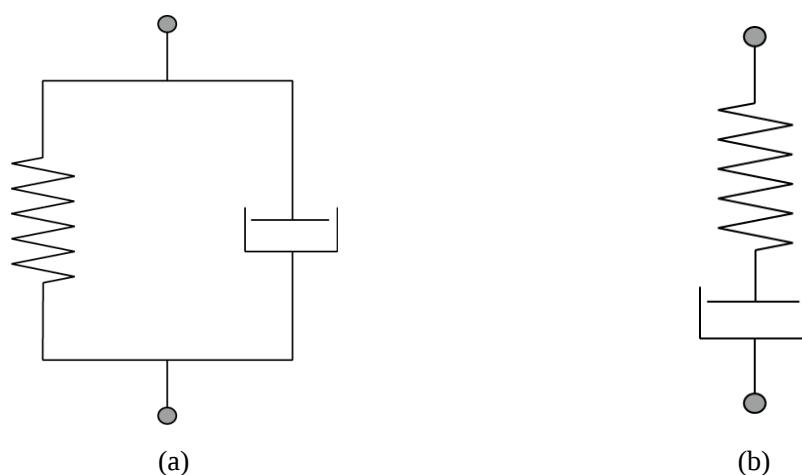


Fig. 4-2 (a) Voigt・Kelvin Model (b)Maxwell Model.

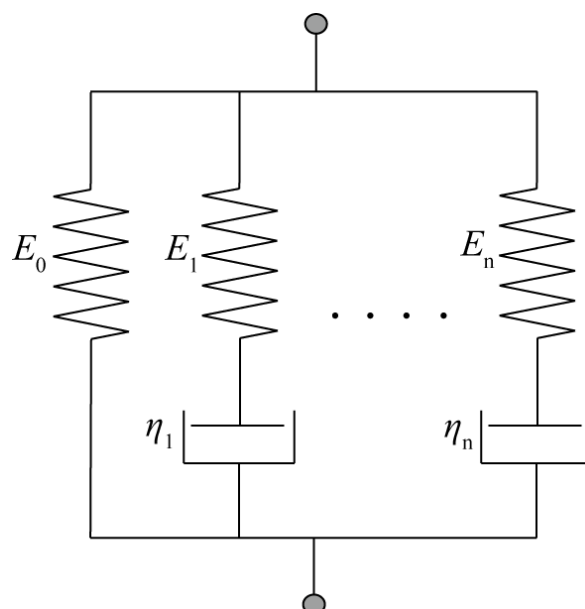


Fig. 4-3 Generalized Maxwell Model.

### 4.3 摩擦試験用ゴム試験片の粘弾性特性

本研究の摩擦試験で用いるゴム試験片は Fig. 4-4 に示す半球状サンプルである。ゴム試験片の配合データを Table 4-1 に示す。ただし phr はゴム重量 100 に対する各種配合剤の重量部である[32]。

Persson の理論による摩擦係数の計算にはゴム試験片の複素弾性率が必要である。そこで、ゴム試験片の複素弾性率を粘弾性試験によって求めた。計測は複数の温度条件下で実施し、WLF 変換式により周波数  $f$  をシフトして重ね合わせ、温度  $T = 300$  [K]、周波数範囲  $5.0 \times 10^{-1} \sim 1.25 \times 10^6$  [Hz] での複素弾性率を算出した。これは、基本的に摩擦試験において路面凹凸によるゴムの変形周波数をカバーしているが、本研究では温度上昇の影響を考慮しているため、WLF 変換式の影響により低い周波数帯での複素弾性率の値が必要となる。Fig. 4-5 は  $5.0 \times 10^{-1} \sim 1.25 \times 10^6$  [Hz] での粘弾性応答（損失正接）に一般化 Maxwell モデルを適用して得られたフィッティング曲線と、WLF 変換式を用いて温度変化によるゴムの粘弾性特性の変化を示している。損失正接  $\tan \delta$  とは、貯蔵弾性率  $E'$  に対する損失弾性率  $E''$  の割合、すなわち  $\tan \delta = E''/E'$  である。損失正接のフィッティング曲線において、100.0 [Hz] 未満の範囲で値の振動が見られる。この振動は実際のデータにはないものであり、計算に影響を及ぼす可能性がある。以上から、100.0 [Hz] より小さい周波数帯域において別のフィッティング曲線を用意する必要があると考えられる。本研究では、実測値を基に 100.0 [Hz] 未満での複素弾性率の値を Maxwell モデルとは別にフィッティング（外挿含む）した。この外挿は Fig. 2-5 に示す一般的なゴムの粘弾性特性を満たしている。最終的に使用した複素弾性率の値を Fig. 4-6 に示す。

$1 \sim 10^5$  [Hz] の周波数帯域では、貯蔵弾性率、損失弾性率ともに単調に増加するが、より大きい周波数でゴムの貯蔵弾性率は一定になり、損失弾性率はピークを迎えた後、減少に転じることが一般に知られている[33]。

ゴム試験片用の材料およびその組成情報の提供、粘弾性試験の実施、複素弾性率の一般化 Maxwell モデルへのフィッティングは株式会社ブリヂストンの協力によって行われた。



**Fig. 4-4 Test piece.**

**Table 4-1 Test piece properties.**

|                    |                                         |
|--------------------|-----------------------------------------|
| Diameter [mm]      | 40                                      |
| SBR [phr]          | 100                                     |
| Carbon black [phr] | 70                                      |
| Softener [phr]     | 40                                      |
| Sulfur [phr]       | 1.5                                     |
| Others             | Age inhibitor, Rubber accelerator, etc. |

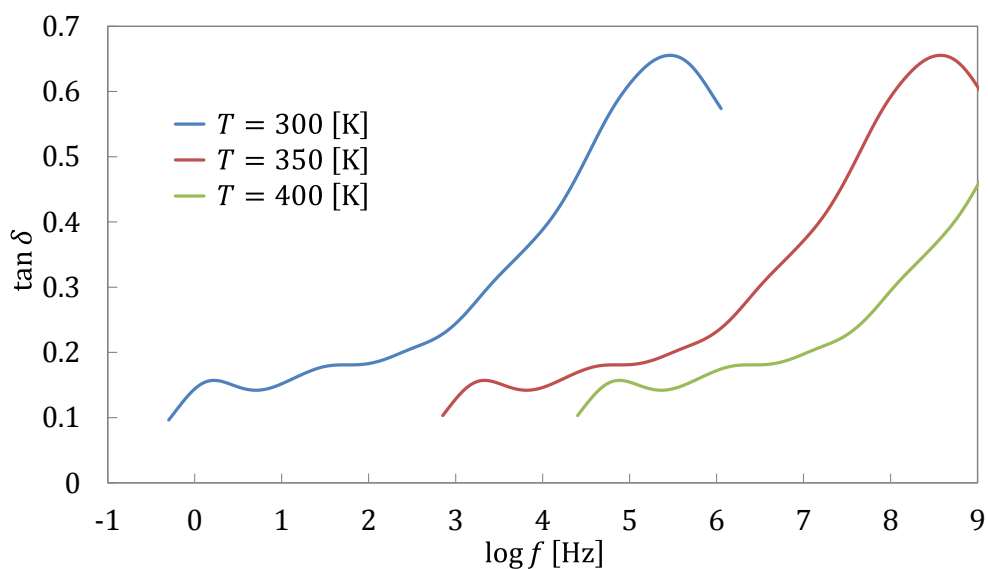


Fig. 4-5 The effect of the rubber temperature on the loss tangent.

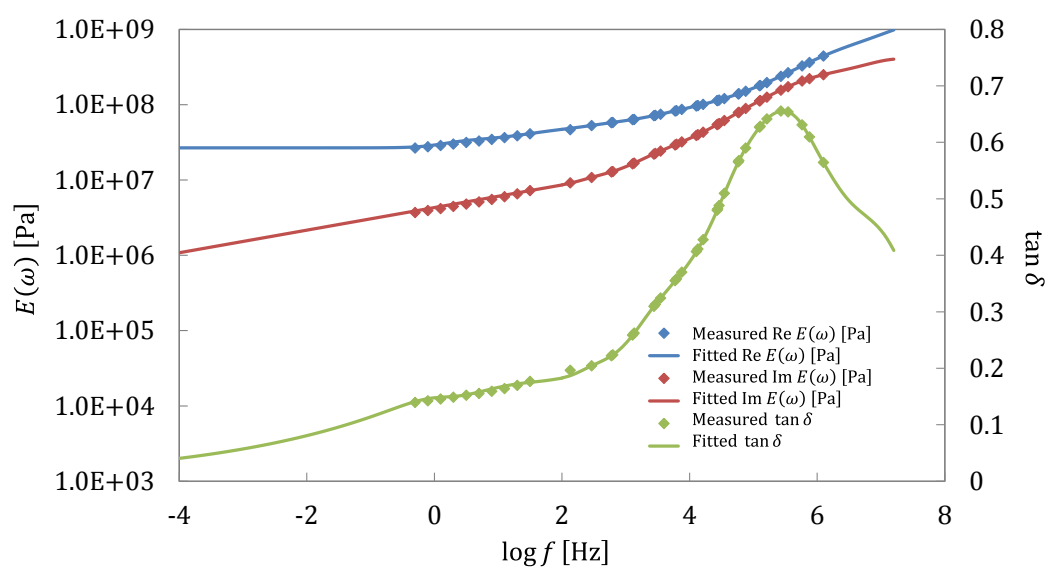


Fig. 4-6 The complex modulus of elasticity.

---

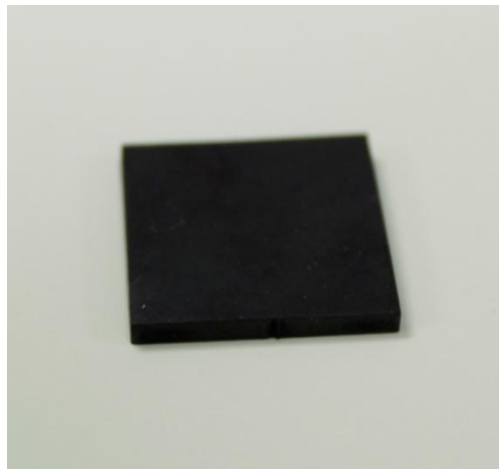
## 5 摩擦試験

---

## 5.1 ゴムサンプル

摩擦試験で用いたゴム試験片は Fig. 5-1 に示すサンプルである．本研究の摩擦試験では正方形(20.0 mm × 20.0 mm × 2.0 mm)の試料を用いた．

ゴムサンプルの配合および粘弾性特性については第 4 章で記述した通りである．



**Fig. 5-1 Square rubber sample.**

## 5.2 直動型摩擦試験

### 5.2.1 試験概要

本項では、直動型摩擦試験機の紹介と、試験条件について述べる。

本試験に用いた TL201Ts (Fig. 5-2 参照) はトリニティーラボ社の直動型摩擦試験機である。TL201Ts では、プラットフォームがボールねじの回転によって地面に平行に移動することですべり速度を生み出す。本試験では、プラットフォームに路面を設置し、正方形サンプルゴム (Fig. 5-1 参照) を押し付けた。試験条件を Table 5-1 に示す。サンプリングスピードが 0.01 秒と十分小さいため、移動距離 20.0 mm で十分なデータ点数が確保できた。



**Fig. 5-2 TL201Ts (© Trinity Lab INC.).**

Table 5-1 Conditions of friction tests.

| Surface | Weight [g] | Sliding velocity<br>[mm/s] | Measuring<br>distance [mm] | The number<br>of trials |
|---------|------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|
| A       | 100        | 0.1                        | 20                         | 3                       |
| A       | 100        | 0.2                        | 20                         | 3                       |
| A       | 100        | 0.3                        | 20                         | 3                       |
| A       | 100        | 0.4                        | 20                         | 3                       |
| A       | 100        | 0.5                        | 20                         | 3                       |
| A       | 100        | 1.0                        | 20                         | 3                       |
| A       | 100        | 2.0                        | 20                         | 3                       |
| A       | 100        | 3.0                        | 20                         | 3                       |
| A       | 100        | 4.0                        | 20                         | 3                       |
| A       | 100        | 5.0                        | 20                         | 3                       |
| A       | 100        | 10.0                       | 20                         | 3                       |
| B       | 100        | 0.1                        | 20                         | 3                       |
| B       | 100        | 0.2                        | 20                         | 3                       |
| B       | 100        | 0.3                        | 20                         | 3                       |
| B       | 100        | 0.4                        | 20                         | 3                       |
| B       | 100        | 0.5                        | 20                         | 3                       |
| B       | 100        | 1.0                        | 20                         | 3                       |
| B       | 100        | 2.0                        | 20                         | 3                       |
| B       | 100        | 3.0                        | 20                         | 3                       |
| B       | 100        | 4.0                        | 20                         | 3                       |
| B       | 100        | 5.0                        | 20                         | 3                       |
| B       | 100        | 10.0                       | 20                         | 3                       |

### 5.2.2 試験結果

路面 A, 路面 B それぞれの試験結果を Fig. 5-3 に示す. 各すべり速度毎にサンプリングされたデータの標準偏差をとって, エラーバーで示している. すべらせた直後のデータは, 計測が安定しなかったため除いた. 路面 B において,  $3.0 \leq v \leq 10.0$  [mm/s] ではデータのばらつきが激しく, 信頼性の高い結果とは言えない. データのばらつきの原因として, ゴムサンプルと路面間で発生するスティックスリップ現象の影響が考えられる.

また, スティックスリップ現象が起きていると考えられる速度域ほどではないが, 路面 B のその他の速度域と路面 A でもデータのばらつきが存在する. そのため, 路面・速度に対する摩擦係数の正確な評価ができたとは言いがたいが, 摩擦係数の速度依存性について傾向を把握するために十分なデータは得られたと考えられる.

路面 A, 路面 B 両方で  $0.1 \leq v \leq 3.0$  [mm/s] において, 摩擦係数は増加した. 路面 A の  $0.3 \leq v \leq 0.4$  [mm/s], 路面 B の  $0.4 \leq v \leq 0.5$  [mm/s] で摩擦係数の平均値は減少しているが, 摩擦係数の減少幅に対するエラーバーの幅が大きいため, 速度の上昇に伴って摩擦係数が増加から減少に転じたとは限らない.

$0.1 \leq v \leq 1.0$  [mm/s] において, 摩擦係数は, 路面 A では 2.2, 路面 B では 2.4 上昇した. また, 両路面とも  $v$  が 1.0 [mm/s] に近づくとつれて, 上昇率が緩やかになっている. 本試験ではどの速度域でも摩擦係数は常に路面 A が路面 B より大きく, 最大値は路面 A で 1.69, 路面 B で 1.33 であった.

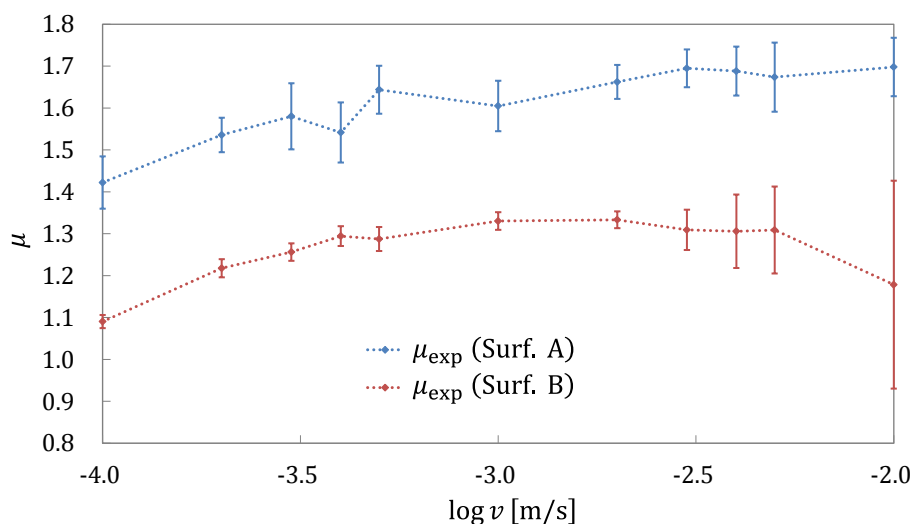


Fig. 5-3 Experimental results of each surface.

---

## 6 摩擦係数予測

---

## 6.1 Persson の摩擦モデルのカットオフ波数 $q_1$ 依存性

### 6.1.1 計算条件

Persson の摩擦理論においては、ミクロ領域の力学的取り扱いについての考察が不足しており、カットオフ波数  $q_1$  の理論的決定法が示されていない。カットオフ波数  $q_1$  の取り方によって摩擦係数の値は大きく変わり得る。そこで、摩擦係数のカットオフ波数  $q_1$  依存性を調べるために、 $q_1 = q_0 \zeta_{\max}$  で定義される  $\zeta_{\max}$  に対するパラメータサーベイを行う。本節では温度上昇の影響を考慮しない。具体的には、 $\zeta_{\max} = 10^{2.0}, 10^{2.4}, 10^{2.8}, 10^{3.2}, 10^{3.6}, 10^{4.0}$  について摩擦係数の計算を行う。

以下に、摩擦係数の計算に必要な情報をまとめる。また、計算条件を Table 6-1 に示す。

#### ➤ 摩擦係数 $\mu$ の計算式

$$\mu = \frac{1}{4\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^{q_1/q_0} d\zeta \zeta^{-2H+1} P(\zeta) \int_0^{2\pi} d\phi \cos\phi \operatorname{Im} \frac{E(\zeta q_0 v \cos\phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0}, \quad (6.1)$$

ここで、真実接触領域の割合  $P(\zeta)$  は次の式で計算される。

$$P(\zeta) = \left(1 + [\pi G(\zeta)]^{3/2}\right)^{-1/3}, \quad (6.2)$$

$$G(\zeta) = \frac{1}{16\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^\zeta d\zeta' \zeta'^{-2H+1} \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(q_0 \zeta' v \cos\phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0} \right|^2 \quad (6.3)$$

#### ➤ すべり速度範囲

本研究の粘弾性試験で得られた複素弾性率の周波数帯域は  $5.0 \times 10^{-1} \sim 1.25 \times 10^6$  [Hz] である。ゴムが路面上をすべる際、路面の波数  $q$  の凹凸から受ける変形周波数  $f$  は  $f = qv/2\pi$  で表されるので、 $f$  の最大値  $1.25 \times 10^6$  [Hz] に対して、 $v_{\max} = 2\pi f_{\max}/q_1$  で表される速度  $v_{\max}$  が、摩擦係数の計算が可能な速度の最大値である。

$q_1$  に対する感度解析では、 $\zeta_{\max} = 10^{2.0}, 10^{2.4}, 10^{2.8}, 10^{3.2}, 10^{3.6}, 10^{4.0}$  について計算を行うが、ロールオフ波数  $q_0$  が大きい路面 A での  $\zeta_{\max} = 10^{4.0}$  に対応するカットオフ波数は  $q_1 = 6684.93 \times 10^4$  [1/m] なので、計算可能な速度の最大値は  $v_{\max} = (2\pi \times 1.25 \times 10^6) / 6684.93 \times 10^4 \approx 0.094$  [m/s] となる。よって、摩擦試験と同じ速度範囲  $10^{-4} \leq v \leq 10^{-2}$  で計算を行うことが可能となる。

Table 6-1 Calculation conditions of friction coefficient.

|                                      |                                           | Surface A                                                                                                                                                      | Surface B |
|--------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Surface data                         | $q_0$ [1/m]                               | 6684.93                                                                                                                                                        | 3341.74   |
|                                      | $h_0$ [ $\mu\text{m}$ ]                   | 76.5587                                                                                                                                                        | 62.7752   |
|                                      | $H$                                       | 0.630691                                                                                                                                                       | 0.606717  |
| Rubber data                          | Viscoelastic property<br>$E(\omega)$ [Pa] | if $\omega < 2\pi \times 10^2$<br>$\text{Re } E(\omega) = \sum_{i=0}^n E_i$ $\text{Im } E(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{0.15} \times 10^{6.634}$ |           |
|                                      |                                           | if $\omega \geq 2\pi \times 10^2$<br>$E_0 + \sum_{i=1}^n \left\{ (1/E_i) + (1/i\omega\eta_i) \right\}^{-1}$                                                    |           |
|                                      | Poisson's ratio $\nu$                     | 0.49                                                                                                                                                           |           |
| Normal stress $\sigma_0$ [Pa]        |                                           | 2450.0                                                                                                                                                         |           |
| Maximum magnification $\zeta_{\max}$ |                                           | $10^{2.0}, 10^{2.4}, 10^{2.8}, 10^{3.2}, 10^{3.6}, 10^{4.0}$                                                                                                   |           |
| Sliding speed range [m/s]            |                                           | $1.0 \times 10^{-4} \sim 1.0 \times 10^{-2}$                                                                                                                   |           |

接触圧 $\sigma_0$ は摩擦試験に合わせて設定した.

$$\sigma_0 = \frac{mg}{A_0} = \frac{0.1 \text{ [kg]} \times 9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}}{(20.0 \times 10^{-3})^2 \text{ [m}^2\text{]}} = 2450.0 \text{ [Pa]}$$

### 6.1.2 計算結果

Fig. 6-1, Fig. 6-2 にゴム試験片の路面 A, 路面 B それぞれの特性を用いて摩擦係数を計算した結果を示す.  $\zeta_{\max} = 10^{2.0}, 10^{2.4}, 10^{2.8}, 10^{3.2}, 10^{3.6}, 10^{4.0}$  とそれぞれ設定して計算した. また, Table 6-2 にそれぞれの  $\zeta_{\max}$  に対応する波長  $\lambda_{\min} = 2\pi/q_0\zeta_{\max}$  を示す.  $\lambda_{\min}$  は考慮する路面凹凸の最小波長を意味する.

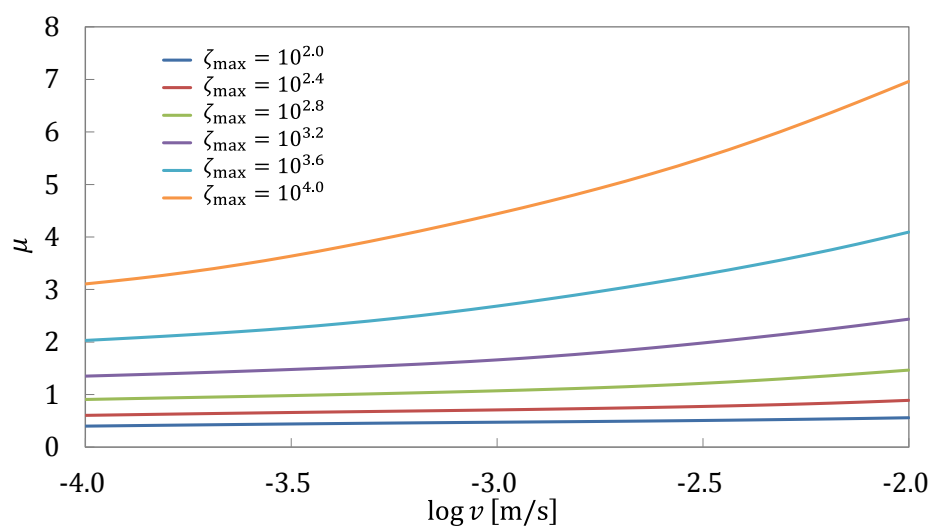
Fig. 6-1 および Fig. 6-2 より, 最大倍率  $\zeta_{\max}$  の増加に伴って摩擦係数が増大している. Persson の摩擦モデルでは, 路面特性によって多少の差はあるものの, 摩擦係数のカットオフ波数  $q_1 (= q_0\zeta_{\max})$  の依存性が強いことがわかる.

一般的に, 吸着膜や潤滑剤などの存在しない比較的清浄な表面同士の摩擦 (乾燥摩擦) の摩擦係数は 0.5~1.5 程度である[35].  $v=10^{-3}$  [m/s] 以上ではゴムの温度上昇と摩耗の影響が出ることを考慮すると[36], 路面 A では  $\zeta_{\max} = 1000 \sim 1500$  程度の計算結果が, 路面 B では  $\zeta_{\max} = 2000 \sim 5000$  程度の計算結果が, 摩擦係数として妥当な値を与える. また, Persson は摩擦係数の数値計算において, 観察された最小の摩耗粒子の大きさからカットオフ波数  $q_1 = 5 \times 10^6$  [1/m] とした[36]が, これは本摩擦モデルの計算において, 路面 A では  $\zeta_{\max} = 747.95$  に対応し, 路面 B では  $\zeta_{\max} = 1496.22$  に対応する. これらの値は上述の  $\zeta_{\max}$  の値と比較して小さく, Persson のカットオフ波数を用いると, 一般的な摩擦係数の値[35]よりも小さい値を見積もってしまう可能性が高い. よって, 本摩擦モデルの計算においては, Persson によるカットオフ波数の決定法とは異なる手法が必要と考えられる.

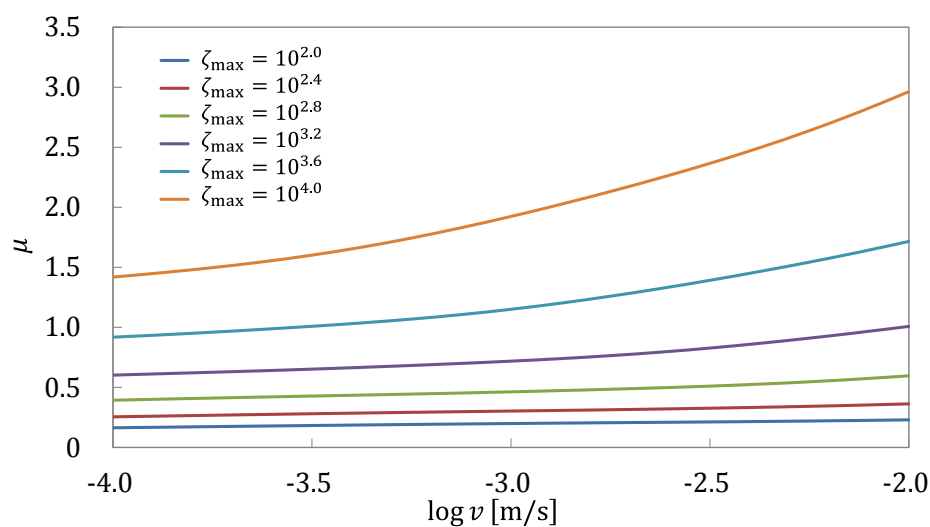
以上より, カットオフ波数  $q_1$  は一律に定めることができず, 計算条件によって適切な値を設定しなければ摩擦係数を正確に評価することができない. カットオフ波数  $q_1$  は摩擦の際ミクロ領域で起こる素過程によって決定されるため, 路面の表面特性やゴム材料特性に依存する可能性があると考えられる.

**Table 6-2 Relation between maximum magnification and minimum wavelength.**

| $\zeta_{\max}$ | Surf. A, $\lambda_{\min}$ [ $\mu\text{m}$ ] | Surf. B, $\lambda_{\min}$ [ $\mu\text{m}$ ] |
|----------------|---------------------------------------------|---------------------------------------------|
| $10^{2.0}$     | 9.40                                        | 18.8                                        |
| $10^{2.4}$     | 5.93                                        | 11.9                                        |
| $10^{2.8}$     | 3.74                                        | 7.49                                        |
| $10^{3.2}$     | 2.36                                        | 4.72                                        |
| $10^{3.6}$     | 1.49                                        | 2.98                                        |
| $10^{4.0}$     | 0.940                                       | 1.88                                        |



**Fig. 6-1 Numerical results of friction coefficient for a rubber sliding on surface A with various maximum magnifications.**



**Fig. 6-2 Numerical results of friction coefficient for a rubber sliding on surface B with various maximum magnifications.**

## 6.2 ゴムの温度上昇が摩擦係数に与える影響

本節では第5章に記述した摩擦試験の結果を基に $q_1$ を決定し、温度上昇を考慮したモデルと考慮しないモデルの計算結果を比較し、温度がゴム摩擦係数に与える影響について考察する。

### 6.2.1 計算条件

解析における計算条件を Table 6-3 にまとめる。基本的に前節と同条件であるが、ゴムの温度計算に必要な情報を追加している。本モデルにおいて、カットオフ波数 $q_1$ の関数としての摩擦係数 $\mu$ は単調増加であるので、実験より求められた摩擦係数 $\mu_{\text{exp}}$ に対して $q_1$ は唯一つに定まる。 $q_1$ の計算には二分法を用いた。Fig. 6-3 にそのアルゴリズムを示す。

温度計算を行う際にゴム温度の波数空間分布 $T_q$ を初めに仮定して入力する必要があるが、本研究では $T_q = T_0 (= \text{const.})$ とした。本研究では定常すべりのみを検討しており、与えた温度分布 $T_q$ の関数形は得られる結果に影響を与えない。

本研究において、摩擦試験は速度区間 $1.0 \times 10^{-4} \leq v \leq 1.0 \times 10^{-2} [\text{m/s}]$ で行われた。仮にカットオフ波数 $q_1$ に速度依存性がないと仮定した場合、それぞれの路面において、凝着力の影響が少なく、温度上昇がほとんど生じていないであろう低速度域での摩擦係数値を使って $q_1$ を決定するのが望ましい。そこで、本研究では摩擦試験における最小速度 $v = 1.0 \times 10^{-4} [\text{m/s}]$ での摩擦係数 $\mu$ から逆算して $q_1$ を決定することとした。路面 A, 路面 B それぞれのカットオフ波数は $q_1 (\text{Surf. A}) = 1.19195 \times 10^7 [1/\text{m}]$ ,  $q_1 (\text{Surf. B}) = 1.92297 \times 10^7 [1/\text{m}]$ となった。

### 6.2.2 計算結果（温度上昇無視）

はじめに、温度上昇の効果を考慮しない計算、すなわち式(6.1)を用いて計算を行った。路面 A, 路面 B それぞれの特性を用いて計算を行った結果と実験結果を比較したものを Fig. 6-4 に示す。図中の実線は計算結果、破線は実験結果を示し、また、青色は路面 A, 赤色は路面 B を示す。

路面 A, 路面 B とともに摩擦係数の合わせ込みを行った速度 $v = 1.0 \times 10^{-4} [\text{m/s}]$ での値は当然一致している。また、速度が $1.0 \times 10^{-3} [\text{m/s}]$ より小さい領域において、摩擦係数の計算値と実験値はよく一致している。しかし、速度が $1.0 \times 10^{-3} [\text{m/s}]$ より大きい領域においては、路面 A, 路面 B とともに計算値の方が実験値より 1 程度大きくなっており、温度上昇を無視したモデルが実際の摩擦現象を表現していない。

速度が $1.0 \times 10^{-3} [\text{m/s}]$ を上回った領域で摩擦係数の計算値が速度の増加に伴って大きく上昇し、実験値から値が逸れているのは、本計算において温度上昇に依る複素弾性率 $E(\omega)$ の特性変化を考慮していないためであると考えられる。

Table 6-3 Calculation conditions with or without flash temperature.

|                                                           |                                                  | Surface A                                                                                                                                                      | Surface B             |
|-----------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| Surface data                                              | $q_0$ [1/m]                                      | 6684.93                                                                                                                                                        | 3341.74               |
|                                                           | $q_m$ [1/m]                                      | 6751.7793                                                                                                                                                      |                       |
|                                                           | $q_1$ [1/m]                                      | $1.19195 \times 10^7$                                                                                                                                          | $1.92297 \times 10^7$ |
|                                                           | $h_0$ [ $\mu\text{m}$ ]                          | 76.5587                                                                                                                                                        | 62.7752               |
|                                                           | $H$                                              | 0.630691                                                                                                                                                       | 0.606717              |
| Rubber data                                               | Viscoelastic property<br>$E(\omega)$ [Pa]        | if $\omega < 2\pi \times 10^2$<br>$\text{Re } E(\omega) = \sum_{i=0}^n E_i$ $\text{Im } E(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{0.15} \times 10^{6.634}$ |                       |
|                                                           |                                                  | if $\omega \geq 2\pi \times 10^2$<br>$E_0 + \sum_{i=1}^n \left\{ (1/E_i) + (1/i\omega\eta_i) \right\}^{-1}$                                                    |                       |
|                                                           | Poisson's ratio $\nu$                            | 0.49                                                                                                                                                           |                       |
|                                                           | Mass density<br>$\rho$ [ $\text{kg/m}^3$ ]       | 1000.0                                                                                                                                                         |                       |
|                                                           | Heat conductivity<br>$\lambda$ [ $\text{W/mK}$ ] | 0.2                                                                                                                                                            |                       |
|                                                           | Specific heat<br>$C_V$ [ $\text{J/kgK}$ ]        | 1850.0                                                                                                                                                         |                       |
| Glass-transition temperature $T_g$ [ $^{\circ}\text{C}$ ] |                                                  | -15.0                                                                                                                                                          |                       |
| Environmental temperature $T_0$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]    |                                                  | 26.85                                                                                                                                                          |                       |
| Normal stress $\sigma_0$ [Pa]                             |                                                  | 2450.0                                                                                                                                                         |                       |
| Sliding speed range [m/s]                                 |                                                  | $1.0 \times 10^{-4} \sim 1.0 \times 10^{-2}$                                                                                                                   |                       |

ゴムの材料定数は文献[37]を参考に設定した。また、 $q_m$ はマクロ凹凸接触が生じるスケールの波数である。一般的に $3000 < q_m < 7500 \text{ [m}^{-1}\text{]}$ であり[14]，本研究では一般的な $q_m$ の値の範囲内で，温度上昇幅（6.2.3節の後半部および付録C参照）が妥当な値となるように設定した。

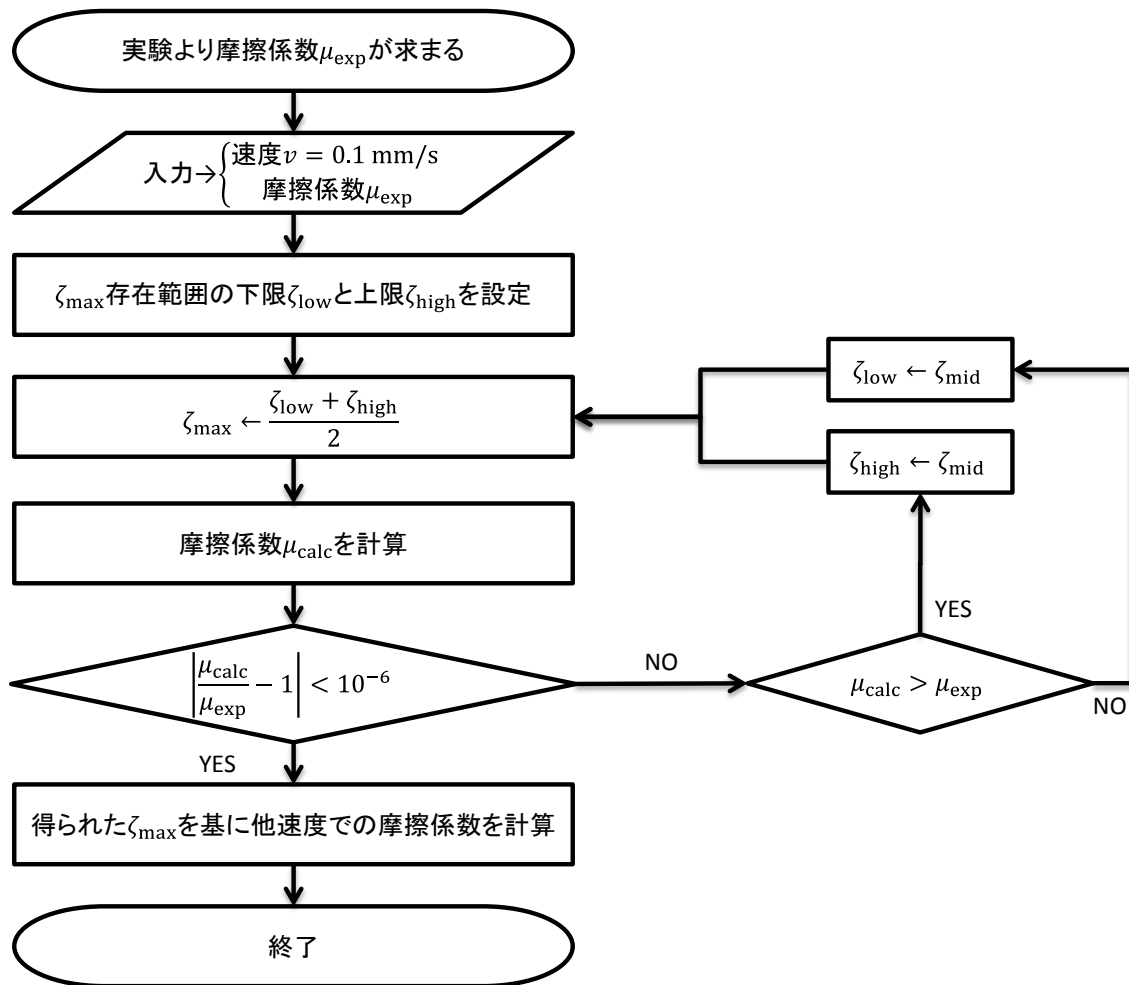
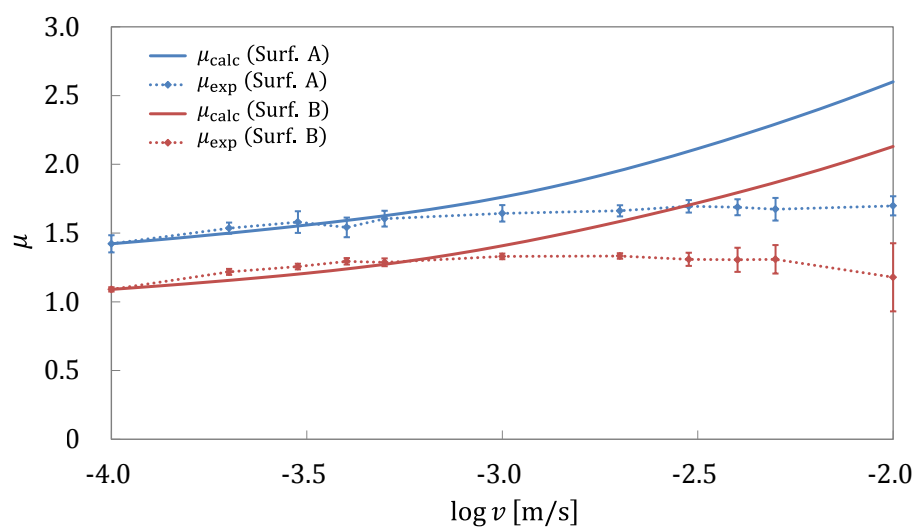
Fig. 6-3 The calculation algorithm for  $\zeta_{\max}$  on each surface.

Fig. 6-4 Numerical results of friction coefficient without flash temperature.

### 6.2.3 計算結果（温度上昇考慮）

本項では温度上昇を考慮した計算結果を示す．計算手法は第 2 章に示した通りである．WLF 変換式の係数には  $C_1 = 14.9$ ,  $C_2 = 76.5$  の値を用いた．路面 A, 路面 B それぞれの特性を用いて計算を行った結果と実験結果を比較したものを Fig. 6-5 に示す．Fig. 6-5 において (a) は路面 A, (b) は路面 B についての結果を示し，図中の実線は計算結果，破線は実験結果を示す．また，Fig. 6-6 には各すべり速度におけるゴム温度（最小スケール）を，Fig. 6-7 には，すべり速度  $v = 0.01$  [m/s] での各スケールにおけるゴム温度を示す．

路面 A, 路面 B とともに摩擦係数の合わせ込みを行った速度  $v = 1.0 \times 10^{-4}$  [m/s] での値はおおよそ一致している．僅かに値がずれているのは，実際の計算で  $1.5$  [°C] 前後の温度上昇が発生したことが原因である．

本研究で実験および計算を行った速度域全体において，路面 A においては計算値と実験値がよく一致していると言える．温度上昇を考慮していないモデルと比較して，速度増加に伴う摩擦係数の上昇が抑えられたためである．一方，路面 B においては，高速度域にて計算値と実験値の大きな差が見られる．これは，摩擦試験においてスティックスリップ現象が発生し，実験値が本来の値よりも小さくなっていることが原因であると考えられる．

温度上昇を無視したモデルと比較した場合，路面 A, B とともに摩擦係数予測精度が高くなった．このことから，ゴム - 路面間の摩擦係数予測における温度上昇の考慮は重要であると考えられる．

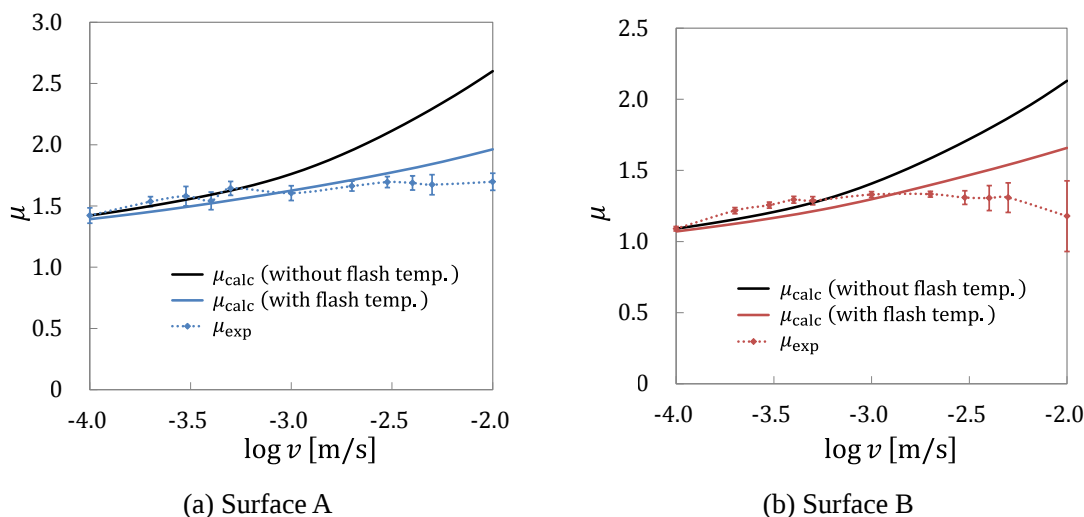
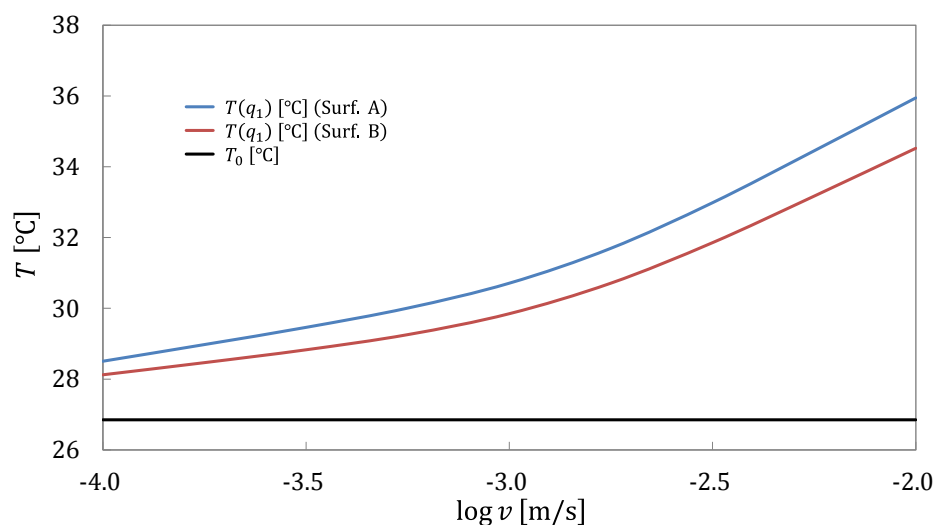
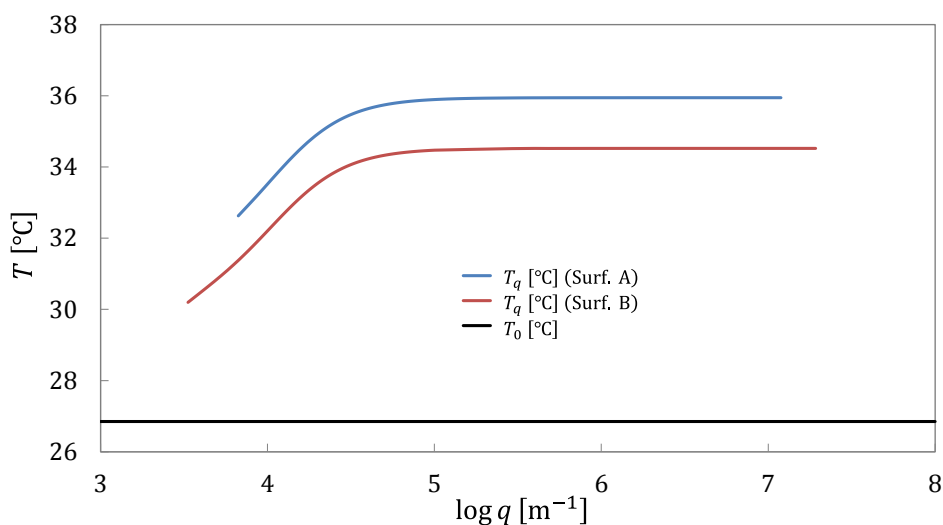


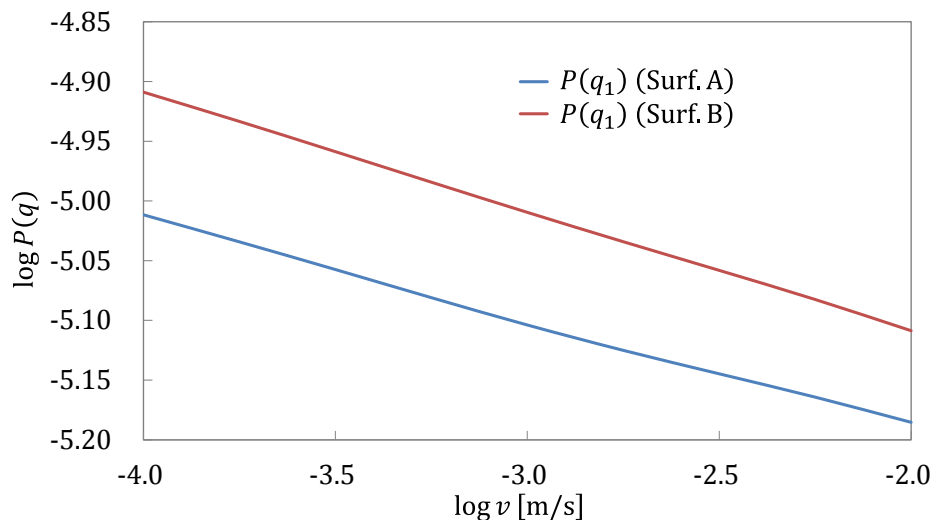
Fig. 6-5 Numerical results of friction coefficient with flash temperature.



**Fig. 6-6 Numerical results rubber temperature as a function of the logarithm of sliding velocity at the scale of cut-off wavevector  $q_1$  of each surface.**



**Fig. 6-7 Numerical results of rubber temperature as a function of the logarithm of the wave vector at sliding velocity  $v = 0.01$  [m/s] of each surface.**



**Fig. 6-8 Numerical results of the normalized area of contact as a function of the logarithm of the sliding velocity.**

#### ➤ 温度上昇幅の妥当性検証

サンプルゴムが路面上をすべるとき、摩擦によって生じた単位時間当たり、単位面積当たりの発熱量 $\bar{Q}$  [W/m<sup>2</sup>]は、摩擦係数 $\mu$ 、荷重 $W$  [N]、すべり速度 $v$  [m/s]、正方形サンプルゴムの一辺の長さ $d$  [m]を用いて、

$$\bar{Q} = \frac{\mu W v}{d^2} \quad (6.4)$$

と表すことができる。

Persson の理論に基づき、摩擦によるエネルギーが、全てゴムサンプルに流入すると仮定し、ゴムの熱伝導率を $\lambda$  [W/mK]とすると、サンプルゴムの表面温度上昇 $\Delta T_m$  [°C]は、

$$\Delta T_m = 0.849 \frac{\bar{Q} d}{\lambda} \quad (6.5)$$

と表すことができる[38].

式(6.4)(6.5)に基づき、すべり速度 $v = 0.01$  [m/s]における表面温度上昇 $\Delta T_m$ を計算したところ、路面 A で $\Delta T_m = 3.53$  [°C]、路面 B で $\Delta T_m = 2.45$  [°C]であった。

一方, Fig. 6-7 に示すすべり速度 $v = 0.01$  [m/s]におけるスケール $q_0$ での温度上昇幅 $\Delta T$ は、路面 A で $\Delta T(q_0) = 5.75$  [°C]、路面 B で $\Delta T(q_0) = 3.35$  [°C]であった。

各路面において、 $\Delta T_m < \Delta T(q_0)$ となっており、スケールが小さいほど温度上昇幅が大きいという本研究の理論と一致しているため、この温度計算結果は妥当であると言える。

#### 6.2.4 考察

本モデルにおいて、摩擦係数は速度に対して単調増加である。実験値も速度に対して単調増加であったが、温度上昇を考慮しない場合、速度の増加に従って計算値が実験値より大きくなる結果となる。温度上昇を考慮した場合、速度に対する摩擦係数の上昇率を抑えられ、実験値に近づき摩擦係数の予測精度が高くなる。

今回、摩擦係数を合わせ込んだ速度  $v = 1.0 \times 10^{-4}$  [m/s] において、1.5 [°C] 程度の温度上昇が起こったので、より小さい速度で合わせ込んだ方が良い予測が得られる可能性が高い。ただ、その差異は小さいので、 $v = 1.0 \times 10^{-4}$  [m/s] での合わせ込みでも十分な結果が得られたと言える。また、路面 A、路面 B ともに低速度域で、計算値よりも実験値の方が速度に対する摩擦係数上昇幅が大きかった。これは、ピークが低速度側に現れると言われている凝着項の影響であると考えられる[39][40]。

今回の計算では路面 B の方が路面 A よりも温度上昇の幅が小さい結果となった。この主な原因はロールオフ波長の値が路面 B の方が小さい ( $q_0(\text{Surf. A}) > q_0(\text{Surf. B})$ ) ことである。すなわち、路面 B の方が大きい体積スケールで熱の拡散が起こり、温度の上昇幅が小さくなったのである。

本節ではカットオフ波数  $q_1$  を実験結果との合わせ込みで求め、Persson モデルと同様に速度に依存せず  $q_1$  を固定して計算を行った。カットオフ波数  $q_1$  はマイクロ領域で起こる摩擦時の素過程によって決定されるため、ゴム材料特性や路面特性、すべり速度、ゴム温度、接触圧など様々な要素の影響を受けると考えられる。本モデルの将来的な産業利用を考慮すると、カットオフ波数  $q_1$  は実験との合わせ込みで求めるのではなく、材料や環境の情報から決定されるのが望ましい。そこで、次節以降は  $q_1$  の理論的導出の検討について記述する。

## 6.3 カットオフ波数の理論的な同定方法の検討

### 6.3.1 弾性エネルギー密度を用いた手法

熊沢[17]はゴムの弾性エネルギー密度 $U_{el}(q)$ が限界値 $U_{el}^{max}$ に達した際にゴムが破壊し、そのスケールが摩擦現象のカットオフ波数 $q_1$ に一致する、すなわち $U_{el}(q) = U_{el}^{max}$ であるという仮説を立てた。弾性エネルギー密度導出については付録 0 に記述する。

熊沢は $U_{el}^{max}$ を一定とした計算を行ったが[17]、温度上昇を無視したモデルを使用しており、また、熊沢の計算結果は実験値とあまり良く一致していなかった。そこで、本研究では温度上昇を考慮したモデルを使用し、熊沢の仮説を検証する。

手順としては、まず付録 D に基づき、温度上昇が比較的少ない本研究における最小速度 $v = 1.0 \times 10^{-4}$  [m/s]での摩擦係数実験値から限界弾性エネルギー密度 $U_{el}^{max}$ を逆算し、その $U_{el}^{max}$ の値を用いて他の速度での摩擦係数を求める。前節とは異なり、カットオフ波数 $q_1$ に速度依存性があり、最初に求めた $U_{el}^{max}$ に一致するように推移するというものである。このアルゴリズムを Fig. 6-9 に示しておく。

計算の結果、路面 A と路面 B で $U_{el}^{max}$ の値は異なり、路面依存性があることが分かった。各路面における $U_{el}^{max}$ の値を他の計算条件と併せて Table 6-4 にまとめる。Table 6-4 の条件の下で計算を速度ごとに各路面において摩擦係数計算を行った結果を Fig. 6-10 に示す。また、摩擦係数の実験値から各速度におけるカットオフ波数 $q_1$ を逆算し、摺動時の限界弾性エネルギーを計算したものを Fig. 6-11 に示す。

熊沢の仮説に基づいて温度上昇を考慮して、限界弾性エネルギー密度 $U_{el}^{max} = \text{const.}$ の条件の下に計算を行ったが、Fig. 6-10 の結果が示す通り、熊沢のモデルで摩擦係数の良い予測が出来たとは言えない。また、Fig. 6-11 を見る限り、 $U_{el}^{max}$ には速度依存性があり、熊沢の仮説が正しかったとは言い難い。しかし、材料の破壊は材料に加えられたエネルギーに依存することは一般に知られており、限界弾性エネルギー密度に基づいてゴムの破壊条件を設定することによるカットオフ波数 $q_1$ の決定は良い検討だったと言える。

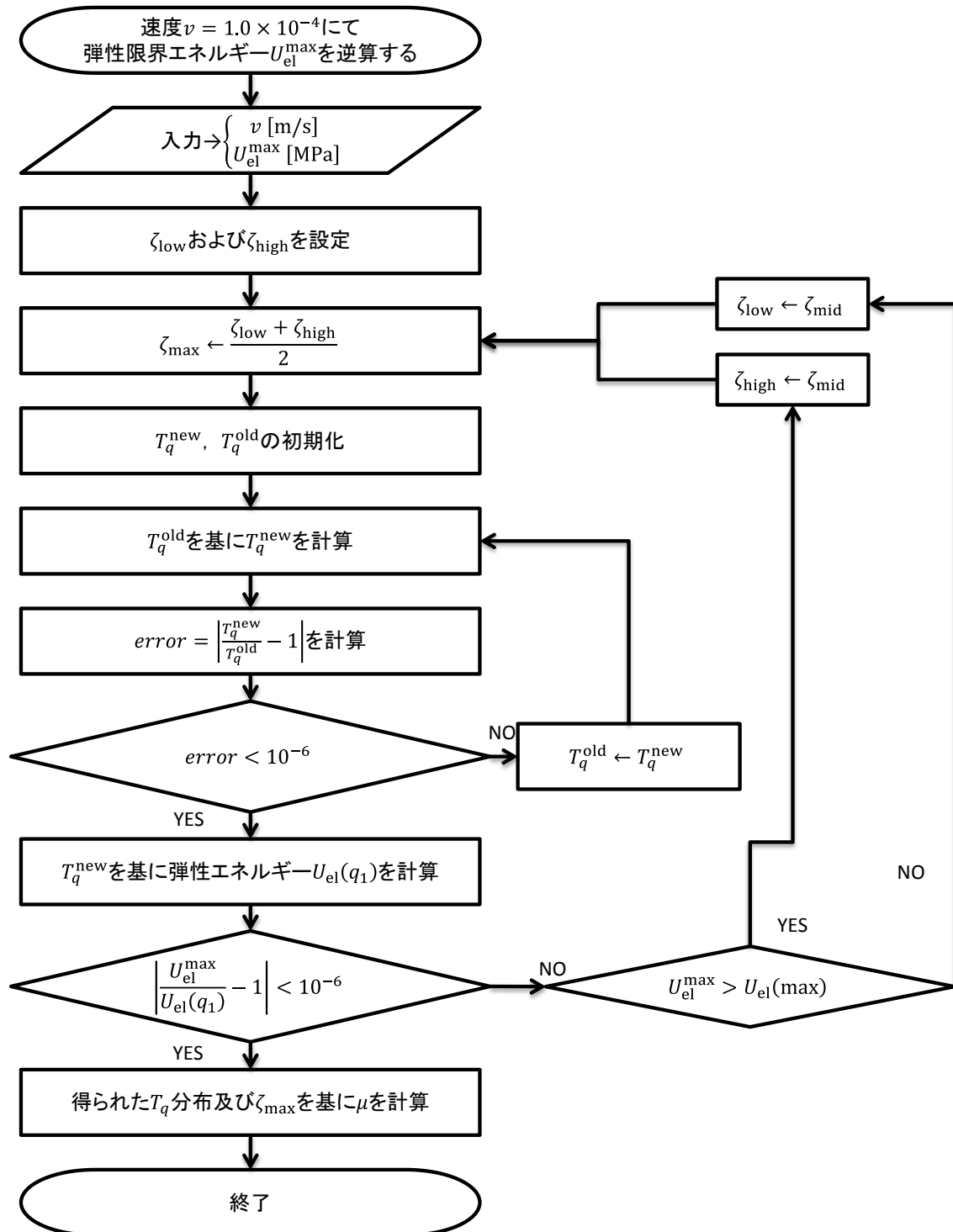


Fig. 6-9 The calculation algorithm for elastic energy density.

Table 6-4 Calculation conditions of elastic energy density.

|                                                        |                                                              | Surface A                                                                                                                                                      | Surface B |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Surface data                                           | $q_0$ [1/m]                                                  | 6684.93                                                                                                                                                        | 3341.74   |
|                                                        | $q_m$ [1/m]                                                  | 6751.7793                                                                                                                                                      |           |
|                                                        | $h_0$ [ $\mu\text{m}$ ]                                      | 76.5587                                                                                                                                                        | 62.7752   |
|                                                        | $H$                                                          | 0.630691                                                                                                                                                       | 0.606717  |
| Rubber data                                            | $U_{\text{el}}^{\text{max}}$ [MPa]                           | 163.519                                                                                                                                                        | 125.095   |
|                                                        | Viscoelastic property<br>$E(\omega)$ [Pa]                    | if $\omega < 2\pi \times 10^2$<br>$\text{Re } E(\omega) = \sum_{i=0}^n E_i$ $\text{Im } E(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{0.15} \times 10^{6.634}$ |           |
|                                                        |                                                              | if $\omega \geq 2\pi \times 10^2$<br>$E_0 + \sum_{i=1}^n \left\{ (1/E_i) + (1/i\omega\eta_i) \right\}^{-1}$                                                    |           |
|                                                        | Poisson's ratio $\nu$                                        | 0.49                                                                                                                                                           |           |
|                                                        | Mass density<br>$\rho$ [ $\text{kg/m}^3$ ]                   | 1000.0                                                                                                                                                         |           |
|                                                        | Heat conductivity<br>$\lambda$ [ $\text{W/mK}$ ]             | 0.2                                                                                                                                                            |           |
|                                                        | Specific heat<br>$C_V$ [ $\text{J/kgK}$ ]                    | 1850.0                                                                                                                                                         |           |
|                                                        | Glass-transition<br>temperature $T_g$ [ $^{\circ}\text{C}$ ] | -15.0                                                                                                                                                          |           |
| Environmental temperature $T_0$ [ $^{\circ}\text{C}$ ] |                                                              | 26.85                                                                                                                                                          |           |
| Normal stress $\sigma_0$ [Pa]                          |                                                              | 2450.0                                                                                                                                                         |           |
| Sliding speed range [m/s]                              |                                                              | $1.0 \times 10^{-4} \sim 1.0 \times 10^{-2}$                                                                                                                   |           |

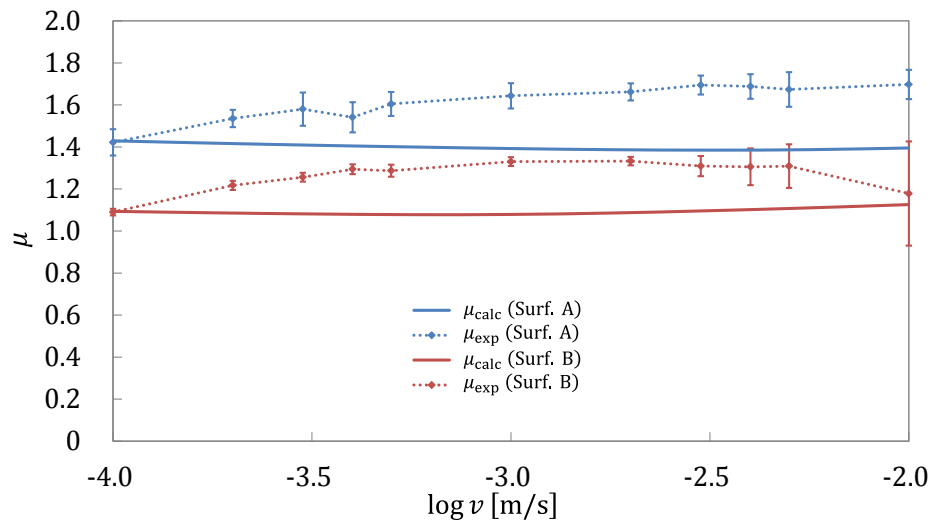


Fig. 6-10 Numerical results of friction coefficient based on elastic energy density.

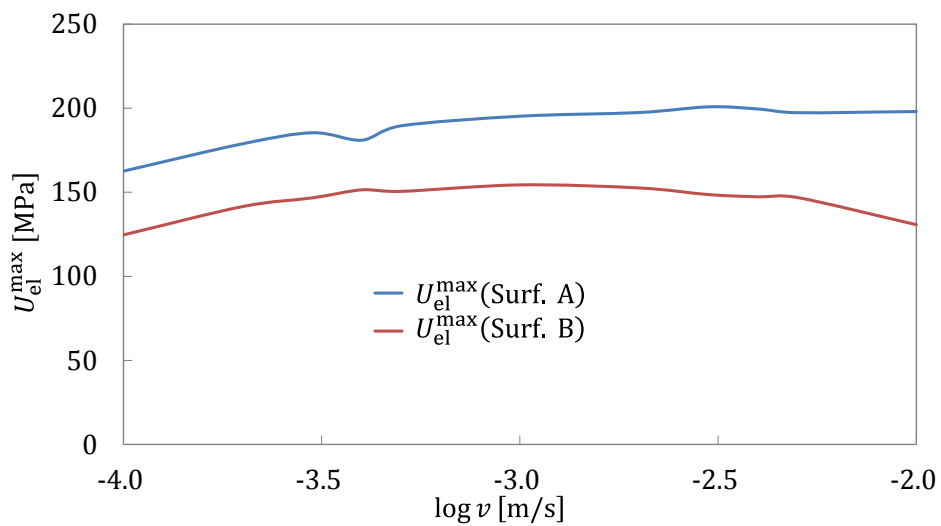


Fig. 6-11 Numerical results of elastic energy density based on friction tests.

### 6.3.2 最小曲率半径を用いた手法

前節の計算において、温度上昇を考慮したモデルでカットオフ波数 $q_1$ は、路面には依存するがものの、すべり速度に対して一定の値を取ることで良い予測結果が得られるということが分かった。そこで、本研究では路面特性からカットオフ波数 $q_1$ の決定が可能なのではないかと考えた。本項では、路面特性からカットオフ波数 $q_1$ を決定する手法の検討・提案を行う。

#### ➤ 波数 $q$ における曲率半径 $R(q)$ の導出

付録 D より、セルフアフィニフラクタル性を持つ路面において、波数 $q$ における凹凸(波)の代表高さ $h_q$ は以下の式で表せる。

$$h_q = h_0 \left( \frac{q}{q_0} \right)^{-H} \quad (6.6)$$

ただし、 $q_0$ はロールオフ波長、 $h_0$ 平均二乗粗さ、 $H$ はハースト指数である。また、このとき路面の凹凸先端付近の曲率半径 $R(q)$ は以下の式で近似できる。

$$R(q) = \frac{1}{q^2 h_q} \quad (6.7)$$

式(6.6)を式(6.7)に代入すると以下の式が得られる。

$$\begin{aligned} R(q) &= \frac{1}{q^2 h_0 \left( \frac{q}{q_0} \right)^{-H}} \\ &= \frac{1}{q_0^H h_0} q^{-(2-H)} \end{aligned} \quad (6.8)$$

また、式(6.8)を波数 $q$ について解くと、以下の式(6.9)が得られる。

$$q = \left[ \frac{1}{q_0^H h_0 R(q)} \right]^{\frac{1}{2-H}} \quad (6.9)$$

➤ 曲率半径 $R(q)$ の計算

式(6.8)に基づき、曲率半径 $R(q)$ を計算する。Table 6-5 に計算条件を示す。Fig. 6-12 に路面 A と路面 B における曲率半径 $R(q)$ の計算結果を示す。曲率半径 $R(q)$ は波数 $q$ に対して単調減少（両対数グラフ中で傾き： $-(2-H)$ で減少）する。

また、路面 A と路面 B の摩擦試験において、各すべり速度の摩擦係数 $\mu_{\text{exp}}$ から逆算したカットオフ波数 $q_1$ における曲率半径 $R(q_1)$ の計算結果を Fig. 6-13 に示す。Fig. 6-13 より、 $R(q_1)$ は速度依存性および路面依存性が小さいことが分かる。

Table 6-5 Calculation conditions of curvature radius.

|                            |                         | Surface A                              | Surface B |
|----------------------------|-------------------------|----------------------------------------|-----------|
| Surface data               | $q_0$ [1/m]             | 6684.93                                | 3341.74   |
|                            | $h_0$ [ $\mu\text{m}$ ] | 76.5587                                | 62.7752   |
|                            | $H$                     | 0.630691                               | 0.606717  |
| Wavevector $q$ range [1/m] |                         | $1.0 \times 10^4 \sim 1.0 \times 10^8$ |           |

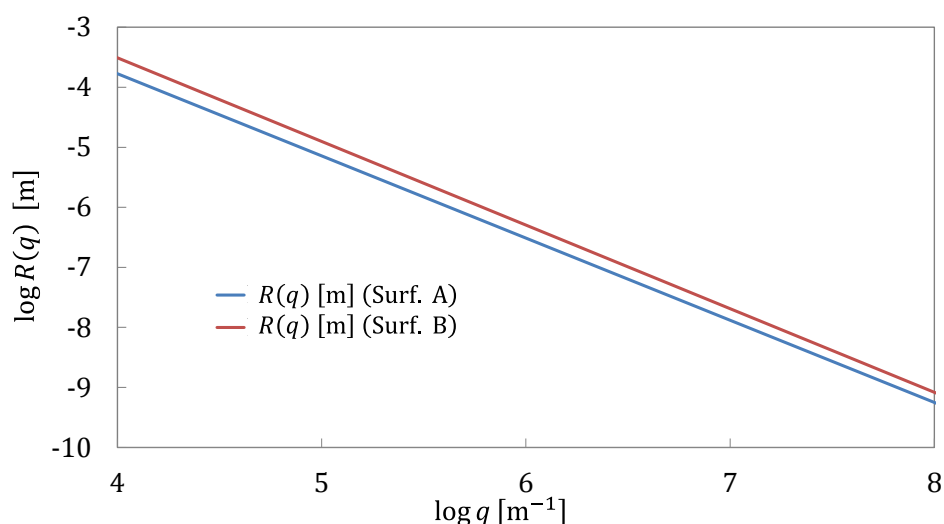


Fig. 6-12 Numerical results of curvature radius as a function of the logarithm of the wavevector  $q$ .

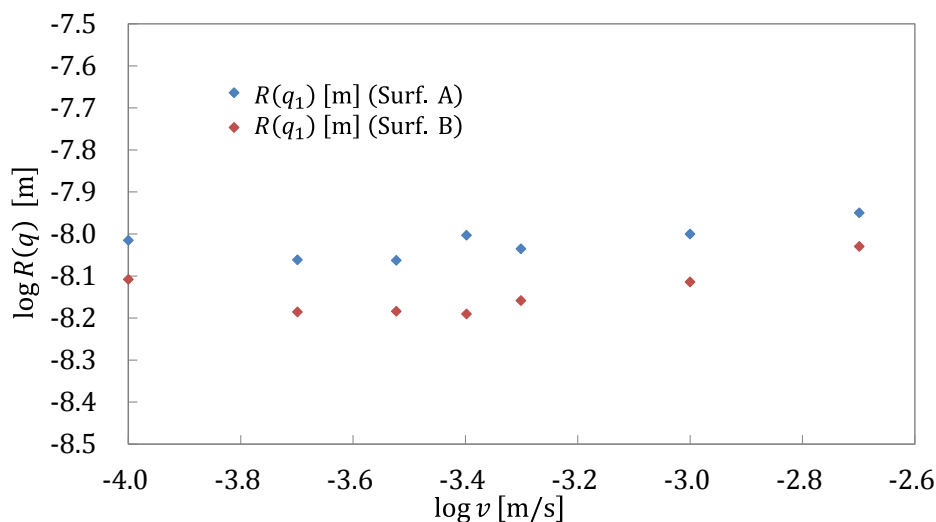


Fig. 6-13 Numerical results of curvature radius at the scale of cut-off wavevector  $q_1$  based on friction tests of each surface.

#### ➤ 最小曲率半径 $R_{\min}$ を基準とした摩擦係数予測と考察

曲率半径 $R(q)$ は路面特性のみによって決定され、実験値から逆算した $R(q_1)$ は速度依存性と路面依存性が小さい。そこで、本研究では、 $R(q_1)$ はゴムの粘弾性変形が起こる最小スケールでの曲率半径 $R_{\min}$ と等しい( $R(q_1) = R_{\min}$ )という仮説を立てる。

この仮説を検証するため、最小曲率半径 $R_{\min}$ の値を設定し、式(6.9)からカットオフ波数 $q_1$ を求め、摩擦係数をすべり速度範囲 $1.0 \times 10^{-4} < v < 1.0 \times 10^{-2}$  [m/s]で計算し、実験値と比較する。計算条件を Table 6-6 に示す。なお、表中の $R_{\min} = 9.27947 \times 10^{-9}$  [m]は、前節ですべり速度 $v = 1.0 \times 10^{-4}$  [m/s]での合わせ込み計算で得られたカットオフ波数 $q_1$ における曲率半径の平均値として設定した。

Fig. 6-14 に、本手法による摩擦係数の計算結果と実験値と比較したものを示す。路面 B の低速度域では凝着項の影響により[39][40]、両路面での高速度域ではスティックスリップの影響により、計算値が実験値から外れているが、路面 A と路面 B とともに良い予測が得られたと言える。このことから、ゴムの粘弾性変形の打ち切りスケールであるカットオフ波数 $q_1$ は路面特性と最小曲率半径 $R_{\min}$ から決定可能であり、その最小曲率半径の値は $R_{\min} = 9.27947 \times 10^{-9}$  [m]程度であると考えられる。

Fig. 6-15 にカットオフ波数 $q_1$ の前後のスケールにおけるゴム摩擦現象の概念図を示す。スケール $q_0 < q < q_1$ では路面の凹凸にゴムが追従変形することによるヒステリシス損失の影響が大きい、スケール $q < q_1$ ではゴムが路面に追従しない、あるいは追従しても振動周波数が高く、損失が無視出来るほど小さいと考えられる。

Table 6-6 Calculation conditions of friction coefficient based on curvature radius.

|                                                        |                                                              | Surface A                                                                                                                                                      | Surface B |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Surface data                                           | $q_0$ [1/m]                                                  | 6684.93                                                                                                                                                        | 3341.74   |
|                                                        | $q_m$ [1/m]                                                  | 6751.7793                                                                                                                                                      |           |
|                                                        | $h_0$ [ $\mu\text{m}$ ]                                      | 76.5587                                                                                                                                                        | 62.7752   |
|                                                        | $H$                                                          | 0.630691                                                                                                                                                       | 0.606717  |
|                                                        | $R_{\min}$ [m]                                               | $9.27947 \times 10^{-9}$                                                                                                                                       |           |
| Rubber data                                            | Viscoelastic property<br>$E(\omega)$ [Pa]                    | if $\omega < 2\pi \times 10^2$<br>$\text{Re } E(\omega) = \sum_{i=0}^n E_i$ $\text{Im } E(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{0.15} \times 10^{6.634}$ |           |
|                                                        |                                                              | if $\omega \geq 2\pi \times 10^2$<br>$E_0 + \sum_{i=1}^n \left\{ (1/E_i) + (1/i\omega\eta_i) \right\}^{-1}$                                                    |           |
|                                                        | Poisson's ratio $\nu$                                        | 0.49                                                                                                                                                           |           |
|                                                        | Mass density<br>$\rho$ [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]            | 1000.0                                                                                                                                                         |           |
|                                                        | Heat conductivity<br>$\lambda$ [ $\text{W}/\text{mK}$ ]      | 0.2                                                                                                                                                            |           |
|                                                        | Specific heat<br>$C_V$ [ $\text{J}/\text{kgK}$ ]             | 1850.0                                                                                                                                                         |           |
|                                                        | Glass-transition<br>temperature $T_g$ [ $^{\circ}\text{C}$ ] | -15.0                                                                                                                                                          |           |
| Environmental temperature $T_0$ [ $^{\circ}\text{C}$ ] |                                                              | 26.85                                                                                                                                                          |           |
| Normal stress $\sigma_0$ [Pa]                          |                                                              | 2450.0                                                                                                                                                         |           |
| Sliding speed range [m/s]                              |                                                              | $1.0 \times 10^{-4} \sim 1.0 \times 10^{-2}$                                                                                                                   |           |

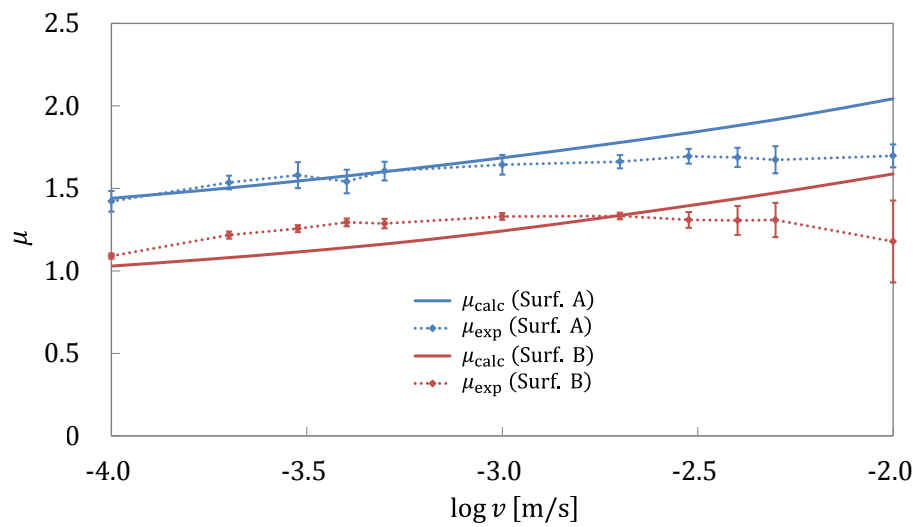


Fig. 6-14 Numerical results of friction coefficient based on curvature radius.

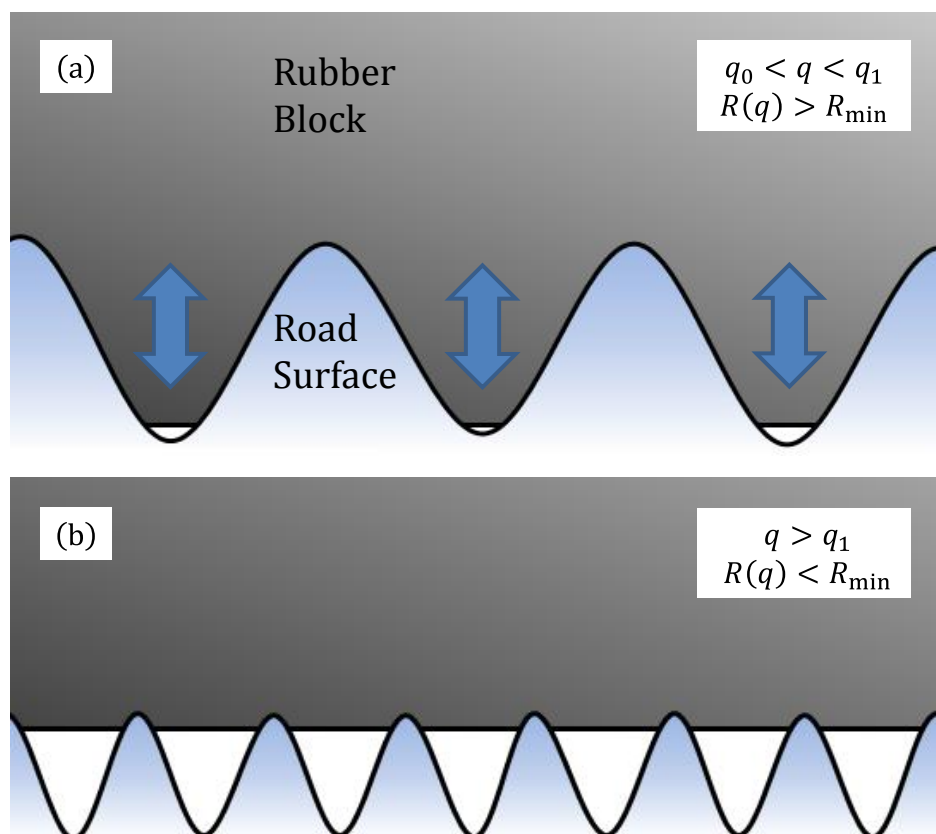


Fig. 6-15 The energy dissipation at the scale of (a)  $q_0 < q < q_1$  (b)  $q > q_1$ .

---

## 7 結論と今後の課題

---

## 7.1 結論

本研究では、Persson の摩擦理論に基づき、ゴムの温度上昇を考慮することの重要性を示した。また、最小曲率半径を考慮したゴム摩擦係数の予測モデルを提案した。そして、摩擦試験による実験値から対象とする CB 充てんゴムの最小曲率半径の値を決定し、異なる 2 種類の路面に対して速度依存型摩擦係数を計算予測した。本研究で得られた知見を以下に示す。

- (1) 路面試料（路面 A および路面 B）の表面粗さパワースペクトルとゴム試料の複素弾性率をそれぞれ計測した。そして、路面 A はロールオフ波数 $q_0$ や平均二乗粗さ $h_0$ が大きく、路面 B はハースト指数 $H$ が小さい（ミクロスケールで粗い）といった路面特性を取得した。次に、摩擦試験によって、すべり速度範囲( $10^{-4} \sim 10^{-2}$  [m/s])におけるゴム - 路面間の摩擦係数を測定した。
- (2) Persson の摩擦理論の式より、路面 A および路面 B ともに摩擦係数 $\mu$ がカットオフ波数 $q_1$ や温度 $T_q$ に強く依存することを明らかにした。そして、高波数領域の接触面近傍でゴムの粘弾性変形が打ち切りとなる曲率半径を考慮したモデルを提案し、本モデルを用いてゴム試料固有の最小曲率半径を $9.28 \times 10^{-9}$  [m]程度と設定した。また、得られた最小曲率半径を基準にして、各路面ならびに各すべり速度において摩擦係数が計算できることを示した。
- (3) 得られたカットオフ波数 $q_1$ より摩擦係数を計算し、摩擦試験によって測定した実験値との比較を行った。測定した速度範囲において、摩擦係数の実験値と計算予測値の傾向が異なることから、接触面における凝着やマクロ凹凸などが摩擦に寄与する効果考慮することの必要性を示した。

## 7.2 今後の課題

摩擦現象は、非常に多くの要因が複雑に絡まり合って発現している。そのため、摩擦係数を理論的に予測することは難しく、本研究の摩擦モデルにおいても、路面特性に起因する摩擦現象の一部を説明するに留まっている。また、本研究では、2種類の路面、単一ゴムサンプル、単一荷重条件を用いて行われた摩擦試験の結果から最小曲率半径を求めることにより、実験値と予測計算値が良い一致を示しているが、実験で得られたデータがあまりにも少なく、予測計算値との比較が多くは実施されていないため、良い摩擦係数予測モデルが確立されたと一般に認められるには至らないだろう。

今後、本論文で提案したモデルの正当性を高めるために、Gabriel らが示すような表面のマクロな幾何形状が摩擦力に与える影響[41]や凝着の影響[39][40]など、本摩擦モデルにおいて考慮したゴムの内部摩擦以外の影響も考慮することで、さらに実現象に近いモデルを確立することが求められている。また、ゴム材料特性や荷重、温度などを変更して様々な条件の下で行った摩擦試験について、摩擦係数だけでなく、温度や摩耗量など必要なデータを集め、多くの結果比較・検証を実施するべきである。

## 付録 A: 剛性マトリクス $\mathbf{M}$ の導出

ゴムを等方弾性体と仮定すると、その表面  $z=0$  上の変位場  $u_i$  と表面にかかる応力テンソル  $\sigma_i (= \sigma_{3i})$  のフーリエ変換をそれぞれ次のように定義する。

$$u_i(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2x dt u_i(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)},$$

$$\sigma_i(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2x dt \sigma_i(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)},$$

ここで、 $\mathbf{x} = (x, y)$  は平面の位置ベクトル、 $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$  は 2 次元の波数ベクトル、 $t$  は時間、 $\omega$  は角速度である。これらのフーリエ逆変換は次のように表される。

$$u_i(\mathbf{x}, t) = \int d^2q d\omega u_i(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)},$$

$$\sigma_i(\mathbf{x}, t) = \int d^2q d\omega \sigma_i(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\mathbf{x} - \omega t)}.$$

表面応力に対する変位場は次の式で計算される。

$$u_i(\mathbf{q}, \omega) = M_{ij}(\mathbf{q}, \omega) \sigma_j(\mathbf{q}, \omega),$$

または行列表記で、

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) = \mathbf{M}(\mathbf{q}, \omega) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}, \omega). \quad (\text{A.1})$$

連続体力学の理論から  $\mathbf{M}(\mathbf{q}, \omega)$  を求める。Navier の方程式より、変位場  $u_i(\mathbf{x}, z, t)$  は次の式を満たす。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \hat{\mu} \nabla^2 \mathbf{u} + (\hat{\mu} + \hat{\lambda}) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u},$$

ここで、 $\hat{\mu}$ ,  $\hat{\lambda}$  は Lamé の定数であり、任意の関数  $\phi(t)$  に対して次の式を満たす。

$$\hat{\mu} \phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \mu(t-t') \phi(t').$$

上記の Navier の方程式を  $t$  に関してフーリエ変換すると、

$$-\rho \omega^2 \mathbf{u} = \mu(\omega) \nabla^2 \mathbf{u} + [\mu(\omega) + \lambda(\omega)] \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (\text{A.2})$$

ここで,  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, z, \omega)$ ,  $\mu(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \mu(t) e^{i\omega t}$ ,  $\lambda(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \lambda(t) e^{i\omega t}$  である. また,  $\mu$ ,  $\lambda$  は, 複素弾性率  $E(\omega)$  とポアソン比  $\nu(\omega)$  を用いて次のように表される.

$$2\mu = \frac{E}{1+\nu}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (\text{A.3})$$

さらに, 横波の音速  $c_T(\omega)$  と縦波の音速  $c_L(\omega)$  は次のように表される.

$$c_T^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad c_L^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad (\text{A.4})$$

ここで, ベクトル  $\mathbf{n}$  を導入する.  $\mathbf{n}$  は  $z$  軸方向を指し, 半無限固体の表面に垂直である. さらに直交基底,  $\mathbf{p} = -i\nabla$ ,  $\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p} \times \mathbf{K}$  によって変位場  $\mathbf{u}$  を次のように表す.

$$\mathbf{u} = \mathbf{p}A + \mathbf{K}B + \mathbf{p} \times \mathbf{K}C. \quad (\text{A.5})$$

式(A.5)を式(A.2)に代入して,

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2(\mathbf{p}A + \mathbf{K}B + \mathbf{p} \times \mathbf{K}C) &= \mu(\omega)\nabla^2(\mathbf{p}A + \mathbf{K}B + \mathbf{p} \times \mathbf{K}C) \\ &\quad + [\mu(\omega) + \lambda(\omega)]\nabla\nabla \cdot (\mathbf{p}A + \mathbf{K}B + \mathbf{p} \times \mathbf{K}C). \end{aligned}$$

A についてまとめると,

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2\mathbf{p}A &= \mu(\omega)\nabla^2\mathbf{p}A + [\mu(\omega) + \lambda(\omega)]\nabla\nabla \cdot \mathbf{p}A \\ \Leftrightarrow \left( \omega^2 + \frac{[\lambda(\omega) + 2\mu(\omega)]}{\rho} \nabla^2 \right) \mathbf{p}A &= 0 \\ (\because \nabla\nabla \cdot \mathbf{p}A &= \nabla\nabla \cdot (-i\nabla A) = (-i\nabla)\nabla^2 A = \mathbf{p}\nabla^2 A) \\ \Leftrightarrow (\omega^2 + c_L^2 \nabla^2) \mathbf{p}A &= 0. \end{aligned}$$

B についてまとめると,

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2\mathbf{K}B &= \mu(\omega)\nabla^2\mathbf{K}B + [\mu(\omega) + \lambda(\omega)]\nabla\nabla \cdot \mathbf{K}B \\ \Leftrightarrow \left( \omega^2 + \frac{\mu(\omega)}{\rho} \nabla^2 \right) \mathbf{K}B &= 0 \\ (\because \nabla \cdot \mathbf{K}B &= \nabla \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{p})B = -i\nabla \cdot (\mathbf{n} \times \nabla)B = 0) \\ \Leftrightarrow (\omega^2 + c_T^2 \nabla^2) \mathbf{K}B &= 0. \end{aligned}$$

C についてまとめると,

$$\begin{aligned}
 -\rho\omega^2(\mathbf{p} \times \mathbf{K})C &= \mu(\omega)\nabla^2(\mathbf{p} \times \mathbf{K})C + [\mu(\omega) + \lambda(\omega)]\nabla\nabla \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{K})C \\
 &\Leftrightarrow \left( \omega^2 + \frac{\mu(\omega)}{\rho}\nabla^2 \right) (\mathbf{p} \times \mathbf{K})C = 0 \\
 &\quad (\because \nabla \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{K})C = -i\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{K})C = 0) \\
 &\Leftrightarrow (\omega^2 + c_T^2\nabla^2)(\mathbf{p} \times \mathbf{K})C = 0.
 \end{aligned}$$

以上より,

$$(\omega^2 + c_L^2\nabla^2)\mathbf{p}A + (\omega^2 + c_T^2\nabla^2)\mathbf{K}B + (\omega^2 + c_T^2\nabla^2)(\mathbf{p} \times \mathbf{K})C = 0,$$

ここで,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{p} \times \mathbf{K}$  は互いに独立なので,

$$(\omega^2 + c_L^2\nabla^2)A = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$(\omega^2 + c_T^2\nabla^2)B = 0, \quad (\text{A.7})$$

$$(\omega^2 + c_T^2\nabla^2)C = 0. \quad (\text{A.8})$$

$z$  方向の変形が波状であるとして,  $A(\mathbf{x}, z, \omega) = A(\mathbf{x}, \omega)e^{ip_L z}$  と変数分離すると, 式(A.6)より,

$$\begin{aligned}
 (\omega^2 + c_L^2\nabla^2)A(\mathbf{x}, \omega)e^{ip_L z} &= 0 \\
 &\Leftrightarrow (\omega^2 + c_L^2\nabla^2) \int d^2q A(\mathbf{q}, \omega)e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + p_L z)} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \omega^2 - c_L^2(q^2 + p_L^2) \right\} \int d^2q A(\mathbf{q}, \omega)e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + p_L z)} = 0 \\
 &\quad \left( \because \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, q^2 = |\mathbf{q}|^2 = q_x^2 + q_y^2 \right) \\
 &\Leftrightarrow \left\{ \omega^2 - c_L^2(q^2 + p_L^2) \right\} = 0 \\
 &\Leftrightarrow p_L = \mp \left( \frac{\omega^2}{c_L^2} \mp i\varepsilon - q^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

よって,

$$A(\mathbf{x}, z, t) = \int d^2q d\omega A(\mathbf{q}, \omega)e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + p_L z - \omega t)}, \quad (\text{A.9})$$

ただし,

$$p_L = \mp \left( \frac{\omega^2}{c_L^2} \mp i\varepsilon - q^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.10})$$

同様にして,

$$B(\mathbf{x}, z, t) = \int d^2 q d\omega B(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + p_T z - \omega t)}, \quad (\text{A.11})$$

$$C(\mathbf{x}, z, t) = \int d^2 q d\omega C(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + p_T z - \omega t)}, \quad (\text{A.12})$$

ただし,

$$p_T = \mp \left( \frac{\omega^2}{c_T^2} \mp i\varepsilon - q^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{A.13})$$

ここで,  $\varepsilon$  はブランチカットを考慮した微小項である. また,  $p_T$  と  $p_L$  の  $-, +$  はそれぞれ  $\omega > 0, \omega < 0$  に対応している.

Hook の法則より,

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}.$$

弾性体が等方であれば,

$$C_{ijkl} = \hat{\lambda} \delta_{ij} \delta_{kl} + \hat{\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

の形をとり,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \hat{\lambda} e_{kk} \delta_{ij} + 2\hat{\mu} e_{ij} \\ &= \hat{\mu} (u_{i,j} + u_{j,i}) + \hat{\lambda} u_{k,k} \delta_{ij} \quad \left( \because e_{ij} = e_{ji} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \right). \end{aligned}$$

よって,

$$\sigma_{i3} = n_j \sigma_{ij} = \hat{\mu} (\mathbf{n} \cdot \nabla u_i + \nabla_i \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) + \hat{\lambda} n_i \nabla \cdot \mathbf{u},$$

ここで,  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ ,  $\nabla_i = \partial / \partial x_i$  である. 両辺に  $-i$  をかけて,

$$\begin{aligned} -i\sigma_{i3} &= \hat{\mu} \{ \mathbf{n} \cdot (-i\nabla) u_i + (-i\nabla_i) \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \} + \hat{\lambda} n_i (-i\nabla) \cdot \mathbf{u} \\ \Leftrightarrow -i\sigma_{i3} &= \hat{\mu} \{ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}) u_i + \mathbf{p}_i (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) \} + \hat{\lambda} n_i (\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}) \quad (\because -i\nabla = \mathbf{p}). \end{aligned}$$

この式の両辺を  $t$  に関してフーリエ変換し、ベクトル表示すると、 $\sigma_{3i}(\mathbf{x}, 0, \omega) = \sigma_i(\mathbf{x}, \omega)$  は次の形をとる.

$$\mu(\omega)\{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})\mathbf{u} + \mathbf{p}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u})\} + \lambda(\omega)\mathbf{n}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}) = -i\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \omega), \quad (\text{A.14})$$

ここで、式(A.5)より、

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = p_z,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} &= u_z \\ &= p_z A + \mathbf{K}_z B + (\mathbf{p} \times \mathbf{K})_z C \\ &= p_z A + (\mathbf{p} \times \mathbf{K})_z C \\ &\left( \because \mathbf{K}_z = (\mathbf{n} \times \mathbf{p})_z = -i \left( -\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, 0 \right)_z = 0 \right) \\ &= p_z A + K^2 C \end{aligned}$$

$$\left( \because (\mathbf{p} \times \mathbf{K})_z = - \left( -\frac{\partial^2}{\partial x \partial z}, -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)_z = - \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = K^2 \right),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} &= p^2 A + \mathbf{p} \cdot \mathbf{K} B + \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{K}) C \\ &= p^2 A \\ &(\because \mathbf{p} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) = 0, \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p} \times \mathbf{K}) = 0). \end{aligned}$$

これらを用いて、式(A.5)を式(A.14)に代入し、整理すると、

$$\mathbf{p} \left( 2p_z A + K^2 C \right) + \mathbf{K} p_z B + \mathbf{p} \times \mathbf{K} p_z C + \mathbf{n} \left( \lambda / \mu \right) p^2 A = (-i / \mu) \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.15})$$

式(A.15)に、 $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{p}_{\parallel} = (p_x, p_y, 0)$  の内積をとることで次の 3 つのスカラー方程式を得る.

$$\left( 2p_z^2 + (\lambda / \mu) p^2 \right) A + 2K^2 p_z C = (-i / \mu) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.16})$$

$$K^2 p_z B = (-i / \mu) \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.17})$$

$$p_{\parallel}^2 \left( 2p_z A + K^2 C \right) - p_z^2 K^2 C = (-i / \mu) \mathbf{p}_{\parallel} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.18})$$

ここで,

$$K^2 = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = p_{\parallel}^2.$$

式(A.6)より,

$$\begin{aligned} (\omega^2 + c_L^2 \nabla^2) A &= 0 \\ \Leftrightarrow -\nabla^2 A &= \frac{\omega^2}{c_L^2} A \\ \Leftrightarrow p^2 A &= \frac{\omega^2}{c_L^2} A. \end{aligned}$$

任意の関数  $f(x)$  について,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\parallel} f(x) &= \mathbf{p}_{\parallel} \int d^2 q f(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \\ &= (-i) \cdot i\mathbf{q} \int d^2 q f(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \mathbf{q} f(x). \end{aligned}$$

式(A.9), 式(A.11), 式(A.12)より,

$$p_z A = p_L A, \quad p_z B = p_T B, \quad p_z C = p_T C.$$

これらを用いると, 式(A.16), 式(A.17), 式(A.18)はそれぞれ次のようになる.

$$\left(2p_L^2 + (\lambda/\mu)(\omega/c_L)^2\right) A + 2q^2 p_T C = (-i/\mu) \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.19})$$

$$q^2 p_T B = (-i/\mu) \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.20})$$

$$q^2 (2p_L A + q^2 C) - p_T^2 q^2 C = (-i/\mu) \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.21})$$

これらを  $\mathbf{x}$  に関してフーリエ変換しても式の形は変わらない. 以降,  $A = A(\mathbf{q}, \omega)$  とする.  $B$ ,  $C$ ,  $\boldsymbol{\sigma}$  についても同様とする. 式(A.20)より,

$$B = -\frac{i}{\mu} \frac{1}{q^2 p_T} \mathbf{K} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (\text{A.22})$$

式(A.19)と式(A.21)を連立して,

$$A = -\frac{i}{\mu S} \left[ 2p_T \mathbf{q} + \left( \frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right) \mathbf{n} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.23})$$

$$C = -\frac{i}{\mu S} \left[ 2p_L \mathbf{n} - \left( \frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right) \frac{1}{q^2} \mathbf{q} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{A.24})$$

ただし,

$$S = \left( \frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right)^2 + 4q^2 p_T p_L.$$

今,

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \times \mathbf{K} &= \mathbf{p} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) \\ &= (\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}) \mathbf{n} - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{p} \\ &= p^2 \mathbf{n} - p_z \mathbf{p} \\ &= \begin{pmatrix} -p_x p_z \\ -p_y p_z \\ p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p_x^2 + p_y^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix} p_z \\ &= \mathbf{n} p_{\parallel}^2 - p_z \mathbf{p}_{\parallel}. \end{aligned}$$

よって, 式(A.5)より,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{q}, 0, \omega) &= \mathbf{p}_{\parallel} A + \mathbf{n} p_z A + \mathbf{K} B + (\mathbf{n} p_{\parallel}^2 - p_z \mathbf{p}_{\parallel}) C \\ &= \mathbf{q} A + \mathbf{n} p_L A + \mathbf{K} B + \mathbf{n} q^2 C - p_T C \mathbf{q} \\ &\quad (\because \mathbf{p}_{\parallel} \rightarrow \mathbf{q}, \quad p_z A = p_L A, \quad p_z C = p_T C) \\ &= \mathbf{K} B + \mathbf{q} (A - p_T C) + \mathbf{n} (p_L A + q^2 C), \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

ここで,

$$\mathbf{K} = \mathbf{n} \times \mathbf{p} = -i \left( -\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, 0 \right).$$

よって、フーリエ変換を利用すると、

$$\mathbf{K} = (-q_y, q_x, 0),$$

ここで、 $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{n}$ ,  $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q$ ,  $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{q}}$  とおくと、

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= (0, 0, 1) \times \frac{1}{q} (q_x, q_y, q_z) \\ &= \frac{1}{q} (-q_y, q_x, 0), \end{aligned}$$

より、

$$\mathbf{K} = q\mathbf{e}.$$

よって、式(A.22)より、

$$\begin{aligned} \mathbf{KB} &= -\frac{i}{\mu} \frac{1}{q^2 p_T} q^2 \mathbf{ee} \boldsymbol{\sigma} \\ &= -\frac{i}{\rho c_T^2} \frac{1}{p_T} \mathbf{ee} \boldsymbol{\sigma} \quad (\because \mu = c_T^2 \rho). \end{aligned} \tag{A.26}$$

ここで、 $\mathbf{ee}$  はダイアド積であり、 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$  に対し、ダイアド積  $\mathbf{A}$  は次のように定義される。

$$\mathbf{A} = \mathbf{ab} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

また、式(A.23), 式(A.24)より、

$$\begin{aligned} &\mathbf{q}(A - c_T C) \\ &= -\frac{i}{\mu S} \mathbf{q} \left[ 2p_T \mathbf{q} + \left( \frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right) \mathbf{n} - 2p_T p_L \mathbf{n} + \left( \frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right) \frac{p_T}{q^2} \mathbf{q} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ &= -\frac{i}{\rho c_T^2} \frac{1}{S} \mathbf{q} \left[ \mathbf{q} \frac{1}{q^2} \left( \frac{\omega}{c_T} \right)^2 p_T - \mathbf{n} Q \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ &= -\frac{i}{\rho c_T^2} \left( \frac{1}{S} \left[ \left( \frac{\omega}{c_T} \right)^2 p_T \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}} - Q \mathbf{q} \hat{\mathbf{z}} \right] \right) \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \tag{A.27}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{n}(p_L A + q^2 C) \\
&= -\frac{i}{\mu S} \mathbf{n} \left[ 2p_T p_L q + \left( \frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right) p_L \mathbf{n} + 2p_L q^2 \mathbf{n} - \left( \frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right) \mathbf{q} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
&= -\frac{i}{\rho c_T^2} \frac{1}{S} \mathbf{n} \left[ \mathbf{q} Q + \mathbf{n} \frac{\omega^2}{c_T^2} p_L \right] \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
&= -\frac{i}{\rho c_T^2} \left( \frac{1}{S} \left[ Q \hat{\mathbf{z}} \mathbf{q} + \left( \frac{\omega}{c_T} \right)^2 p_L \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} \right] \right) \cdot \boldsymbol{\sigma},
\end{aligned} \tag{A.28}$$

ただし,

$$Q = 2q^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2} + 2p_T p_L.$$

式(A.25)に式(A.26), 式(A.27), 式(A.28)を代入して,  $\mathbf{u}(\mathbf{q}, 0, \omega) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega)$  が次のように得られる.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) \\
&= -\frac{i}{\rho c_T^2} \frac{1}{p_T} \mathbf{e} \mathbf{e} \boldsymbol{\sigma} - \frac{i}{\rho c_T^2} \left( \frac{1}{S} \left[ \left( \frac{\omega}{c_T} \right)^2 p_T \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}} - Q \mathbf{q} \hat{\mathbf{z}} \right] \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
&\quad - \frac{i}{\rho c_T^2} \left( \frac{1}{S} \left[ Q \hat{\mathbf{z}} \mathbf{q} + \left( \frac{\omega}{c_T} \right)^2 p_L \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} \right] \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} \\
&= -\frac{i}{\rho c_T^2} \left( \frac{1}{S} \left[ Q(\hat{\mathbf{z}} \mathbf{q} - \mathbf{q} \hat{\mathbf{z}}) + \left( \frac{\omega}{c_T} \right)^2 (p_L \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} + p_T \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}) \right] + \frac{1}{p_T} \mathbf{e} \mathbf{e} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma}.
\end{aligned} \tag{A.29}$$

よって,

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) = \mathbf{M}(\mathbf{q}, \omega) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{q}, \omega),$$

と書けば,

$$M = -\frac{i}{\rho c_T^2} \left( \frac{1}{S(q, \omega)} \left[ Q(q, \omega)(\hat{\mathbf{z}} \mathbf{q} - \mathbf{q} \hat{\mathbf{z}}) + \left( \frac{\omega}{c_T} \right)^2 (p_L \hat{\mathbf{z}} \hat{\mathbf{z}} + p_T \hat{\mathbf{q}} \hat{\mathbf{q}}) \right] + \frac{1}{p_T} \mathbf{e} \mathbf{e} \right), \tag{A.30}$$

ただし,  $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{n}$ ,  $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q}/q$ ,  $\mathbf{e} = \hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{q}}$  であり,

$$S = \left( \frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right)^2 + 4q^2 p_T p_L,$$

$$Q = 2q^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2} + 2p_T p_L.$$

さらに, すべり摩擦において, ゴム表面にかかる応力  $\sigma(\mathbf{q}, \omega)$  は  $z$  方向成分のみを持つと仮定すると,

$$u_z(\mathbf{q}, \omega) = M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) \sigma_z(\mathbf{q}, \omega). \quad (\text{A.31})$$

$M_{zz}(\mathbf{q}, \omega)$  を導出する. 式(A.43)において,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}\mathbf{q} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_x & q_y & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}\hat{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_x \\ 0 & 0 & q_y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}} &= \frac{1}{q^2} \begin{pmatrix} q_x^2 & q_x q_y & 0 \\ q_x q_y & q_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}\mathbf{e} = \frac{1}{q^2} \begin{pmatrix} q_y^2 & -q_x q_y & 0 \\ -q_x q_y & q_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) = -\frac{i}{\rho c_T^2} \frac{p_L}{S(\mathbf{q}, \omega)} \left( \frac{\omega}{c_T} \right)^2. \quad (\text{A.32})$$

実際の条件の下では, ゴムと路面間の摩擦について, 次の近似が成り立つ.

$$\frac{\omega}{c_T q} = \frac{v}{c_T} \ll 1.$$

この近似条件は，すべり速度が横波の音速よりもかなり遅いということである．この条件下で，式(A.25)より，

$$\begin{aligned} p_T &= \mp \left( \frac{\omega^2}{c_T^2} \mp i\varepsilon - q^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= iq \left( 1 - \frac{\omega^2}{c_T^2 q^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\simeq iq \left( 1 - \frac{\omega^2}{2c_T^2 q^2} \right). \end{aligned}$$

同様に，式(A.22)より，

$$p_L \simeq iq \left( 1 - \frac{\omega^2}{2c_L^2 q^2} \right).$$

また，これらを用いて，

$$\begin{aligned} Q &= 2q^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2} + 2p_T p_L \\ &\simeq 2q^2 - \frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \left( 1 - \frac{\omega^2}{2c_T^2 q^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega^2}{2c_L^2 q^2} \right) \\ &= \frac{\omega^2}{c_L^2} \left( 1 - \frac{\omega^2}{2c_T^2 q^2} \right) \\ &\simeq \frac{\omega^2}{c_L^2}, \\ S &= \left( \frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right)^2 + 4q^2 p_T p_L \\ &\simeq \left( \frac{\omega^2}{c_T^2} - 2q^2 \right)^2 - 4q^4 \left( 1 - \frac{\omega^2}{2c_T^2 q^2} \right) \left( 1 - \frac{\omega^2}{2c_L^2 q^2} \right) \\ &= 2q^2 \omega^2 \left( 1 - \frac{\omega^2}{2c_T^2 q^2} \right) \left( \frac{1}{c_L^2} - \frac{1}{c_T^2} \right) \\ &\simeq 2q^2 \omega^2 \left( \frac{1}{c_L^2} - \frac{1}{c_T^2} \right). \end{aligned}$$

これらを式(A.32)に代入して,

$$\begin{aligned}
 M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) &= -\frac{i}{\rho c_T^2} i q \left( 1 - \frac{\omega^2}{2c_L^2 q^2} \right) \frac{1}{2q^2 \omega^2} \left( \frac{1}{c_L^2} - \frac{1}{c_T^2} \right)^{-1} \left( \frac{\omega}{c_T} \right)^2 \\
 &= -\frac{1}{2\rho c_T^2 q} \left( 1 - \frac{\omega^2}{2c_L^2 q^2} \right) \left[ 1 - \left( \frac{c_T}{c_L} \right)^2 \right]^{-1} \\
 &\simeq -\frac{1}{2\rho c_T^2 q} \left[ 1 - \left( \frac{c_T}{c_L} \right)^2 \right]^{-1}.
 \end{aligned}$$

さらに, 式(A.3), 式(A.4)を用いて,

$$\begin{aligned}
 M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) &= -\frac{1}{2\rho q} \frac{2\rho(1+\nu)}{E} \left[ 1 - \frac{E}{2\rho(1+\nu)} \frac{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)} \right]^{-1} \\
 &= -\frac{2(1-\nu^2)}{Eq}.
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

## 付録 B：パワースペクトル関係式の導出

式(2.32), すなわち式(B.3)の導出を行う.

表面粗さパワースペクトルは次のように定義される.

$$C(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x \langle h(\mathbf{x} + \mathbf{x}') h(\mathbf{x}') \rangle e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}}. \quad (\text{B.1})$$

$h(\mathbf{x} + \mathbf{x}')$  や  $h(\mathbf{x}')$  はフーリエ変換によって次のように表される.

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x} + \mathbf{x}') &= \int d^2q' h(\mathbf{q}') e^{i\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}')}, \\ h(\mathbf{x}') &= \int d^2q'' h(\mathbf{q}'') e^{i\mathbf{q}'' \cdot \mathbf{x}'}. \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

式(B.2)を式(B.1)に代入すると,

$$\begin{aligned} C(q) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2q' \int d^2q'' \int d^2x \langle h(\mathbf{q}') h(\mathbf{q}'') \rangle e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} + i\mathbf{q}' \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{x}') + i\mathbf{q}'' \cdot \mathbf{x}'} \\ &= \int d^2q' \int d^2q'' \langle h(\mathbf{q}') h(\mathbf{q}'') \rangle e^{i(\mathbf{q}' + \mathbf{q}'') \cdot \mathbf{x}'} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x e^{i(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{x}} \\ &= \int d^2q' \int d^2q'' \langle h(\mathbf{q}') h(\mathbf{q}'') \rangle e^{i(\mathbf{q}' + \mathbf{q}'') \cdot \mathbf{x}'} \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) \\ &= \int d^2q'' \langle h(\mathbf{q}) h(\mathbf{q}'') \rangle e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{q}'') \cdot \mathbf{x}'}. \end{aligned}$$

$C(q)$  は  $\mathbf{x}'$  の取り方に依存しないので,  $\mathbf{x}'$  にわたって積分し公称接触面積  $A_0$  で除しても値は変わらない. よって,

$$\begin{aligned} C(q) &= \frac{1}{A_0} \int d^2x' \int d^2q'' \langle h(\mathbf{q}) h(\mathbf{q}'') \rangle e^{i(\mathbf{q} + \mathbf{q}'') \cdot \mathbf{x}'} \\ &= \frac{1}{A_0} \int d^2q'' \langle h(\mathbf{q}) h(\mathbf{q}'') \rangle (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}'') \\ &= \frac{(2\pi)^2}{A_0} \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle. \end{aligned}$$

したがって,

$$\langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q). \quad (\text{B.3})$$

## 付録 C：マクロ凹凸接触と温度上昇

本付録では、マクロ凹凸接触が生じる波数スケール $q_m$ の感度解析を行う．Table C-1 に計算条件を示す．

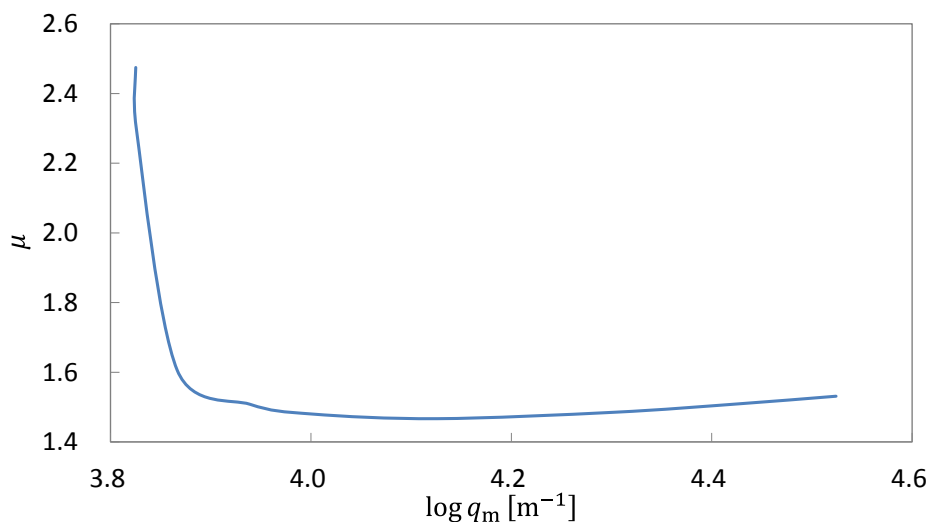
**Table C-1 Calculation conditions for investigating  $q_m$  dependence.**

|                                                        |                                                              |                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                        |                                                              | Surface A                                                                                                                                                      |
| Surface data                                           | $q_0$ [1/m]                                                  | 6684.93                                                                                                                                                        |
|                                                        | $q_m$ [1/m]                                                  | 6685.61~33424.7                                                                                                                                                |
|                                                        | $q_1$ [1/m]                                                  | $4.79 \times 10^6$                                                                                                                                             |
|                                                        | $h_0$ [ $\mu\text{m}$ ]                                      | 76.5587                                                                                                                                                        |
|                                                        | $H$                                                          | 0.630691                                                                                                                                                       |
| Rubber data                                            | Viscoelastic property<br>$E(\omega)$ [Pa]                    | if $\omega < 2\pi \times 10^2$<br>$\text{Re } E(\omega) = \sum_{i=0}^n E_i$ $\text{Im } E(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{0.15} \times 10^{6.634}$ |
|                                                        |                                                              | if $\omega \geq 2\pi \times 10^2$<br>$E_0 + \sum_{i=1}^n \left\{ (1/E_i) + (1/i\omega\eta_i) \right\}^{-1}$                                                    |
|                                                        | Poisson's ratio $\nu$                                        | 0.49                                                                                                                                                           |
|                                                        | Mass density<br>$\rho$ [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]            | 1000.0                                                                                                                                                         |
|                                                        | Heat conductivity<br>$\lambda$ [ $\text{W}/\text{mK}$ ]      | 0.2                                                                                                                                                            |
|                                                        | Specific heat<br>$C_V$ [ $\text{J}/\text{kgK}$ ]             | 1850.0                                                                                                                                                         |
|                                                        | Glass-transition<br>temperature $T_g$ [ $^{\circ}\text{C}$ ] | -15.0                                                                                                                                                          |
| Environmental temperature $T_0$ [ $^{\circ}\text{C}$ ] |                                                              | 26.85                                                                                                                                                          |
| Normal stress $\sigma_0$ [Pa]                          |                                                              | 2450.0                                                                                                                                                         |
| Sliding speed range [m/s]                              |                                                              | $1.0 \times 10^{-2}$                                                                                                                                           |

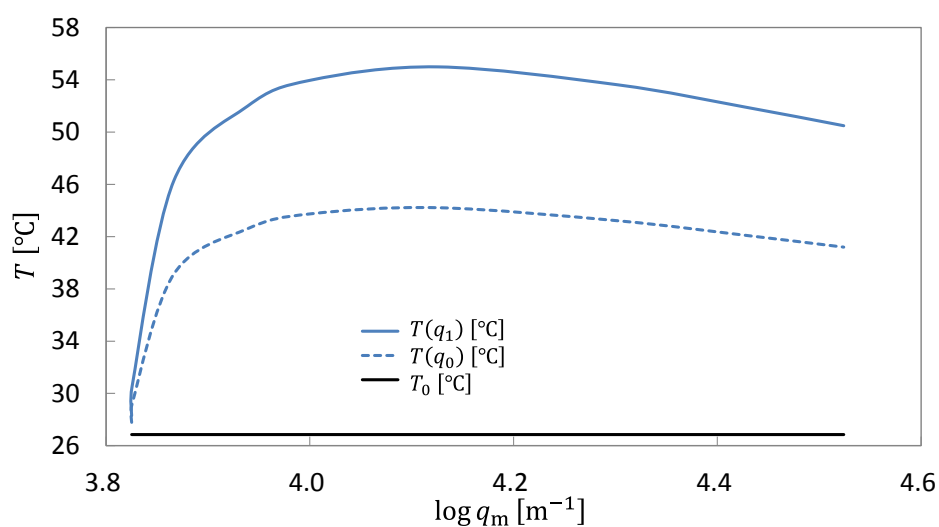
計算結果を Fig. C-1, Fig. C-2, Fig. C-3 に示す. Fig. C-1 は摩擦係数, Fig. C-2 はロールオフ波数 $q_0$ およびカットオフ波数 $q_1$ の各スケールにおける温度, Fig. C-3 は $q_m$ および $q_1$ の各スケールにおける真実接触面積率を示している.

すべり速度 $v = 1.0 \times 10^{-2}$  [m/s]では摩擦係数の実験値 $\mu_{\text{exp}} = 1.70$ であったが, 計算上は $q_m$ の値を変動させることで摩擦係数は増減する. Fig. C-1 より, 摩擦係数の計算値 $\mu_{\text{calc}}$ は $q_m$ に対して減少して増加する(極小値を持つ)という結果になった. Fig. C-2 より, 温度は $q_m$ に対して増加して減少する(極大値を持つ)という性質があった. 本論文の 2.4 節で述べたが, 一般的に摩擦係数は温度が高いほど下がるので, 摩擦係数の増減は温度の増減と対応することが分かる. また, 真実接触面積率について, Fig. C-3 より,  $P(q_m)$ は単調増加,  $P(q_1)$ は単調増加する(ほぼ一定)という結果になった.

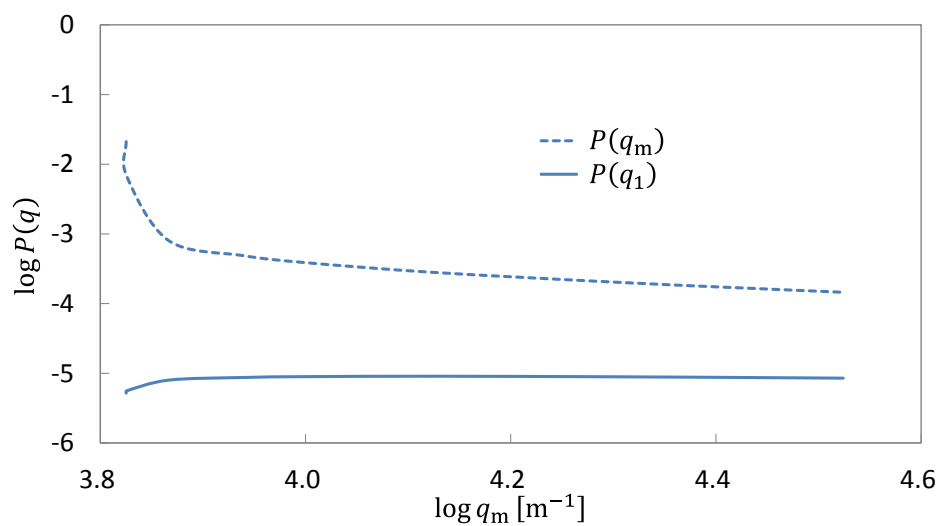
本文中の計算では $q_m = 6751.8$ という値を用いて計算を行ったが, その理由は一般的に $3000 < q_m < 7500$ であるということ, および温度上昇幅の概算値が計算値と比較して妥当であったことである. ただし, 付録 E で述べるが, この $q_m$ の値は $\sigma_0$ によって変動する可能性が高い. 次年度以降は, マクロ凹凸接触波数 $q_m$ や垂直応力 $\sigma_0$ , 接触面積率 $P(q)$ の関係を掘り下げて考察し, 実現に近い解析を目指すべきである.



**Fig. C-1 Numerical results of friction coefficient as a function of the logarithm of the sliding velocity.**



**Fig. C-2 Numerical results of rubber temperature as a function of the logarithm of the sliding velocity.**



**Fig. C-3 Numerical results of the normalized area of contact as a function of the logarithm of the sliding velocity.**

## 付録 D：弾性エネルギー密度の導出

弾性エネルギー密度の上限値を定め、カットオフ波数  $q_1$  を決定するにあたり、各波数における弾性エネルギー密度を求める必要がある。

$u_z$  をゴム表面の垂直方向変位、 $\sigma_z$  を垂直応力とすると、ゴムに貯蔵される全体の弾性エネルギー  $U_{\text{all}}$  は次式に表される。

$$\begin{aligned}
 U_{\text{all}} &= -\frac{1}{2} \int d^2x \langle u_z(\mathbf{x}) \sigma_z(\mathbf{x}) \rangle \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^2x \left\langle \int d^2q u_z(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \sigma_z(\mathbf{x}) \right\rangle \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^2q \langle u_z(\mathbf{q}) \int d^2x \sigma_z(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \rangle \\
 &= -\frac{(2\pi)^2}{2} \int d^2q \langle u_z(\mathbf{q}) \sigma_z(-\mathbf{q}) \rangle, \tag{D.1}
 \end{aligned}$$

ここで、

$$u_z(\mathbf{q}) = M_{zz}(\mathbf{q}) \sigma_z(\mathbf{q}), \tag{D.2}$$

$$M_{zz}(\mathbf{q}) = -\frac{2(1-\nu^2)}{Eq}. \tag{D.3}$$

$M_{zz}$  の導出については付録 A に詳細を記述する。式(D.2)と式(D.3)を式(D.1)に代入する。その際、ゴムが路面凹凸に完全に追従すると仮定し、 $u_z(\mathbf{q}) \rightarrow h(\mathbf{q})$  とすると、

$$\begin{aligned}
 U_{\text{all}} &= -\frac{(2\pi)^2}{2} \int d^2q \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle [M_{zz}(-\mathbf{q})]^{-1} \\
 &= \frac{(2\pi)^2}{4} \int d^2q \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle \frac{Eq}{(1-\nu^2)}, \tag{D.4}
 \end{aligned}$$

ここで、 $\langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle$  は次の関係式を満たす。

$$\langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q). \tag{D.5}$$

式(D.5) の導出については付録 0 に詳細を記述する．式(D.5)を式(D.4)に代入すれば，

$$\begin{aligned} U_{\text{all}} &= \frac{A_0}{4} \int d^2q q C(q) \frac{E}{(1-\nu^2)} \\ &= \frac{A_0}{4} \int_{q_0}^{q_1} dq q^2 C(q) \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\text{Re } E(\omega)}{(1-\nu^2)}, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

ただし，すべり速度を  $\nu$  とすると， $\omega = q\nu \cos \phi$  である．ここで，2.2 節で導出した真実接触領域の割合  $P(q)$  を導入すると，

$$U_{\text{all}} = \frac{A_0}{4} \int_{q_0}^{q_1} dq q^2 P(q) C(q) \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\text{Re } E(\omega)}{(1-\nu^2)}. \quad (\text{D.7})$$

式(D.7)は，各波数における弾性エネルギーを積算した形となっている．

ある波数  $q_a$  における弾性エネルギー密度は， $q < q_a$  の弾性エネルギー密度に波数  $q_a$  による弾性エネルギー密度を加えたものと考えることができる．また，波数  $q$  における代表高さ  $h_q$  を次のように定義する．

$$h_q = \left[ 4\pi \int_q^{q_1} dq' q' C(q') \right]^{1/2}, \quad (\text{D.8})$$

ただし， $h_{q_0} = h_0$  である． $h_q$  を用いて，波数  $q$  における単位体積  $V_q$  を次のように定義する．

$$V_q = A_0 P(q) h_q. \quad (\text{D.9})$$

式(D.8)と式(D.9)より，波数  $q$  の表面凹凸によりゴムに貯蔵される弾性エネルギー密度  $U_{\text{el}}(q)$  は次のように表される．

$$\begin{aligned} U_{\text{el}}(q) &= \frac{A_0}{4} \int_{q_0}^q dq' \frac{1}{V_{q'}} q'^2 P(q') C(q') \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\text{Re } E(q' \nu \cos \phi)}{(1-\nu^2)} \\ &= \frac{1}{4} \int_{q_0}^q dq' \frac{1}{h_{q'}} q'^2 C(q') \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\text{Re } E(q' \nu \cos \phi)}{(1-\nu^2)}, \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

ただし，式(D.10)で表される弾性エネルギー密度はゴムの変形の最大波数を  $q$  としたものである．ここでは，カットオフ波数  $q_1$  を定めることが目的であり， $q_1$  以上の波数領域ではゴムの変形は起こらないと仮定しているため，式(D.10)による弾性エネルギー密度の評価は妥当であると考えられる．

ここで、路面のセルフアフィンフラクタル性を仮定すると次式が成り立つ.

$$h_q = h_0 \left( \frac{q}{q_0} \right)^{-H}, \quad (\text{D.11})$$

$$C(q) \simeq \frac{H}{2\pi} \left( \frac{h_0}{q_0} \right)^2 \left( \frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)}. \quad (\text{D.12})$$

式(D.11)と式(D.12)を式(D.10)に代入すると、次式のようになる.

$$\begin{aligned} U_{\text{el}}(q) &= \frac{1}{4} \int_{q_0}^q dq' \frac{q'^H}{h_0 q_0^H} q'^2 \frac{H}{2\pi} \left( \frac{h_0}{q_0} \right)^2 \left( \frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)} \int_0^{2\pi} d\phi \frac{\text{Re} E(q'v \cos \phi)}{(1-v^2)} \\ &= \frac{H}{8\pi(1-v^2)} h_0 q_0^H \int_{q_0}^q dq' q'^{-H} \int_0^{2\pi} d\phi \text{Re} E(qv \cos \phi). \\ &= \frac{H h_0 q_0}{8\pi(1-v^2)} \int_1^\zeta d\zeta' \zeta'^{-H} \int_0^{2\pi} d\phi \text{Re} E(\zeta' q_0 v \cos \phi). \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

## 付録 E：摩擦係数の垂直応力依存性

Persson の温度上昇を考慮した摩擦モデルにおいて摩擦係数の垂直応力依存性について記述する。Table E-1 に計算条件を示す。

**Table E-1 Calculation conditions for investigating normal stress dependence.**

|                                                           |                                                         | Surface A                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Surface data                                              | $q_0$ [1/m]                                             | 6684.93                                                                                                                                                        |
|                                                           | $q_m$ [1/m]                                             | 6751.7793                                                                                                                                                      |
|                                                           | $q_1$ [1/m]                                             | $1.19195 \times 10^7$                                                                                                                                          |
|                                                           | $h_0$ [ $\mu\text{m}$ ]                                 | 76.5587                                                                                                                                                        |
|                                                           | $H$                                                     | 0.630691                                                                                                                                                       |
| Rubber data                                               | Viscoelastic property<br>$E(\omega)$ [Pa]               | if $\omega < 2\pi \times 10^2$<br>$\text{Re } E(\omega) = \sum_{i=0}^n E_i$ $\text{Im } E(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{0.15} \times 10^{6.634}$ |
|                                                           |                                                         | if $\omega \geq 2\pi \times 10^2$<br>$E_0 + \sum_{i=1}^n \left\{ (1/E_i) + (1/i\omega\eta_i) \right\}^{-1}$                                                    |
|                                                           | Poisson's ratio $\nu$                                   | 0.49                                                                                                                                                           |
|                                                           | Mass density<br>$\rho$ [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]       | 1000.0                                                                                                                                                         |
|                                                           | Heat conductivity<br>$\lambda$ [ $\text{W}/\text{mK}$ ] | 0.2                                                                                                                                                            |
|                                                           | Specific heat<br>$C_V$ [ $\text{J}/\text{kgK}$ ]        | 1850.0                                                                                                                                                         |
| Glass-transition temperature $T_g$ [ $^{\circ}\text{C}$ ] |                                                         | -15.0                                                                                                                                                          |
| Environmental temperature $T_0$ [ $^{\circ}\text{C}$ ]    |                                                         | 26.85                                                                                                                                                          |
| Normal stress $\sigma_0$ [Pa]                             |                                                         | $2.450 \times 10^1 \sim 2.450 \times 10^5$                                                                                                                     |
| Sliding speed range [m/s]                                 |                                                         | $1.0 \times 10^{-2}$                                                                                                                                           |

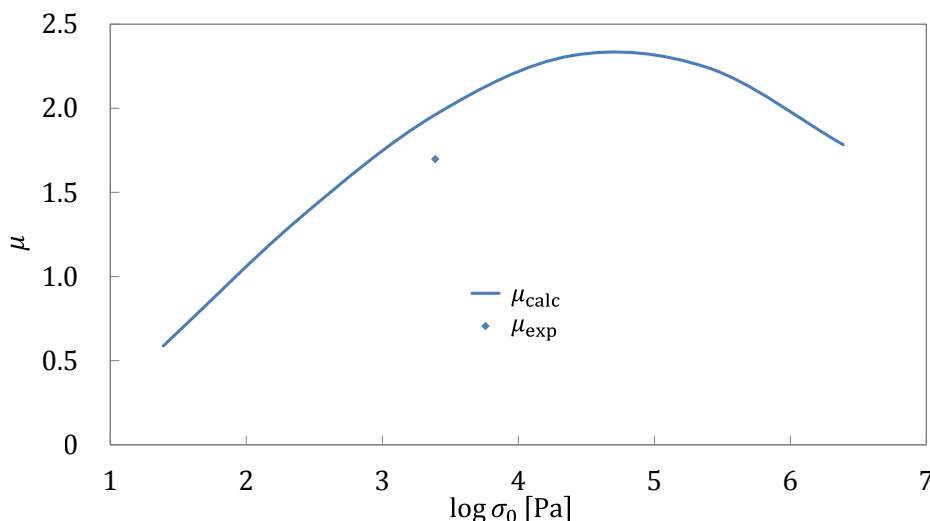
垂直応力 $\sigma_0$ の感度解析結果を Fig. E-1, Fig. E-2, Fig. E-3 に示す. Fig. E-1 は摩擦係数, Fig. E-2 はロールオフ波数 $q_0$ およびカットオフ波数 $q_1$ の各スケールにおける温度, Fig. E-3 は $q_m$ および $q_1$ の各スケールにおける真実接触面積率を示している.

Fig. E-1 より, 摩擦係数は垂直応力に対して上がって下がる(極大値を持つ)という結果になった. また, Fig. E-2 より, 温度は垂直応力に対して下がり上がる(極小値を持つ)という結果になった. 本論文の 2.4 節で述べたが, 一般的に摩擦係数は温度が高いほど下がるので, 摩擦係数の増減は温度の増減とよく対応することが分かる. Fig. E-3 より, 真実接触面積率は垂直応力に対して単調増加するという結果になった.

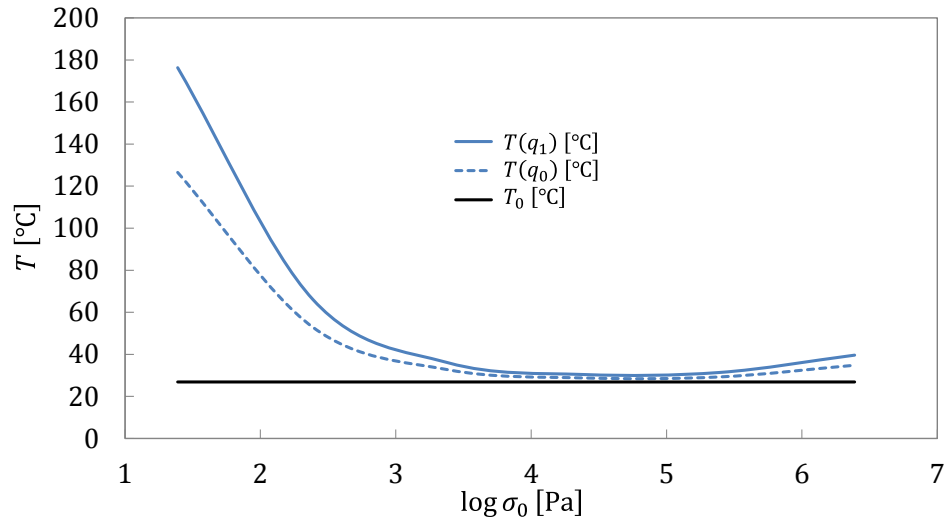
しかし, 垂直応力が低い領域で温度が高いという結果は一般的な実験結果的にも感覚的にも正しくない. これは, 今回の計算では垂直応力の変化に対して $q_m$ を固定しており, 低応力領域において $P(q_m)$ が非常に低い値となったことが原因であると考えられる.

温度上昇を考慮しないモデルでは, 摩擦係数は垂直応力に依存しないが[17], 実現現象では垂直応力はゴムの温度上昇幅に影響を与えるため, 摩擦係数に大きく寄与すると考えられる.

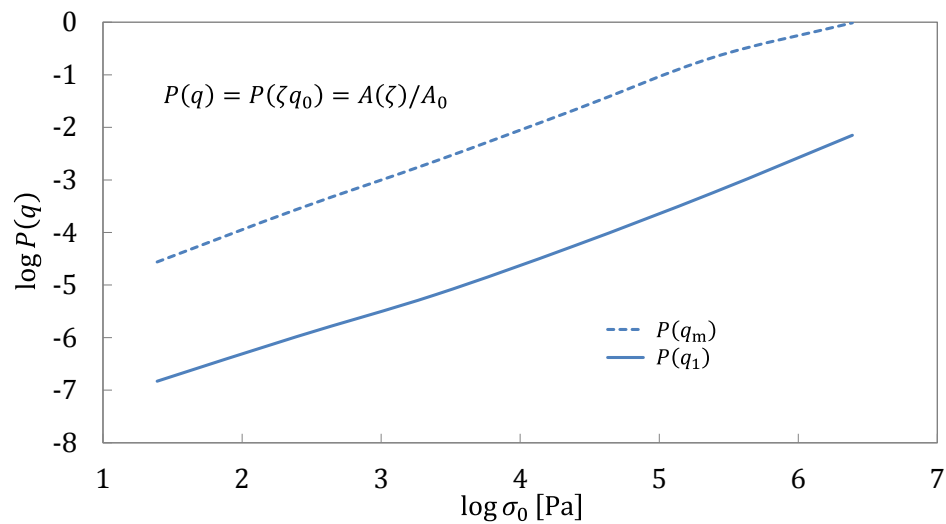
次年度以降は, すべり速度 $v$ , 垂直応力 $\sigma_0$ ,  $q_m$ や $q_1$ の関係を考察し, さらなるモデル改善を目指すべきである.



**Fig. E-1 Numerical results of friction coefficient as a function of the logarithm of the normal stress.**



**Fig. E-2 Numerical results of rubber temperature as a function of the logarithm of the normal stress.**



**Fig. E-3 Numerical results of the normalized area of contact as a function of the logarithm of the normal stress.**

## 付録 F：実験結果（昨年度）との比較

温度上昇を考慮した計算を用いて昨年度の実験結果を検証する．他の摩擦係数と同様に，温度上昇の影響が最も少ない  $\nu = 1.0 \times 10^{-3}$  [m/s]での摩擦係数で合わせ込み，カットオフ波数  $q_1$  を決定して計算を行った．計算条件を Table F-1 に示す．

**Table F-1 Calculation conditions for validating experimental results of last year.**

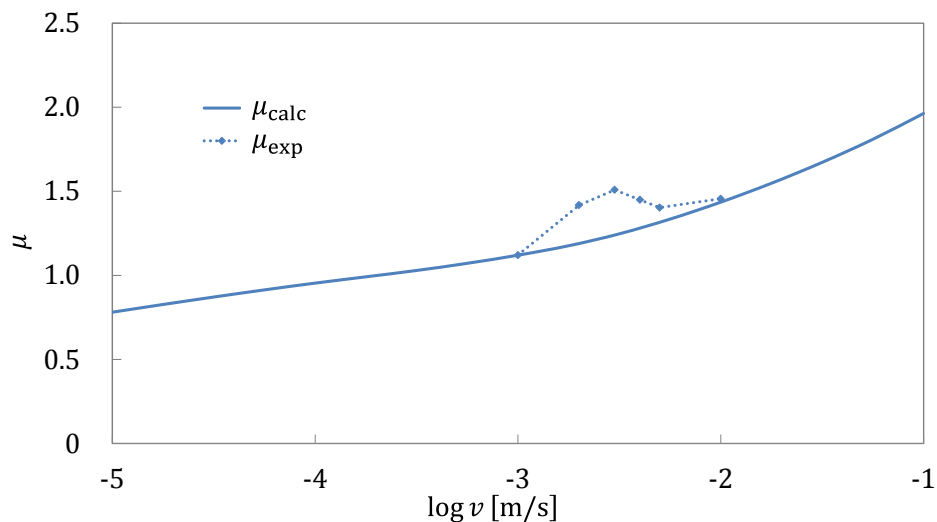
|                                                        |                                                              |                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                        |                                                              | Surface A                                                                                                                                                      |
| Surface data                                           | $q_0$ [1/m]                                                  | 6684.93                                                                                                                                                        |
|                                                        | $q_m$ [1/m]                                                  | 6751.7793                                                                                                                                                      |
|                                                        | $q_1$ [1/m]                                                  | $4.79 \times 10^6$                                                                                                                                             |
|                                                        | $h_0$ [ $\mu\text{m}$ ]                                      | 76.5587                                                                                                                                                        |
|                                                        | $H$                                                          | 0.630691                                                                                                                                                       |
| Rubber data                                            | Viscoelastic property<br>$E(\omega)$ [Pa]                    | if $\omega < 2\pi \times 10^2$<br>$\text{Re } E(\omega) = \sum_{i=0}^n E_i$ $\text{Im } E(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{0.15} \times 10^{6.634}$ |
|                                                        |                                                              | if $\omega \geq 2\pi \times 10^2$<br>$E_0 + \sum_{i=1}^n \left\{ (1/E_i) + (1/i\omega\eta_i) \right\}^{-1}$                                                    |
|                                                        | Poisson's ratio $\nu$                                        | 0.49                                                                                                                                                           |
|                                                        | Mass density<br>$\rho$ [ $\text{kg/m}^3$ ]                   | 1000.0                                                                                                                                                         |
|                                                        | Heat conductivity<br>$\lambda$ [W/mK]                        | 0.2                                                                                                                                                            |
|                                                        | Specific heat<br>$C_V$ [J/kgK]                               | 1850.0                                                                                                                                                         |
|                                                        | Glass-transition<br>temperature $T_g$ [ $^{\circ}\text{C}$ ] | -15.0                                                                                                                                                          |
| Environmental temperature $T_0$ [ $^{\circ}\text{C}$ ] |                                                              | 26.85                                                                                                                                                          |
| Normal stress $\sigma_0$ [Pa]                          |                                                              | $2.0 \times 10^5$                                                                                                                                              |
| Sliding speed range [m/s]                              |                                                              | $1.0 \times 10^{-5} \sim 1.0 \times 10^{-1}$                                                                                                                   |

計算結果を Fig. F-1, Fig. F-2, Fig. F-3 に示す. Fig. F-1 は摩擦係数, Fig. F-2 はロールオフ波数 $q_0$ およびカットオフ波数 $q_1$ の各スケールにおける温度, Fig. F-3 は $q_m$ および $q_1$ の各スケールにおける真実接触面積率を示している.

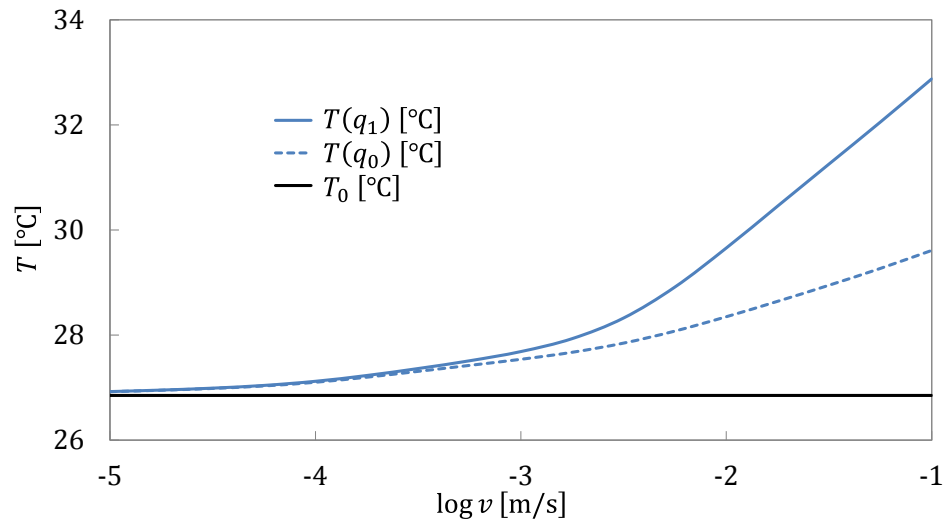
Fig. F-1 より, 摩擦係数の実験値は速度に対して上がって下がる（極大値を持つ）という性質を持つのにに対し, 計算値は速度に対して単調増加するという結果になった. Fig. F-2 より, 温度は速度に対して単調増加し, また, Fig. F-3 より, 真実接触面積率は速度に対して単調減少するという結果になった.

すべり速度 $v = 1.0 \times 10^{-2}$  [m/s]での結果は実験値と一致したが, 本計算の範囲では, すべり速度に対して摩擦計算が上がって下がる（極大値を持つ）という性質は現れなかった. 付録 C および付録 E で述べた通り,  $q_m$ は垂直応力 $\sigma_0$ に応じて変化させるべきであるが, 本付録では本文中と $q_m$ 値を使っているため, 温度上昇が実現象よりも低い値となっている. このことが摩擦係数の速度に対して極大値を持つという性質が現れなかった原因であると考えられる. また, 昨年度の実験条件ではゴム全体のひずみが大きくなっている可能性があり, 計算に用いたゴムの複素弾性率（ひずみ依存性を有する）が適切であったか不明である.

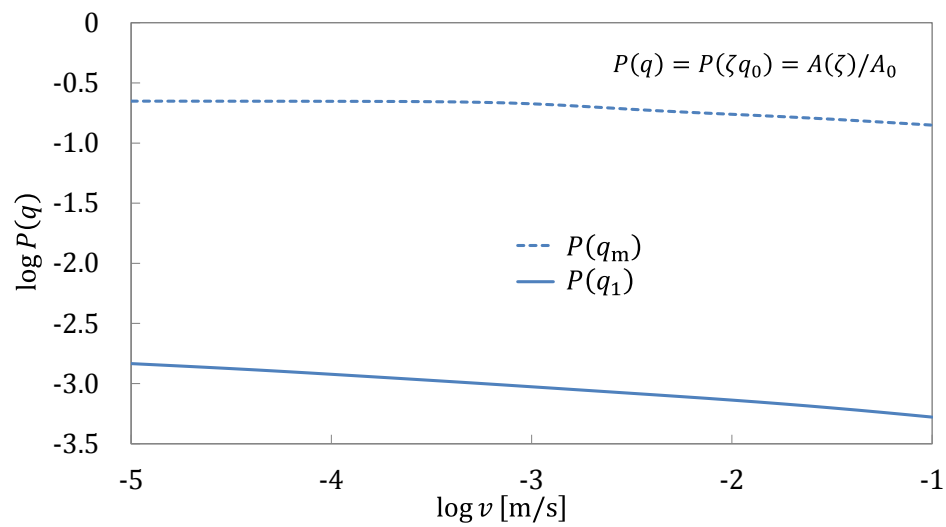
次年度以降は, マクロ凹凸接触波数 $q_m$ や垂直応力 $\sigma_0$ , 接触面積率 $P(q)$ の関係を掘り下げて考察し, 実現象に近い解析を目指すべきである.



**Fig. F-1 Numerical results of friction coefficient as a function of the logarithm of the sliding velocity.**



**Fig. F-2 Numerical results of rubber temperature as a function of the logarithm of the sliding velocity.**



**Fig. F-3 Numerical results of the normalized area of contact as a function of the logarithm of the sliding velocity.**

---

## 謝辞

---

本研究を進めるにあたり、多くの方々にご指導、ご協力を頂きました。

酒井信介教授には、研究の進め方、研究内容に対する助言など、多くの場面でお世話になりました。心より感謝を申し上げます。

泉聡志准教授には、研究テーマ設定から内容に関するアドバイスまで、研究を進めるにあたり数多くの助言をいただきました。心より感謝を申し上げます。

原祥太郎講師には、研究方針に対する助言をいただき、また、普段から気さくに接していただきました。ありがとうございました。

田中展助教には、普段から研究の相談に乗っていただき、研究全般において大変お世話になりました。また、普段の楽しい会話も精神面での支えとなりました。ありがとうございました。

株式会社ブリヂストンの門脇弘さんには、データの提供、実験の実施など多大な協力をしていただきました。ありがとうございました。

独立行政法人労働安全衛生総合研究所の山際謙太さんには、路面の高さデータ測定の指導をしていただきました。ありがとうございました。

株式会社トリニティーラボ様には、直動型摩擦試験機を提供していただきました。ありがとうございました。

秘書の小山恵子さんには、様々な事務処理を通じて研究を裏から支えていただきました。ありがとうございました。

社会人博士の戒田拓洋さんには、社会人生活について聞かせていただきました。また、社会見学の手配をしていただきました。ありがとうございました。

ポスドクの孫瑜さんには、研究に対する姿勢を教えていただきました。ありがとうございました。

博士 1 年の楊晶さんには、中国の言語や文化について教えていただきました。ありがとうございました。

修士 2 年の木村浩明さん、桐谷聡一さん、四方健太郎さん、高尾康太さん、田矢寛成さん、村中亮太さん、曲強さん、皆さんのおかげで修士 2 年間楽しい研究室生活を送ることができました。

木村浩明さんには、計算機の使い方やジャグリングのコツを教えていただきました。ありがとうございました。

桐谷聡一さんには、社会情勢について色々と教えていただきました。ありがとうございました。

四方健太郎さんには、スポーツ観戦の楽しさを教えていただきました。ありがとうございました。

高尾康太さんには、映画の楽しさやストイックに生きる哲学を教えていただきました。ありがとうございました。

田矢寛成さんには、サブカル全般について教えていただきました。ありがとうございました。

村中亮太さんには、英語や光学機器の仕組みについて教えていただきました。ありがとうございました。

曲強さんには、スポーツ競技におけるフィジカルの重要性について教えていただきました。ありがとうございました。

修士 1 年の池田和寛さん、栗山和樹さん、興石和輝さん、高本聡さん、日高貴弘さんには、研究室のイベント企画や環境整備、雑務などでお世話になりました。特に高本聡さんには、数値計算アルゴリズムについて相談に乗っていただきました。ありがとうございました。

学部 4 年の荒牧純平さん、磯崎洋平さん、伊藤哲久さん、近藤祐樹さん、シー・ロンチュンさん、寺田偉紀さんには、その愛らしさで研究室の雰囲気をもっと明るく保っていただきました。特に荒牧純平さんと伊藤哲久さんには、同じ研究チームとして色々と協力していただきました。ありがとうございました。

作業を進めるに当たって、Windows で作動する様々なアプリケーションにもお世話になりました。非常にありがとうございました。Microsoft Office のソフトウェア群、Google Chrome, Mozilla Thunderbird, Foxit Reader, Sublime Text 2, Tera Term, FFFTP などの製作者の方々、ありがとうございました。

また、私のことをいつも気にかけて、支えていただいた、最愛の家族、祖父、祖母、愛する一号さん、二号さん、三号さん、よっちゃん、稚内のおじちゃん、おばちゃん、親戚のおじちゃん、おばちゃん、あとさっき言ったのとは違うおばちゃん、菅原さん、神林さん、よっちゃん、千石先生、千石先生の奥さん、浜さん、浜さんの見習いの吉さん、山さん、山さんの別れた奥さん、ナベさん、ナベさんの奥さん、池上さん、林さん、若林さん、若林さんのところの長男の宗一郎ちゃんにも感謝を申し上げます。

以上、研究に関わった全ての人に感謝の意を表します。

2013 年 2 月 7 日

森住 竜雄

---

## 参考文献

---

- [1] 深堀 美英, “設計のための高分子の力学 高分子鎖が織りなす力学の世界,” 技報堂出版, 2000.
- [2] J. F. Archard, “Contact and Rubbing of Flat Surfaces,” *Journal of Applied Physics*, Vol.24, No.8, pp.981-988, 1953.
- [3] J. A. Greenwood, “Constriction resistance and the real area of contact,” *Brit. J. Appl. Phys.*, Vol.17, 1966.
- [4] Eugene Guth, “Theory of Filler Reinforcement,” *Journal of Applied Physics*, Vol.16, No.20, pp.20-25, 1945.
- [5] Meng-Jiao Wang, “Effect of polymer-filler and filler-filler interactions on dynamic properties of filled vulcanizates,” *Rubber Chemistry and Technology*, Vol.71, No.3, pp.520-589, 1998.
- [6] 牧浦 雅仁, “ゴムとフィラーについて,” *日本ゴム協会誌*, Vol.71, No.9, pp.583-587, 1998.
- [7] Jianping Gao, W. D. Luedtke, D. Gourdon, M. Ruths, J. N. Israelachvili, Uzi Landman, “Frictional Forces and Amonton’s Law : From the Molecular to the Macroscopic Scale,” *The Journal of Physical Chemistry B*, Vol.108, pp.3410-3425, 2004.
- [8] F. P. Bowden, D. Tabor, “THE FRICTION AND LUBRICATION OF SOLIDS,” Oxford at The Clarendon Press, 1950.
- [9] Izabela Szlufarska, Michael Chandross, Robert W Carpick, “Recent advances in single-asperity nanotribology,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, Vol.41, pp.1-39, 2008.
- [10] B. N. J. Persson, “On the theory of rubber friction,” *Surface Science*, Vol.401, pp.445-454, 1998.
- [11] B. N. J. Persson, E. Tosatti, “Qualitative theory of rubber friction and wear,” *Journal of Chemical Physics*, Vol.112, No.4, pp.2021-2029, 2000.
- [12] B. N. J. Persson, “Theory of rubber friction and contact mechanics,” *The Journal of Chemical Physics*, Vol.115, No.8, pp.3840-3861, 2001.
- [13] B. N. J. Persson, O Albohr, U Tartaglino, A I Volokitin, E Tosatti, “On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, Vol.17, pp.1-62, 2005.
- [14] B. N. J. Persson, “Rubber friction: role of the flash temperature,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, Vol.18, pp.7789-7823, 2006.
- [15] B. N. J. Persson, “Adhesion between an elastic body and a randomly rough hard surface” *The European Physical Journal E*, Vol.8, pp.385-401, 2002.

- 
- [16] B. N. J. Persson, E. Tosatti, “The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids,” *The Journal of Chemical Physics*, Vol.115, No.12, pp.5597-5610, 2001.
  - [17] 熊沢 卓, “マルチスケールモデルによるタイヤゴムの摩擦係数予測”, 東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻, 修士論文, 2011
  - [18] Hiroshi Jinnai, Yuki Shinbori, Tatsuro Kitaoka, Keizo Akutagawa, “Three-Dimensional Structure of a Nanocomposite Material Consisting of Two Kinds of Nanofillers and Rubbery Matrix Studied by Transmission Electron Microtomography,” *Macromolecules*, Vol.40, pp.6758-6764, 2007.
  - [19] 富田 佳宏, “補強材充てんゴムの粘弾性変形応答シミュレーション,” *日本ゴム協会誌*, Vol.82, No.11, pp.464-471, 2009.
  - [20] Yifei Mo, Kevin T. Turner, Izabela Szlufarska, “Friction laws at the nanoscale,” *nature*, Vol.457, No.26, pp.1116-1119, 2009.
  - [21] <http://octa.jp/>
  - [22] 小林 直樹, “高機能材料設計プラットフォーム OCTA のゴム分散系材料への適用,” *日本ゴム協会誌*, Vol.82, No.4, pp.136-139, 2004.
  - [23] P. Gabriel, A.G. Thomas, J.J.C. Busfield, “Influence of interface geometry on rubber friction,” *Wear*, Vol.268, pp.747-750, 2010.
  - [24] J.A. Greenwood, in: I.L. Singer, H.M. Pollack (Eds.), *Fundamentals of Friction, Macroscopic and Microscopic Processes*, Kluwer, Dordrecht, 1992.
  - [25] J.A. Greenwood, J.B.P. Williamson: “Contact of Nominally Flat Surface” *Proc. Roy. Soc. A*, 295, pp. 300-319, 1966.
  - [26] 村岡 清繁, “タイヤ用ゴムにとって粘弾性とは,” *日本ゴム協会誌*, Vol.74, No.6, pp.242-247, 2001.
  - [27] K. A. Grosch, “The Relation between the Friction and Visco-Elastic Properties of Rubber,” *Proceedings of the Royal Society*, Vol.274, pp.21-39, 1963.
  - [28] K. C. Ludema, D. Tabor, “The friction and visco-elastic properties of polymeric solids,” *Wear*, Vol.9, pp.329-348, 1966.
  - [29] 國澤 哲也, 近藤 猛, Qing-Qing Ni, “慶清いカーボングラックおよびシリカ重点ゴム組成物の高周波領域における粘弾性挙動と湿潤摩擦特性,” *日本機械学会論文集(A 編)*, Vol.73, No.731, pp.775-781, 2007.
  - [30] 原 義則, “塗膜の物性評価(1),” *塗料の研究*, No.151, pp.23-33, 2009.
  - [31] S. Westermann, F. Petry, R. Boes and G. Thielen, Colmar-Berg, “Experimental Investigations Into the Predictive Capabilities of Current Physical Rubber Friction Theories,” *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, Vol.57, pp.645-650, 2004
  - [32] 中村 昌生, “豆知識(35),” *日本ゴム協会誌*, Vol.81, No.2, pp.78, 2008.
-

- 
- [33] F. R. Schwarzl, H. W. Bree, C. J. Nederveen, G. A. Schwippert, L. C. E. Struik, C. W. van der Wal, "Behaviour of unfilled and filled rubbers in shear in the glass-rubber transition region," *Rheologica Acta*, Vol.5, No.4, pp.170-175, 1966.
- [34] M. Barquins, R. Courtel, "Rubber friction and the rheology of viscoelastic contact," *Wear*, Vol.32, pp.133-150, 1975.
- [35] 広中 清一郎, "摩擦と摩耗のはなし," *日本ゴム協会誌*, Vol.72, No.4, pp.186-193, 1999.
- [36] B. Lorenz, B. N. J. Persson, S. Dieleweit, T. Tada, "Rubber friction : Comparison of theory with experiment," *The European Physical Journal E*, Vol.34, No.12, pp.1-11, 2011
- [37] <http://www.packing.co.jp/>
- [38] 木村 正芳, "図解 トライボロジー 摩擦の科学と潤滑技術," 日刊工業新聞社, 2007.
- [39] Desmond F. Moore, "The Friction and Lubrication of Elastomers," Pergamon Press, pp.14, 1972.
- [40] Desmond F. Moore, "Friction and wear in rubbers and tyres," *Wear*, Vol.61, pp.273-282, 1980.
- [41] P. Gabriel, A.G. Thomas, J.J.C. Busfield, "Influence of interface geometry on rubber friction," *Wear*, Vol.268, pp.747-750, 2010.
- [42] F. P. Bowden, D. Tabor, "Friction, lubrication and wear: a survey of work during the last decade," *British Journal of Applied Physics*, Vol.17, No.12, pp.1521-1544, 1966.
- [43] Phil Attard, "Friction, adhesion, and deformation: dynamic measurements with the atomic force microscope," *Journal of Adhesion Science and Technology*, Vol.16, No.7, pp.753-791, 2002.
- [44] G. Carbone, B. Lorenz, B. N. J. Persson, A. Wohlers, "Contact mechanics and rubber friction for randomly rough surfaces with anisotropic statistical properties," *The European Physical Journal E*, Vol.29, No.3, pp.275-284, 2009.
- [45] R. S. Rivlin, A. G. Thomas, "Rupture of Rubber. I. Characteristic Energy for Tearing," *Journal of Polymer Science*, Vol.10, No.3, pp.291-318.
- [46] G. J. Lake, P. B. Lindley, "The Mechanical Fatigue Limit for Rubber," *Journal of Applied Polymer Science*, Vol.9, pp.1233-1251, 1965.
- [47] 佐藤 良泰, "ゴム状粘弾性物質の破壊現象 (その1) (基礎的な考え方と現象解析の手引)," *日本ゴム協会誌*, Vol.39, No.8, pp.602-621, 1966.
- [48] 網野 直也, 内山 吉隆, 岩井 智昭, "シリカ配合およびカーボン配合 SBR の摩擦機構に関する研究 - 乾燥面との摩擦 - ," *日本ゴム協会誌*, Vol.74, No.3, pp.110-115, 2001.
-

以上

修士論文

温度依存性を考慮した  
ゴム-路面間摩擦のマルチスケール評価

p.1 — p.108 完

2013 年 2 月 7 日提出

指導教員 泉 聡志 准教授

116234 森住 竜雄