

卒業論文

直動型摩擦試験に基づく
異種ゴム - 路面間の摺動特性評価

2015 年 1 月提出

指導教員 泉 聡志 教授

130202 世古口 涼

目次

第1章	序論	8
1.1	研究の背景	9
1.2	従来の研究	10
1.3	本研究の目的	11
1.4	本論文の構成	12
第2章	タイヤ - 路面間の摩擦理論	13
2.1	摩擦現象のマルチスケール性	14
2.2	ゴムの粘弾性特性	16
2.3	Persson の摩擦理論	18
2.3.1	接触理論	18
2.3.2	すべり摩擦	26
第3章	摩擦試験	31
3.1	ゴムサンプルの粘弾性特性	32
3.2	路面の表面粗さパワースペクトル	34
3.2.1	路面サンプル	34
3.2.2	表面高さデータの測定	35
3.2.3	表面粗さパワースペクトルの計算	36
3.3	直動型摩擦試験の概要	39
3.4	異種ゴム-路面における直動型摩擦試験	40
3.4.1	試験概要	40
3.4.2	試験結果	41
3.5	路面に水を散布した場合における直動型摩擦試験	44
3.5.1	試験概要	44
3.5.2	試験結果	45
第4章	摩擦係数予測	49
4.1	摩擦試験に基づくカットオフ波数 q_1 の同定	50
4.1.1	Persson の摩擦モデルによるカットオフ波数 q_1 の同定	50
4.1.2	非線形粘弾性挙動を考慮した摩擦係数予測	53
4.1.3	凝着摩擦を考慮した摩擦係数予測	55
4.2	異種路面における摩擦係数予測	57
4.3	異種ゴムにおける摩擦係数予測	59
4.4	考察	62
第5章	結論	65
付録A	き裂進展に基づくせん断応力の導出	67
	謝辞	68
	参考文献	69

図目次

Fig. 1-1 Simulation of tire property (© Bridgestone Corporation).....	9
Fig. 2-1 The surface roughness power spectrum of a self-affine fractal surface.....	15
Fig. 2-2 (a) Voigt • Kelvin Model (b)Maxwell Model.	17
Fig. 2-3 Generalized Maxwell Model.	17
Fig. 2-4 Elastic contact between a flat rubber and a hard solid substrate.	18
Fig. 2-5 The energy dissipated during the time period t_0 (macro).....	27
Fig. 2-6 The energy dissipated during the time period t_0 (micro).	27
Fig. 3-1 The complex modulus of elasticity.....	33
Fig. 3-2 (a)Safety-Walk type B (Surface A), (b)Continua (Surface B).....	34
Fig. 3-3 (a)Laser microscope, (b)Macroscope.....	35
Fig. 3-4 The surface roughness power spectrum: (a)Surface A, (b)Surface B.....	37
Fig. 3-5 Straight type friction tester.	39
Fig. 3-6 A cross sectional view of edge-processed rubber sample.....	40
Fig. 3-7 μ - v curves comparing R1 with R2 (a)Surface A (b)Surface B.	42
Fig. 3-8 μ - v curves comparing Surface A with Surface B (a)R1 (b)R2.	43
Fig. 3-9 μ - v curves comparing R1 with R2 under wet conditions for.....	46
Fig. 3-10 μ - v curves comparing between dry and wet conditions of Surface A for.....	47
Fig. 3-11 μ - v curves comparing between dry and wet conditions of Surface B for.....	48
Fig. 4-1 μ - v curves comparing the calculation with the experiment for R2 and Surface A under wet condition.	52
Fig. 4-2 μ - v curves accounting for nonlinear viscoelastic behavior (R2, Surface A).....	54
Fig. 4-3 μ - v curves accounting for adhesive effect (R2, Surface A).....	56
Fig. 4-4 μ - v curves accounting for adhesive effect (R2, Surface B).....	58
Fig. 4-5 μ - v curves comparing the calculation with the experiment for R2 and Surface A under wet condition (a) $\beta = 1.00$ (b) $\beta = 0.50$	60
Fig. 4-6 μ - v curves comparing the calculation with the experiment for R2 and Surface B under wet condition (a) $\beta = 1.00$ (b) $\beta = 0.50$	61
Fig. 4-7 v - p curve comparing Surface A with Surface B (R2, wet).....	63
Fig. 4-8 Nonlinear viscoelastic behaviors of R1 and R2; the change in the complex elastic modulus as a function of dynamic strain amplitude.....	64

表目次

Table 3-1 Test piece properties.	32
Table 3-2 Constants in the WLF equation.....	32
Table 3-3 Conditions of the measurements of the microscope and macroscope.....	35
Table 3-4 Calculated properties of the two surface specimens.	38
Table 3-5 Conditions of the friction tests for the dry surfaces.	40
Table 3-6 Conditions of the friction tests for the wet surfaces.....	44
Table 4-1 Calculation conditions for R2 and Surface A.....	51
Table 4-2 Calculation conditions for R2 and Surface B.....	57
Table 4-3 Surface properties for R2.....	63

第1章 序論

1.1 研究の背景

タイヤは唯一路面に接して車両を支える重要な機械要素であり、その摩擦係数は車両の性能を左右する重要な因子となる。タイヤの摩擦係数は一般的にゴムの粘弾性特性や路面の表面特性やなどによって定められ、すべり速度に依存することが知られている[1]。このように、タイヤの摩擦現象は様々な要因に依存する複雑な現象であり、モデル化は容易ではない。

タイヤの摩擦現象を複雑にしている要因として、路面表面粗さのマルチスケール性が挙げられる。従来のモデルでは単一のスケールで見た路面表面粗さのみを考慮していた[2]が、実際には路面には様々なスケールの粗さが存在している。そのため、タイヤ-路面間の摩擦係数を正確に推定するためには、路面表面粗さのマルチスケール性を考慮したモデルが必要である。

タイヤゴムの摩擦現象を複雑にしているもう一つの要因として、ゴムの粘弾性特性が挙げられる。粘弾性特性において、原理の解明や変形挙動の正確な表現を目指し様々な研究が行われてきた[3][4]。ゴムのような高分子材料を用いた製品を開発する際は、この粘弾性特性を考慮した解析が重要となる。

このように、タイヤ-路面間の摩擦現象を正確に記述し、摩擦係数を予測することは非常に困難である。しかし、企業でのタイヤ設計において、シミュレーション(Fig. 1-1 参照)は不可欠なものになっており、そこでは摩擦係数の設定が重要な問題となる。そのため、タイヤ開発において摩擦係数は実験を行うことによって得られているが、莫大な時間と費用を必要とする。そのため、摩擦現象を正確に表現することができるモデルを構築し、様々な条件における摩擦係数を予測することができれば、タイヤ開発における開発期間の短縮・費用削減・シミュレーション制度の向上が期待できる。

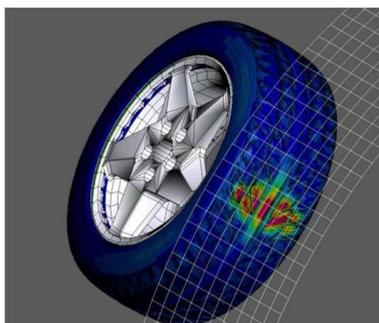


Fig. 1-1 Simulation of tire property (© Bridgestone Corporation).

1.2 従来の研究

Amontons の法則[5]によれば, 2 固体間のマクロの摩擦力 F_f は荷重 L に比例し, $F_f = \mu L$ を満たす. ここで, μ はマクロな摩擦係数であり, F_f は見かけの接触面積に依らない. その後, 真実接触領域についての考察[6]から, 摩擦力が真実接触面積に比例することが示された. これまでに, 様々な曲率半径の完全に滑らかな表面に対して, 摩擦特性を明らかにするための実験やシミュレーションが行われてきた[7].

しかし, ゴムのような超弾性体における摩擦は, 多くの点で他の固体間の摩擦特性とは異なる挙動を示すため, 滑らかな表面に対する摩擦理論をゴムの摩擦に適用するのは難しい. その摩擦特性の違いは, 広い周波数帯域で見られるゴムの非常に低い弾性率と大きい内部摩擦に起因している. ゴムの内部摩擦に起因する摩擦力を評価するためには, 表面の粗さによるゴムの変形を考えなければならない. そこで, Persson は, 単一の粗さを持つ理想化された表面に対するゴムの摩擦理論を構築した[8][9]. その後, Persson は実際の路面が不規則に粗い表面を持つことに着目し, 様々なスケールの粗さを考慮した摩擦モデルを提案した[10][11]. この Persson の摩擦モデルにより, 路面表面粗さパワースペクトルとゴムの粘弾性特性からゴムのヒステリシスロスに起因するゴム - 路面間の摩擦係数を計算することができる. さらに, Persson は, 摩擦によるゴムの局所的加熱を取り入れ, より正確な摩擦係数の導出を試みた[12]. また, 表面間の凝着力についても接触理論に基づいた評価が行われている[13][14]. 特に, ゴムの局所的加熱の影響については, 森住らにより摩擦試験に基づいた評価も報告されている[15][16]. また, 吉村により単一のゴムおよび単一の路面において摩擦試験と Persson の摩擦理論を比較する手法が提案されている[17].

上記のように, ゴム-路面間の摩擦において, Persson の摩擦モデルは摩擦係数を予測する有効な手段であると考えられる. しかし, Persson の摩擦モデルではマイクロなスケールにおけるカットオフ波数の決定方法についての見解が十分ではない. したがって, 様々なゴムや様々な路面において, 摩擦試験と摩擦モデルの比較を行うことにより, 摩擦モデルの妥当性を評価する必要がある.

1.3 本研究の目的

ゴム-路面間の摩擦において、Persson の摩擦モデルは摩擦係数を予測する有効な手段であると考えられるが、摩擦試験と比較評価した事例は未だ少ない。吉村の先行研究[17]では、単一種のゴムと単一種の路面を用いて Persson の摩擦モデルを検証し、その有用性を示した。しかし、本モデルがゴムおよび路面の任意の条件において適用可能かどうかは定かではない。そこで本研究では、異種ゴム-路面間の摩擦試験と、Persson の摩擦モデルの適用範囲の検証といった 2 つの目的を設定する。

第一の目的では、粘弾性特性が異なる 2 種のゴムと表面特性が異なる 2 種の路面を用いて、それぞれの試験条件においてすべり速度に依存した摩擦係数を測定し整理する。特に、2 種の路面に対しては、乾燥(ドライ)条件下と水を散布するウェット条件下の両方に対して摩擦試験を行い、測定データの拡充を図る。

次に第二の目的として、得られた測定データに基づき、Persson の摩擦モデルがどの程度の範囲で適用できるのかについて議論する。はじめに、ヒステリシス摩擦に対してドライ路面の実験値と比較することで、Persson の摩擦理論では決定方法が明らかではないカットオフ波数についての考察を行う。次に、ヒステリシス摩擦のモデルに加えて、Persson が提案する凝着摩擦のモデルも適用することで、ドライ路面とウェット路面の両条件下における実験値との正確な検証を行う。さらに必要に応じてはモデルの拡張を試み、Persson の摩擦モデルでは不十分な点について議論する。

1.4 本論文の構成

本論文の構成を以下に示す.

第1章「序論」

本研究の背景, 従来の研究, 研究の目的について述べる.

第2章「タイヤ-路面間の摩擦理論」

タイヤ-路面間の摩擦について, 概要を述べ, 本研究で用いる Persson の接触理論・摩擦理論について説明する.

第3章「摩擦試験」

本研究で用いるゴムおよび路面の特性を示し, 実施した直動型摩擦試験の概要と結果を説明して考察を行う.

第4章「摩擦係数予測」

本摩擦理論に基づく摩擦係数の計算を行い, 実験値と比較して考察を行う.

第5章「結論と今後の展望」

本研究における結論と今後の展望について述べる.

第2章 タイヤ - 路面間の摩擦理論

2.1 摩擦現象のマルチスケール性

路面表面の凹凸はあらゆるスケールで存在する．例えば，あるスケールで見た凹凸の表面を拡大すると，さらに小さい凹凸が存在することがわかる．Persson はあらゆるスケールの凹凸による摩擦力を考慮することで，ゴム-路面間における摩擦理論を構築した．

表面に様々なスケールの凹凸が存在するとき，その特性を表現するために表面粗さパワースペクトルを用いられる．ここで表面粗さパワースペクトル $C(q)$ は以下のように定義される．

$$C(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x \langle h(\mathbf{x})h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.1)$$

ここで， $h(\mathbf{x})$ は位置 $\mathbf{x} = (x, y)$ における高さプロファイルであり， $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表す．ここでは路面の等方性を仮定しているため，路面表面粗さパワースペクトルは波数ベクトル \mathbf{q} の絶対値 $q = |\mathbf{q}|$ のみに依存する．また，路面表面の統計的性質は基準位置に依らないと仮定しているため，高さプロファイルの自己相関関数は $h(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x})h(\mathbf{x}_0) = h(\mathbf{x})h(\mathbf{0})$ となる．つまり，路面表面の高さプロファイルの自己相関関数のアンサンブル平均をフーリエ変換したものが，路面表面粗さパワースペクトルである．路面表面粗さパワースペクトルは，路面凹凸の波数成分ごとの強さを表したものであると表現することもできる．

自然生成された表面のパワースペクトルをグラフに表すと，Fig. 2-1 のような形状になる．パワースペクトルがこのような形状になる表面をセルフアフィンフラクタル表面という．ここで，セルフアフィンフラクタル性は $q_0 < q < q_1$ の範囲で見られる． q_0 は低波数ロールオフであり，セルフアフィンフラクタル性を示す波数の最小値を示す． q_1 は高波数カットオフであり，その波長は分子スケールである．セルフアフィンフラクタル表面とは，表面の観察倍率を上げる際，高さを平面座標とは異なる倍率で表示すると，観察倍率を上げる前の表面と同じ表面プロファイルが見られる表面のことである．具体的には，次のようなスケール変換を考える．

$$x \rightarrow \zeta x, \quad y \rightarrow \zeta y, \quad z \rightarrow \zeta^H z$$

ただし ζ は倍率である．このとき，表面の統計的性質が倍率変更前後で変化しない表面がセルフアフィンフラクタル表面である．ここで， H はハースト数であり，フラクタル次元 D_f と， $D_f = 3 - H$ の関係がある．さらに，セルフアフィンフラクタル表面では，次の関係式が成り立つ．

$$C(q) = k \left(\frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)} \quad (k = \text{const.}) \quad (2.2)$$

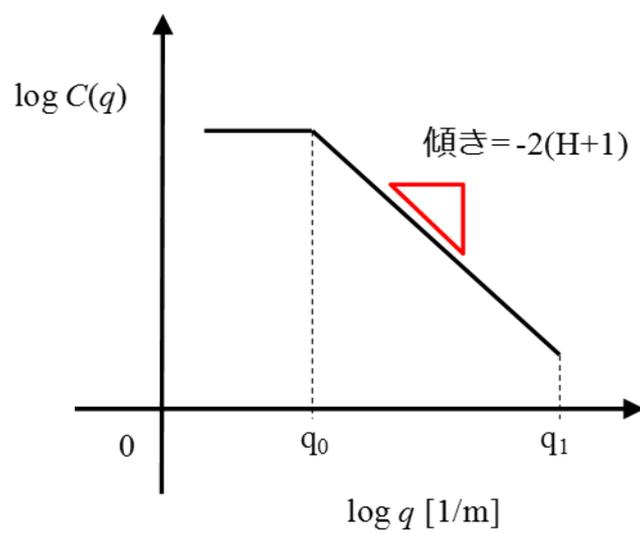


Fig. 2-1 The surface roughness power spectrum of a self-affine fractal surface.

2.2 ゴムの粘弾性特性

粘弾性体は非常に速い変形に対しては弾性的な、非常に遅い変形に対しては粘性的な振る舞いを見せる。このような挙動をスプリングとダッシュポットの力学モデルによって表現できれば、数学的に取り扱うことが容易になる。ここで、粘弾性体の典型的な挙動であるクリープと応力緩和を考える。この両挙動を表現するために考案された代表的なモデルが、Voigt・Kelvin モデルと Maxwell モデルである（参照 Fig. 2-2）。

実際の粘弾性体の力学的挙動は複雑であるため、構成要素数を増やして、より正確に挙動を近似することになる。そこで、本研究における粘弾性挙動の表現は Fig. 2-3 に示す一般化 Maxwell モデルを用いる。現在、粘弾性解析ではこの一般化 Maxwell モデルが広く使用されている。一般化 Maxwell モデルの応力緩和式と緩和弾性率はそれぞれ次式のように表される。

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sum_{i=1}^n \sigma_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \quad (2.3)$$

$$E(t) = E_0 + \sum_{i=1}^n E_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \quad (2.4)$$

ここで、 σ は応力、 E はヤング率である。 τ は緩和時間と呼ばれ、ダッシュポットの粘性係数 η を用いて $\tau = \eta/E$ で与えられる。また、動的変形を与えた場合の複素弾性率は次のように表される。

$$E(\omega) = E' + iE'' = E_0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{1}{E_i} + \frac{1}{i\omega\eta_i}} \quad (2.5)$$

ここで、 E' は貯蔵弾性率、 E'' は損失弾性率である。

Persson の摩擦理論では、式(2.5)で得られる複素弾性率を用いて摩擦係数の計算を行う。

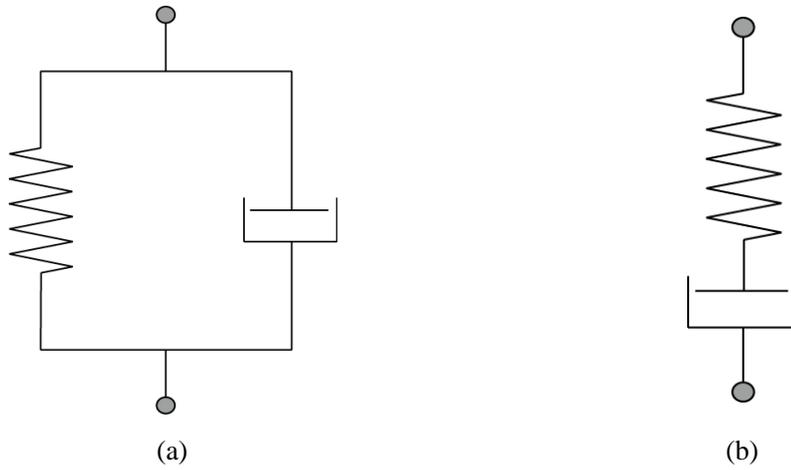


Fig. 2-2 (a) Voigt • Kelvin Model (b) Maxwell Model.

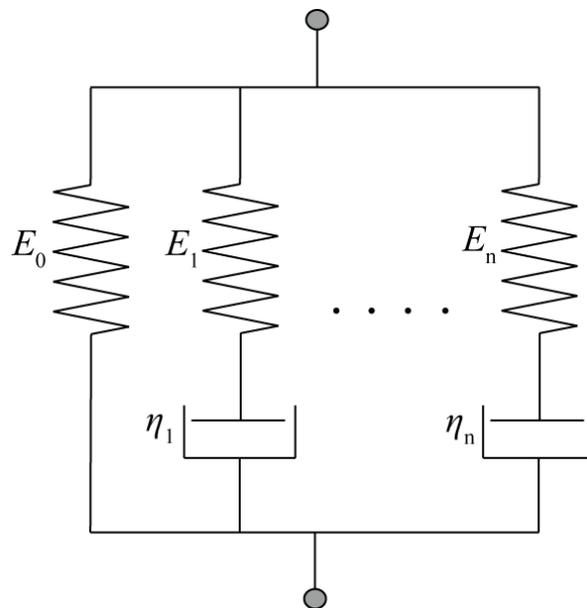


Fig. 2-3 Generalized Maxwell Model.

2.3 Persson の摩擦理論

2.3.1 接触理論

平らな表面を持つゴムブロックが、粗い路面表面に押しつけられている状態を考える。このとき、見かけ上ゴムの表面全体が路面に接触しているが、観察倍率を上げ、より詳細に見ると、そこには接触部と非接触部が混在している。さらにその接触部を拡大して見ると、その中にも接触部と非接触部が混在している (Fig. 2-4 参照)。このように見かけ上の接触領域は観察倍率によって変化し、最終的な真の接触領域は見かけの接触領域よりも非常に小さくなる。

Persson の摩擦理論においては路面の凹凸を波数空間で表す。つまり、摩擦力を路面の凹凸の波長の大きさごとに求める。波数は観察倍率に対応し、より大きい波数（より小さい波長）の凹凸ほど観察倍率は大きい。ここで、ある波数の路面凹凸の摩擦力への寄与を考えると、実際にゴムの変形をもたらし、摩擦力に寄与するのは、その波数に対応する観察倍率において、見かけ上ゴムと路面が接触している部分のみである。そこで、波数 q における見かけ上の接触領域の割合 $P(q)$ を考慮することによって、各スケールの凹凸による摩擦力を正しく見積もることが可能となる。 $P(q)$ は次式のように定義される。

$$P(q) = \frac{A(\zeta)}{A_0} \quad (2.6)$$

ここで、 A_0 は公称接触領域、 $A(\zeta)$ は倍率 ζ における見かけ上の接触領域である。また、 $q = q_0\zeta$ 、 q_0 は低波数ロールオフであり、 q が最も小さい波数 q_0 の ζ 倍の波数であるということを示している。本節では、この $P(q)$ の導出を説明する。

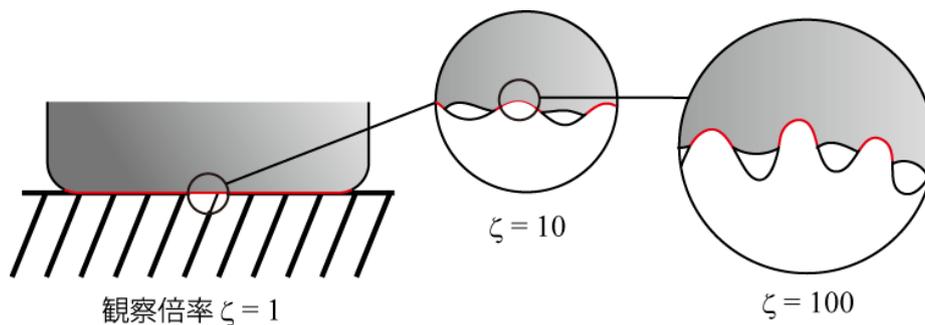


Fig. 2-4 Elastic contact between a flat rubber and a hard solid substrate.

ゴムブロックと路面の接触において、 A_0 を公称接触領域（倍率 $\zeta = 1$ での見かけの接触領域）とすると、全荷重 F_N は次式のように表される。

$$F_N = \sigma_0 A_0$$

ここで、 σ_0 は公称垂直応力である。長さスケール $\lambda = L/\zeta$ を考える。ここで、 L は公称接触領域の直径である。 $q_0 = 2\pi/L$ と定義すると、 $q = q_0\zeta$ より、

$$P(q) = P(q_0\zeta) \equiv P(\zeta)$$

倍率 ζ における見かけの接触領域の平均垂直応力を $\langle\sigma\rangle_\zeta$ と書けば、全荷重は常に一定であるので、

$$\sigma_0 A_0 = P(\zeta) A_0$$

よって、

$$P(\zeta) = \frac{\sigma_0}{\langle\sigma\rangle_\zeta} \quad (2.7)$$

したがって、 $P(\zeta)$ を求めるためには、まず $\langle\sigma\rangle_\zeta$ を求めなければならない。長さスケール $\lambda = L/\zeta$ での応力の確率分布を $P(\sigma, \zeta)$ と書けば

$$\langle\sigma\rangle_\zeta = \frac{\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta)}{\int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta)} \quad (2.8)$$

よって、式(2.8)を式(2.7)に代入して、

$$P(\zeta) = \frac{\sigma_0 \int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta)}{\int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta)} \quad (2.9)$$

あるスケールにおいて、見かけ上の接触領域ではゴムと路面は完全に接触していると仮定すると、

$$P(\sigma, \zeta) = \langle\delta(\sigma - \sigma_\zeta(x))\rangle$$

ここで、 $\sigma_\zeta(\mathbf{x})$ は倍率 ζ でかかる垂直応力である。 $\langle\dots\rangle$ はアンサンブル平均を表し、次式のように定義される。

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{A_0} \int d^2x f(x)$$

$\sigma_\zeta + \Delta\sigma$ を、長さスケール $L/(\zeta + \Delta\zeta)$ における垂直応力とすると、

$$\begin{aligned} P(\sigma, \zeta + \Delta\zeta) &= \langle\delta(\sigma - \sigma_\zeta - \Delta\sigma)\rangle \\ &= \int d\sigma' \langle\delta(\sigma' - \Delta\sigma)\delta(\sigma - \sigma_\zeta - \sigma')\rangle \\ &= \int d\sigma' \langle\delta(\sigma' - \Delta\sigma)\rangle P(\sigma - \sigma', \zeta) \end{aligned}$$

ここで、

$$\langle\delta(\sigma' - \Delta\sigma)\rangle = \frac{1}{2\pi} \int dw \langle e^{iw(\sigma' - \Delta\sigma)} \rangle$$

右辺を $\Delta\sigma = 0$ の周りでテイラー展開すると,

$$\begin{aligned}\langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int dw \langle e^{iw\sigma'} \left(1 - iw\Delta\sigma - \frac{w^2}{2} \Delta\sigma^2 + \dots \right) \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dw e^{iw\sigma'} \left(1 - \frac{w^2 \langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \right)\end{aligned}$$

ただし, 虚数項と3次以上の微小項は無視した. よって,

$$\begin{aligned}P(\sigma, \zeta + \Delta\zeta) &= \int d\sigma' P(\sigma - \sigma', \zeta) \frac{1}{2\pi} \int dw e^{iw\sigma'} \left(1 - \frac{w^2 \langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \right) \\ &= \int d\sigma' P(\sigma - \sigma', \zeta) \left[\delta(\sigma') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma'^2} \delta(\sigma') \langle \Delta\sigma^2 \rangle \right] \\ &= P(\sigma, \zeta) + \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2}\end{aligned}$$

左辺を $\Delta\zeta = 0$ の周りでテイラー展開すれば, 次式が得られる. ただし, 2次以上の微小項は無視する.

$$\begin{aligned}P(\sigma, \zeta) + \frac{\partial P(\sigma, \zeta)}{\partial \zeta} \Delta\zeta &= P(\sigma, \zeta) + \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial P(\sigma, \zeta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{\Delta\zeta} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2}\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \quad (2.10)$$

ここで,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{\Delta\zeta}$$

$P(\sigma, 1) = P_0(\sigma)$ とおくと,

$$P_0(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0)$$

式(2.10)は拡散型の方程式である. 一般的な拡散方程式における時間項は倍率 ζ に, 空間座標は垂直応力 σ に置き換えられている. よって, 倍率 ζ を上げていく(より小さいスケールを見ていく)と, $P(\sigma, \zeta)$ は σ 空間でより広がっていく. 表面間の凝着は無いという仮定では, $\sigma = 0$ で剥離が起こるので, 境界条件は次式のようなになる.

$$P(0, \zeta) = 0$$

式(2.10)の両辺に σ をかけて, σ にわたって積分すると,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty d\sigma \sigma \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \int_0^\infty d\sigma \sigma f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^{\infty} d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta) = 0$$

ζ で積分して,

$$\int_0^{\infty} d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta) = \sigma_0 \quad (2.11)$$

ただし, 総荷重はあらゆるスケールで不変という仮定を用いた.

次に式(2.10)を σ にわたって積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} d\sigma \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \int_0^{\infty} d\sigma f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^{\infty} d\sigma P(\sigma, \zeta) &= f(\zeta) \left\{ \frac{\partial P(\infty, \zeta)}{\partial \sigma} - \frac{\partial P(0, \zeta)}{\partial \sigma} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^{\infty} d\sigma P(\sigma, \zeta) &= -f(\zeta) \frac{\partial P(0, \zeta)}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

ζ で積分して,

$$\begin{aligned} \left[\int_0^{\infty} d\sigma P(\sigma, \zeta') \right]_1^{\zeta} &= - \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} \\ \Leftrightarrow \int_0^{\infty} d\sigma P(\sigma, \zeta) - \int_0^{\infty} d\sigma P(\sigma, 1) &= - \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} \\ \Leftrightarrow \int_0^{\infty} d\sigma P(\sigma, \zeta) &= 1 - \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (2.12)$$

式(2.9)に式(2.11)と式(2.12)を代入して,

$$P(\zeta) = 1 - \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} \quad (2.13)$$

次に, $\langle \Delta \sigma^2 \rangle$ を計算する.

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^2 \rangle &= \frac{1}{A_0} \int d^2 x \sigma_z(\mathbf{x}) \sigma_z(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{A_0} \int d^2 x \sigma_z(\mathbf{x}) \int d^2 q \sigma_z(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} \\ &= \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q \sigma_z(-\mathbf{q}) \sigma_z(\mathbf{q}) \\ &= \int d^2 q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} \frac{(2\pi)^2}{A_0} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ u_z(\mathbf{q}) &\rightarrow h(\mathbf{q}) \text{とすれば,} \\ &= \int d^2 q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} \frac{(2\pi)^2}{A_0} \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle \end{aligned}$$

$$= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, q_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -q_x v)]^{-1} C(q)$$

ここで, M_{zz} は次式で表される.

$$(M_{zz})^{-1} = -\frac{Eq}{2(1-v^2)}$$

よって,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^2 \rangle &= \frac{1}{4} \int d^2q q^2 C(q) \left| \frac{E(qv \cos \varphi)}{1-v^2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \int dq q^3 C(q) \int d\varphi \left| \frac{E(qv \cos \varphi)}{1-v^2} \right|^2 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta \sigma^2 \rangle}{\Delta \zeta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta \sigma^2 \rangle}{\Delta q} q_0 \quad (\because q = q_0 \zeta) \\ &= \frac{1}{8} q_0 q^3 C(q) \int d\varphi \left| \frac{E(qv \cos \varphi)}{1-v^2} \right|^2 \end{aligned}$$

新たに, $f(\zeta) = f(q)$ と置き, $g(q) = f(q)/\sigma_0^2$ とすると,

$$g(q) = \frac{1}{8} q_0 q^3 C(q) \int d\varphi \left| \frac{E(qv \cos \varphi)}{1-v^2} \right|^2 \quad (2.14)$$

ここからは, 式(2.10)を解くことを考える. 式(2.10)を再掲すると,

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \quad (2.10)$$

境界条件は,

$$P(0, \zeta) = P(\sigma_Y, \zeta) = 0 \quad (2.15)$$

$$P(\sigma, 1) \equiv P_0(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0) \quad (2.16)$$

ここでは, 一般的な条件を設定し, $P(0, \zeta)$ は $0 < \sigma < \sigma_Y$ でのみ定義されるとした. 後に, $\sigma_Y \rightarrow \infty$ とすることで最終的な解を導く. 式(2.10)の一般解は次式のように表される.

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta) \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right) \quad (2.17)$$

式(2.17)を式(2.10)に代入して,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial A_n}{\partial \zeta} \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-f(\zeta) \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 A_n \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right) \right] \\ \Leftrightarrow \frac{\partial A_n}{\partial \zeta} &= -f(\zeta) \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 A_n \end{aligned}$$

ζ で積分して,

$$A_n(\zeta) = C \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \quad (C = \text{const.})$$

$\zeta = 1$ を代入すれば,

$$C = A_n(1)$$

よって,

$$A_n(\zeta) = A_n(1) \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right]$$

式(2.17)に代入して,

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(1) \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \quad (2.18)$$

三角関数の直交性より, 次式が成り立つ.

$$\int_0^{\sigma_Y} d\sigma \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \sin \left(\frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) = \frac{\sigma_Y}{2} \delta_{nm} \quad (2.19)$$

ここで, n, m は自然数とする. 式(2.17)の両辺に $\sin(m\pi\sigma/\sigma_Y)$ をかけて, $0 \sim \sigma_Y$ まで積分すると,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sigma_Y} d\sigma P \sin \left(\frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(1) \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \int_0^{\sigma_Y} d\sigma \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \sin \left(\frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \end{aligned}$$

式(2.19)を用いると,

$$\int_0^{\sigma_Y} d\sigma P \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) = A_n(1) \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \frac{\sigma_Y}{2}$$

さらに, $\zeta = 1$ を代入すれば,

$$\begin{aligned} A_n(1) &= \frac{2}{\sigma_Y} \int_0^{\sigma_Y} d\sigma P(\sigma, 1) \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \frac{2}{\sigma_Y} \int_0^{\sigma_Y} d\sigma \delta(\sigma - \sigma_0) \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \frac{2}{\sigma_Y} \sin \alpha_n \end{aligned} \quad (2.20)$$

ただし,

$$\alpha_n = \frac{n\pi\sigma_0}{\sigma_Y} \equiv s\sigma_0 \quad (2.21)$$

式(2.20)を式(2.18)に代入して,

$$P = \frac{2}{\sigma_Y} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \quad (2.22)$$

極限 $\sigma_Y \rightarrow \infty$ をとると,

$$\sum_n^\infty \rightarrow \int_0^\infty dn = \frac{\sigma_Y}{\pi} \int_0^\infty ds \quad (\because s = \frac{n\pi}{\sigma_Y})$$

よって, 式(2.22)は次式のようになる.

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \sin(s\sigma_0) \exp \left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \sin(s\sigma) \quad (2.23)$$

ここで, 次式に示す J を考える.

$$J = \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')$$

ただし, 式(2.15)より, $P(\zeta) = 1 - J$ である. 式(2.25)より,

$$\frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \exp \left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'') \right] \cos(s\sigma)$$

よって,

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \exp \left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'') \right] \quad (2.24)$$

ここで,

$$\begin{aligned} \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \exp \left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'') \right] &= \left[-\frac{1}{s^2} \exp \left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'') \right] \right]_1^\zeta \\ &= \frac{1}{s^2} \left(1 - \exp \left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \right) \end{aligned}$$

式(2.26)に代入して,

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \frac{1}{s^2} \left(1 - \exp \left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp \left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp \left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \end{aligned}$$

ただし,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} = 1$$

という関係式を用いた. よって,

$$\begin{aligned} P(\zeta) &= 1 - J \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp \left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \right] \end{aligned}$$

$s\sigma_0 = x$ と置き換えると,

$$P(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin(x)}{x} \exp\left[-x^2 \int_1^\zeta d\zeta' g(\zeta')\right] \quad (2.25)$$

ただし, $g(q) = g(q_0\zeta) \equiv g(\zeta)$ であり, 式(2.16)によって与えられる. まとめると,

$$P(q) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin(x)}{x} \exp[-x^2 G(q)] \quad (2.26)$$

ただし, 式(2.14)より,

$$G(q) = \frac{1}{8} \int_{q_0}^q dq q^3 C(q) \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \frac{E(qv\cos\varphi)}{(1-v^2)\sigma_0} \right|^2 \quad (2.27)$$

さらに, ほとんどの場合, $\sigma_0 \ll E(0)$ であり, この場合 $G(q) \gg 1$ となり, 式(2.21)の積分範囲の内 $x \ll 1$ の部分の寄与のみが計算結果に影響する. よって, $\sin x \approx x$ と近似することができ, 次式が成り立つ.

$$\begin{aligned} P(q) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin(x)}{x} \exp[-x^2 G(q)] \\ &= [\pi G(q)]^{-1/2} \quad (\because \text{ガウス積分}) \end{aligned}$$

このとき, $P(q) \sim \sigma_0$ が成り立つので, 2.3.2項で導出する摩擦係数の式と合わせると, 摩擦係数が公称垂直応力 σ_0 に依存しないことがわかる. さらに, $G(q) \rightarrow 0$ のとき $P(q) \rightarrow 1$ を考慮すると, 補間公式より, 次の近似式が成り立つ.

$$P(q) = (1 + [\pi G(q)]^{3/2})^{-1/3} \quad (2.28)$$

2.3.2 すべり摩擦

ゴムブロックが粗い路面上をすべる際の変位場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ について,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t)$$

と仮定すると,

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2x dt \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t)}$$

ここで, $\mathbf{x} - \mathbf{v}t = \mathbf{k}$ とおくと, \mathbf{v} は \mathbf{x} に依存しないため $dk/dx = 1$ より,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2k dt \mathbf{u}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{k} + i(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v})t} \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}) \mathbf{u}(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Fig. 2-5 より, ゴムと路面間のせん断摩擦力を σ_f とすると, 時間 t_0 の間に摩擦によって散逸するエネルギー ΔE は,

$$\Delta E = \sigma_f A_0 v t \quad (2.30)$$

また, Fig. 2-6 のように ΔE をゴムの変形に使われたエネルギーとして表すと,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int d^2x dt \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int d^2x dt \left[\frac{d}{dt} \int d^2q d\omega \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int d^2q d\omega (-i\omega) \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) \left[\int d^2x dt \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \right] \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) \cdot \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{q}, -\omega) \end{aligned} \quad (2.31)$$

ここで,

$$u_z(\mathbf{q}, \omega) = M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) \sigma_z(\mathbf{q}, \omega)$$

より,

$$\sigma_z(-\mathbf{q}, -\omega) = [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(-\mathbf{q}, -\omega)$$

式(2.31)に代入して, 式(2.29)を用いると,

$$\begin{aligned} \Delta E &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) u_z(\mathbf{q}, \omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(-\mathbf{q}, -\omega) \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) \delta(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}) \delta(-\omega + \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) [\delta(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v})]^2 [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \end{aligned}$$

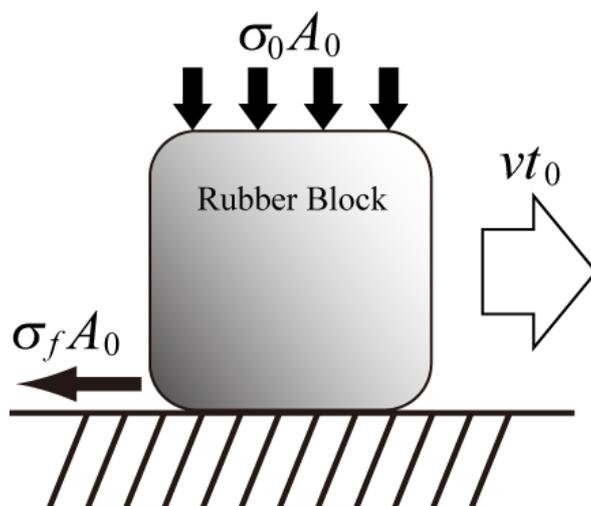


Fig. 2-5 The energy dissipated during the time period t_0 (macro).

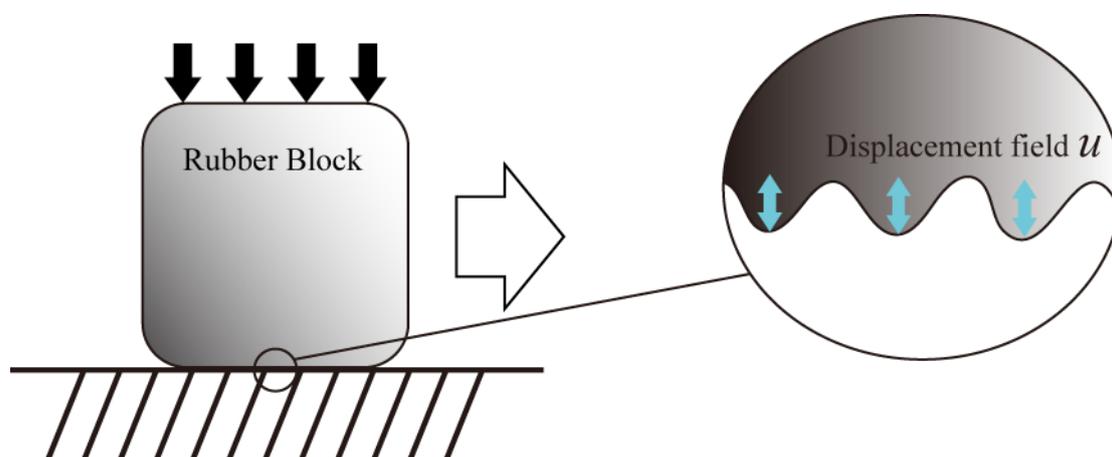


Fig. 2-6 The energy dissipated during the time period t_0 (micro).

ここで,

$$\begin{aligned}
[\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})]^2 &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})\delta(0) \\
&= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \\
&= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} dt \\
&= \frac{t_0}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})
\end{aligned}$$

という関係式を用いると,

$$\begin{aligned}
\Delta E &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2 q d\omega (-i\omega) \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\
&= (2\pi)^2 t_0 \int d^2 q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q})
\end{aligned} \tag{2.32}$$

式(2.32)と式(2.30)を比較して,

$$\begin{aligned}
\sigma_f A_0 v t &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2 q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\
\Leftrightarrow \sigma_f &= \frac{(2\pi)^2}{v A_0} \int d^2 q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle
\end{aligned} \tag{2.33}$$

ここで, $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表し,

$$\begin{aligned}
\langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle &= \frac{1}{A_0} \int d^2 x u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\
&= u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q})
\end{aligned}$$

という関係式を用いた. さらに, ゴムが x 方向にすべるとすれば, $\omega = q_x v$ と書けるので,

$$\sigma_f = -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle [M_{zz}(-\mathbf{q}, -q_x v)]^{-1} \tag{2.34}$$

路面の表面プロファイルは次のように記述される.

$$u_z = h(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} = (x, y))$$

ゴムが路面上をすべる際, 路面の表面プロファイルに完全に追従するとすれば,

$$u_z = h(\mathbf{x})$$

と書けるので, 式(2.34)は次のように表される.

$$\sigma_f = -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle [M_{zz}(-\mathbf{q}, -q_x v)]^{-1} \tag{2.35}$$

ここで、式(2.1)を再掲すると、

$$C(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2x \langle h(\mathbf{x})h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \quad (2.1)$$

さらに、 $\langle h(\mathbf{x})h(\mathbf{x}') \rangle$ が $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ のみに依存することを用いると、次の関係式が得られる。

$$\langle h(\mathbf{q})h(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q) \quad (2.36)$$

式(2.36)と M_{zz} を式(2.35)に代入すれば

$$\begin{aligned} \sigma_f &= -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2q q_x \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q) \left[-\frac{2(1-\nu^2)}{E(-\omega)q} \right]^{-1} \\ &= i \frac{1}{2} \int d^2q q^2 \cos \varphi C(q) \frac{E(-\omega)}{1-\nu^2} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2q q^2 \cos \varphi C(q) \text{Im} \frac{E(q\nu \cos \varphi)}{1-\nu^2} \end{aligned} \quad (2.37)$$

$q_x = q \cos \varphi$, $E = E(\omega) = E(q\nu \cos \varphi)$ である。厳密には ν も周波数に依存するが、その依存度は無視できるほど小さい。Amontons-Coulombの法則より、摩擦係数 μ_h を $\mu_h = \sigma_f / \sigma_0$ と定義すると、

$$\mu_h = \frac{1}{2} \int d^2q q^2 \cos \varphi C(q) P(q) \text{Im} \frac{E(q\nu \cos \varphi)}{(1-\nu^2)\sigma_0} \quad (2.38)$$

ここで、2.3.1項で導出した真実接触面積の割合 $P(q)$ を導入した。さらに、波数空間において直交座標から極座標への座標変換を考えると、

$$\begin{aligned} \begin{cases} q_x = q \cos \varphi \\ q_y = q \sin \varphi \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} dq_x = \cos \varphi dq - q \sin \varphi d\varphi \\ dq_y = \sin \varphi dq + q \cos \varphi d\varphi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} dq_x \\ dq_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -q \sin \varphi \\ \sin \varphi & q \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq \\ d\varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

右辺の行列のヤコビアン $|J|$ は、

$$|J| = q \cos^2 \varphi + q \sin^2 \varphi = q$$

よって、

$$d^2q = dq_x dq_y = q dq d\varphi$$

したがって、式(2.38)は次のように表される。

$$\mu_h = \frac{1}{2} \int d^2q q^3 C(q) P(q) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \text{Im} \frac{E(q\nu \cos \varphi)}{(1-\nu^2)\sigma_0} \quad (2.39)$$

$\langle h^2 \rangle = h_0^2 / 2$ と定義し、さらに、路面がセルフアフィンフラクタル性を持つと仮定すると、式(2.2)より、

$$\frac{h_0^2}{2} = 2\pi \int_{q_0}^{q_1} dq q C(q)$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_{q_0}^{q_1} dq q k \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1)} \\
&= \frac{\pi}{H} q_0^{2(H+1)} k (q_0^{-2H} - q_1^{-2H})
\end{aligned}$$

ここで, $q_0 \ll q_1$ より,

$$\frac{h_0^2}{2} \cong q_0^2 k$$

よって,

$$k \approx \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2$$

したがって,

$$C(q) \approx \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1)} \quad (2.40)$$

式(2.40)を式(2.39)に代入して, $q = q_0 \zeta$ を用いて μ を ζ で表した近似式は次のようになる.

$$\mu_h \approx \frac{1}{4\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^{q_1/q_0} d\zeta \zeta^{-2H+1} P(\zeta) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \operatorname{Im} \frac{E(\zeta q_0 v \cos \varphi)}{(1-v^2)\sigma_0} \quad (2.41)$$

さらに, 式(2.27)は次のように書きかえられる.

$$G(\zeta) = \frac{1}{16\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^\zeta d\zeta' \zeta'^{-2H+1} P(\zeta') \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \frac{E(q_0 \zeta' v \cos \varphi)}{(1-v^2)\sigma_0} \right|^2 \quad (2.42)$$

第3章 摩擦試験

3.1 ゴムサンプルの粘弾性特性

本研究の摩擦試験では、ゴムサンプルとして「Rubber1」および「Rubber2」を用いる。以降、それぞれ「R1」、「R2」と称する。ゴムサンプルの配合データを Table 3-1 に示す。ただし、phr はゴム重量 100 に対する各種配合剤の重量部である。

Persson の理論による摩擦係数の計算にはゴム試験片の複素弾性率が必要である。そこで、ゴム試験片の複素弾性率を粘弾性試験によって求めた。複数の温度条件下で計測を実施し、WLF 変換式により周波数 f をシフトして重ね合わせを行い、周波数範囲 $5.0 \times 10^{-1} \sim 1.25 \times 10^6$ Hzにおける複素弾性率を算出した。WLF 変換式は次式で表される。

$$\log a_T = \frac{-C_1(T - T_s)}{C_2 + T - T_s} \quad (3.1)$$

ここで、 a_T はシフトファクター、 T_s は基準温度である。本研究の摩擦試験では $T_s = 25$ °Cとし、 C_1 、 C_2 は Table 3-1 の値を用いる。Fig. 3-1 は $5.0 \times 10^{-1} \sim 1.25 \times 10^6$ Hzにおいて測定した粘弾性応答に一般化 Maxwell モデルを適用して得られたフィッティング曲線を示している。損失正接 $\tan \delta$ とは、貯蔵弾性率 E' に対する損失弾性率 E'' の割合、すなわち $\tan \delta = E''/E'$ である。また、 $1 \sim 10^2$ Hzの範囲では、実験値を基に複素弾性率を直線近似をしている。

R1 において、 $0 \sim 10^6$ Hzの周波数帯域では、貯蔵弾性率、損失弾性率ともに増加し、 10^6 Hz付近で損失弾性率はピークを迎え、より大きい周波数では減少に転じている。R2 においては、損失弾性率がピークに達する周波数が 10^5 Hz付近になっている。

Table 3-1 Test piece properties.

	R1	R2
SBR [phr]	100	100
Carbon black [phr]	60	70
Softener [phr]	40	40
Sulfur [phr]	1.5	1.5
Others	Age inhibitor, Rubber accelerator, etc.	

Table 3-2 Constants in the WLF equation.

	R1	R2
C_1	3.06	10.36
C_2	92.7	144.5

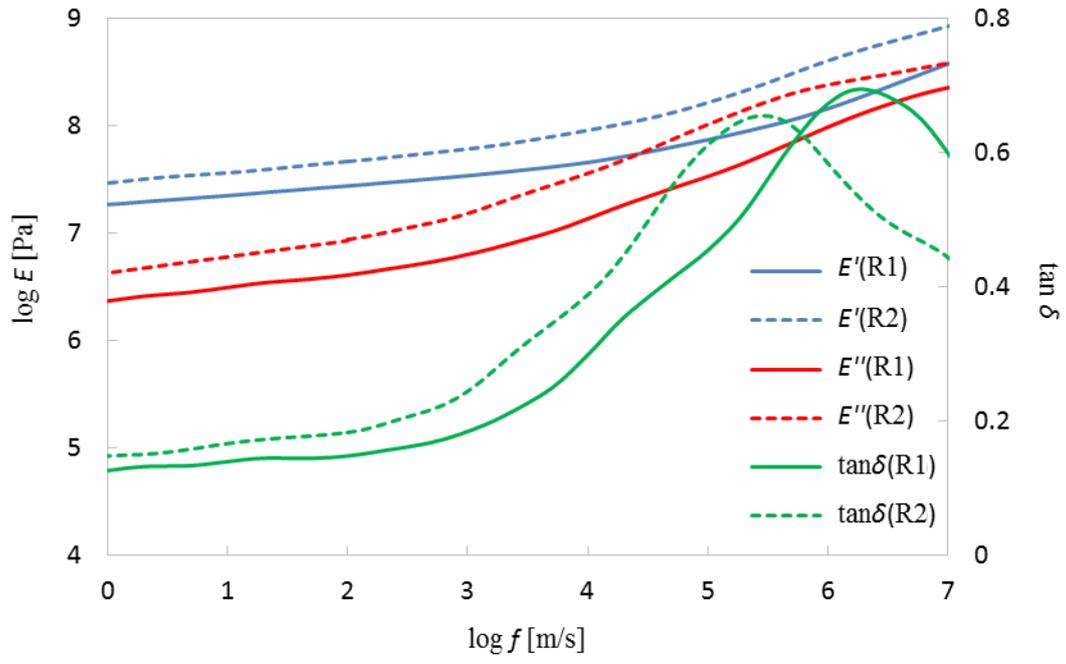


Fig. 3-1 The complex modulus of elasticity.

3.2 路面の表面粗さパワースペクトル

3.2.1 路面サンプル

本研究の摩擦試験では，路面サンプルとして Fig. 3-2 に示す 3M 社製すべり止めテープ「セーフティ・ウォーク タイプ B」および MARAZZI 社製タイル「コンテニューア」を用いる．以降，それぞれ「路面 A」，「路面 B」と称する．



(a)



(b)

Fig. 3-2 (a)Safety-Walk type B (Surface A), (b)Continua (Surface B).

3.2.2 表面高さデータの測定

路面サンプルの表面粗さパワースペクトルを得るため、まず、表面凹凸の高さデータを計測する必要がある。本研究では、Fig. 3-3 に示すレーザー顕微鏡 (KEYENCE VK-9500) およびマクロスコープ (KEYENCE VR-3100) を用いて計測を行った。Table 3-3 に計測条件を示す。レーザー顕微鏡においては、10 倍と 100 倍の 2 種の対物レンズを用いて、計測倍率 200 倍と 2000 倍で、それぞれの路面に対して測定を行った。さらに、路面 A においては、マクロスコープを用いて、測定倍率 40 倍で測定を行った。本計測では、路面 A においては、3 種の計測倍率により、また、路面 B においては、2 種類の計測倍率により、 $10^3 < q < 10^7 [1/m]$ の波数範囲の表面粗さパワースペクトルを得る。



(a)



(b)

Fig. 3-3 (a)Laser microscope, (b)Macroscope.

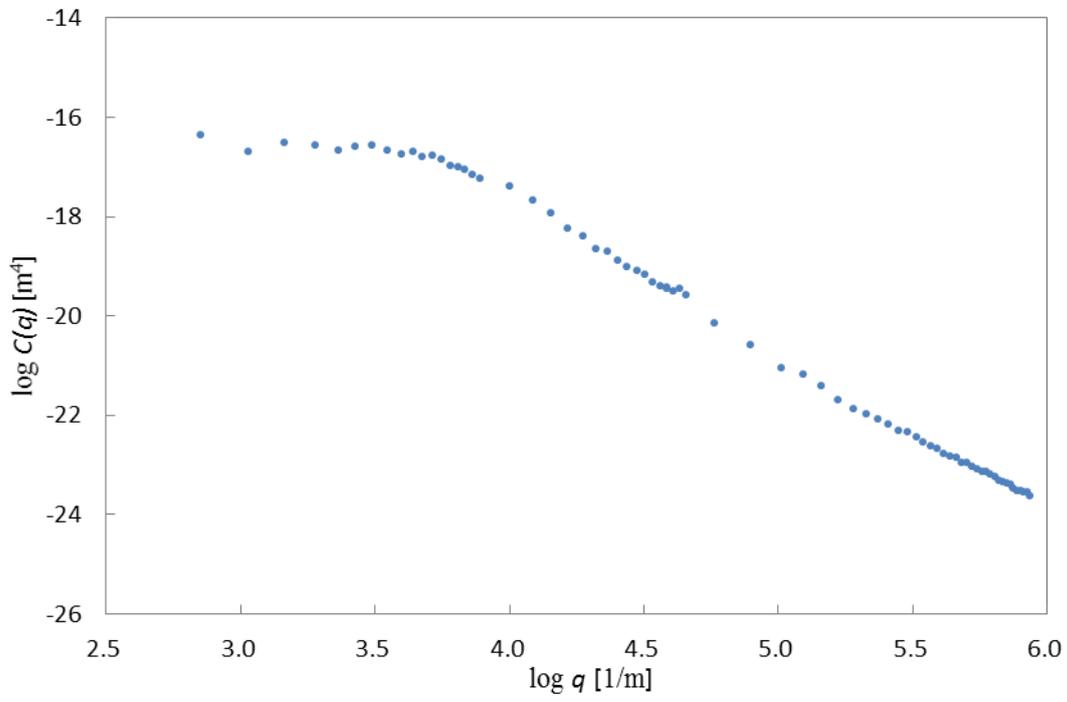
Table 3-3 Conditions of the measurements of the microscope and macroscope.

Measuring machine	Macroscope (KEYENCE VR-3100)	Laser microscope (KEYENCE VK-9500)
Observed area	$15.161 \times 15.161 [\text{mm}^2] (\times 40)$	$2.849 \times 2.849 [\text{mm}^2] (\times 200)$
		$0.281 \times 0.281 [\text{mm}^2] (\times 2000)$
Points	2048×2048	2048×2048

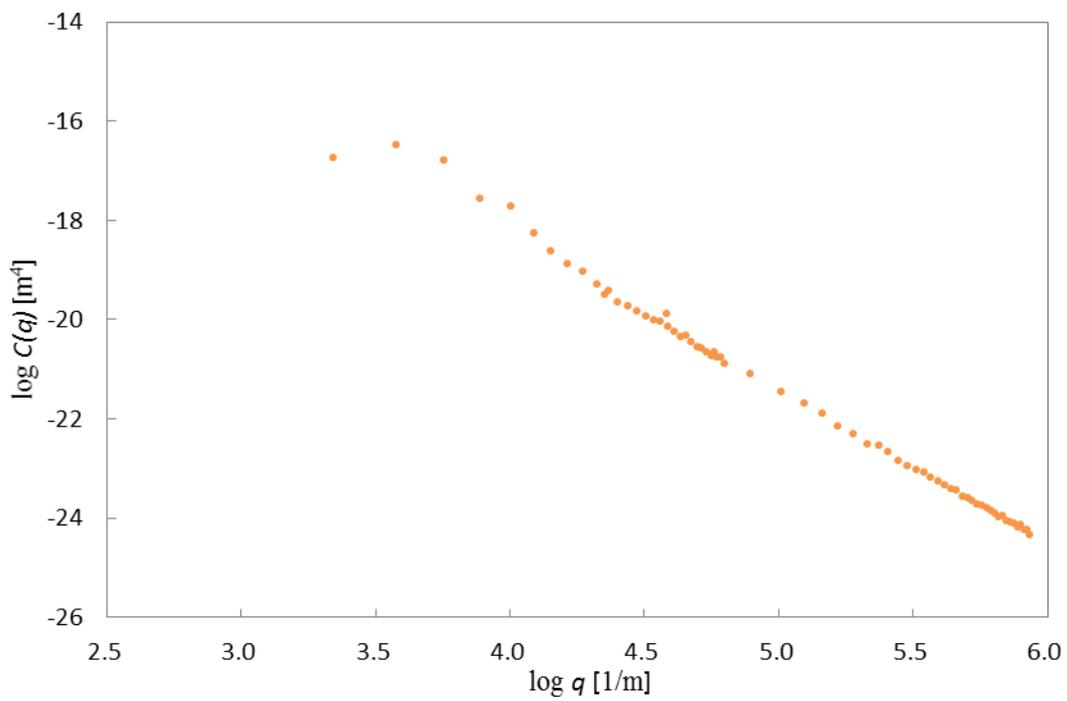
3.2.3 表面粗さパワースペクトルの計算

得られた表面高さデータから、路面 A と路面 B のそれぞれの表面粗さパワースペクトルを計算した。路面 A, 路面 B の表面粗さパワースペクトルを Fig. 3-4 に示す。横軸は波数 q 、縦軸は表面粗さパワースペクトル $C(q)$ である。実表面の表面粗さパワースペクトルにはばらつきが存在するため、 $C(q)$ を求める際、波数 q に対する平均化処理を行った。また、各観測倍率において計測のノイズの影響が出ていると考えられる高波数領域のデータはカットした。計算結果から、路面の表面粗さパワースペクトルの低波数領域における水平部分および高波数領域における傾斜部分がそれぞれほぼ直線で得られ、観察した倍率において、路面表面がセルフアフィンフラクタル性を有することが分かる。ここで、低波数領域における $C(q)$ の平均値を用いて横軸に並行な 1 本目の直線を生成し、高波数領域における傾斜部分を近似することにより 2 本目の直線を生成し対応する傾き a を得る。 $a = -2(H + 1)$ の関係式によりハースト指数 H を決定する。また、2本の直線の交点を計算し、その点の波数よりロールオフ波数 q_0 を得る。

路面 A および路面 B の表面粗さパワースペクトルより得られた情報を Table 3-4 に示す。 h_0 は $\langle h^2 \rangle = h_0^2/2$ により定義され、路面の平均粗さに対応する。



(a)



(b)

Fig. 3-4 The surface roughness power spectrum: (a)Surface A, (b)Surface B.

Table 3-4 Calculated properties of the two surface specimens.

	Surface A	Surface B
Surface sample	Safety-Walk type B (3M Japan Ltd)	Continua (MARAZZI Japan Co.,Ltd.)
q_0 [1/m]	5070.0	3341.7
h_0 [μm]	82.8859	50.5383
H	0.63069	0.60671

3.3 直動型摩擦試験の概要

本試験には、Fig. 3-5 に示す直動型摩擦試験機 TL201Ts（株式会社トリニティーラボ）を用いる。本試験機は、移動テーブルが指定した速度で地面と平行に移動し、ロードセルによりせん断摩擦力を計測し、垂直負荷荷重とせん断摩擦力の比から摩擦係数を求める。本試験では、移動テーブル上に路面を固定し、また、平面接触子にゴムサンプルを取付け、分銅を用いて垂直荷重を負荷した。



Fig. 3-5 Straight type friction tester.

3.4 異種ゴム-路面における直動型摩擦試験

3.4.1 試験概要

本試験では2種類のゴムサンプルおよび2種類の路面を使用した。ゴムサンプルの寸法は、28.3 mm × 28.3 mm × 4.0 mmである。垂直荷重は200 gを負荷し、公称垂直応力は $\sigma_0 = 2450 \text{ Pa}$ で一定とする。Fig. 3-6 に概略的に示すように、各ゴムサンプルにおいて、摺動方向前方の1辺のエッジ部分を面取りし、丸みづけを行った。以下エッジ処理と称する。すべり速度 v については、温度上昇および摩耗の影響が少ない低速度領域 ($10^{-4} \leq v \leq 10^{-2} [\text{m/s}]$) において試験を行った。ここで、サンプリングスピードは 10^{-3} s と十分に小さく、測定距離20.0 mmで十分なデータ点数が確保できた。

試験条件を Table 3-5 に示す。ここで、各試験における試行回数は3回である。

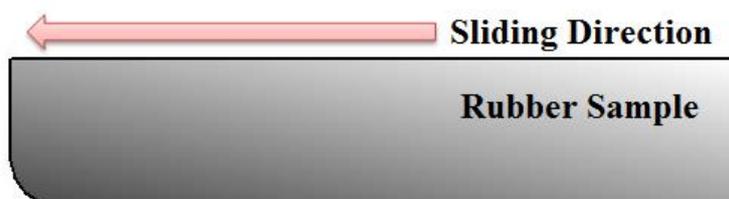


Fig. 3-6 A cross sectional view of edge-processed rubber sample.

Table 3-5 Conditions of the friction tests for the dry surfaces.

Rubber sample	Surface	Weight [g]	Sliding velocity [mm/s]	Measuring distance [mm]	The number of trials
R1	A	200	0.1~10.0	20.0	3
R2	A	200	0.1~10.0	20.0	3
R1	B	200	0.1~10.0	20.0	3
R2	B	200	0.1~10.0	20.0	3

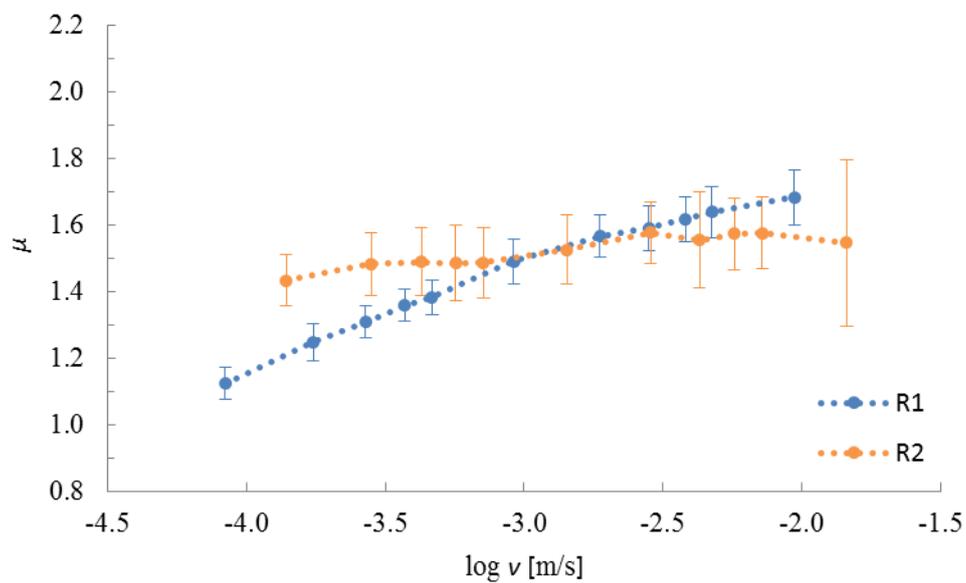
3.4.2 試験結果

路面 A および路面 B における試験結果を Fig. 3-7 に示す。また、ゴムサンプル R1 および R2 の、路面の違いによる比較を Fig. 3-8 に示す。摺動開始直後のデータは、計測が安定しなかったために除いた。ここで、すべり速度において、式(3.1)に示される WLF 変換式を用い、温度が $T = 25[^\circ\text{C}]$ における値にシフトを行った。また、図中のエラーバーは、各すべり速度における全試行を通しての標準偏差 S を表す。

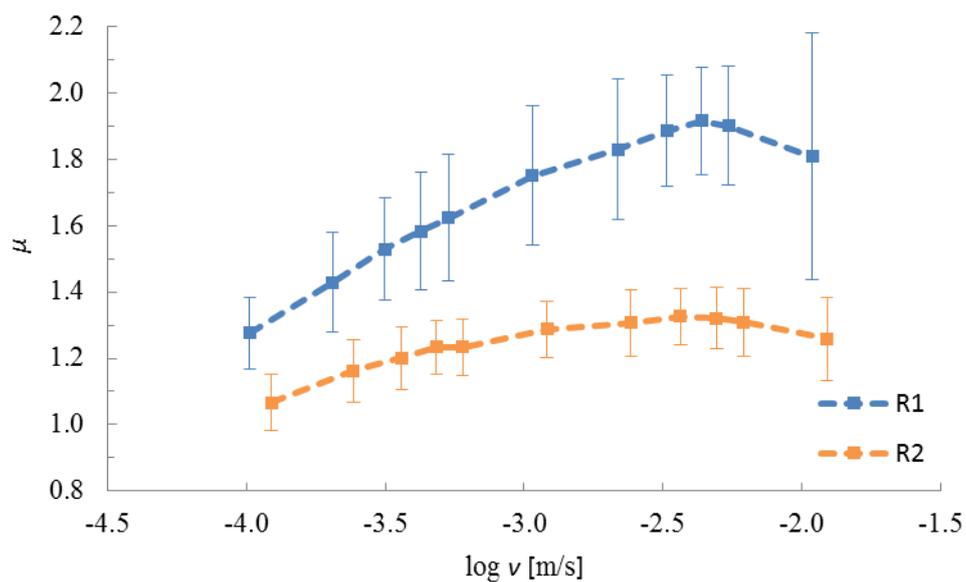
各試験において、低速度領域から中速度領域においては摩擦係数が単調増加している。高速度領域においては摩擦係数の減少が見られる。高速度領域においては、摺動面での温度上昇が生じ、摩擦係数が減少したと考えられる。また、摩擦係数がすべり速度の増加に伴い低下する場合には、スティックスリップと呼ばれる現象が発生し、摩擦係数が減少することが知られている[18]。

Fig. 3-7 より、路面 A において、すべり速度に対する摩擦係数の増加率は R1 が R2 と比較して大きい。また、摩擦係数について、 $v \leq 10^{-3} \text{ m/s}$ の領域においては R2 が R1 と比較して大きく、 $v \geq 10^{-3} \text{ m/s}$ の領域においては R1 が R2 と比較して大きい。路面 B において、すべり速度に対する摩擦係数の増加率は、路面 A と同様に、R1 が R2 と比較して大きい。また、摩擦係数について、全速度領域において R1 が R2 と比較して大きい。

Fig. 3-8 より、R1 において、すべり速度に対する摩擦係数の増加率は路面 B が路面 A と比較して大きい。また、摩擦係数について、全速度領域において路面 B が路面 A と比較して大きい。R2 において、すべり速度に対する摩擦係数の増加率は、路面 B が路面 A と比較して大きい。また、摩擦係数について、全速度領域において路面 A が路面 B と比較して大きく、R1 と逆の結果となった。

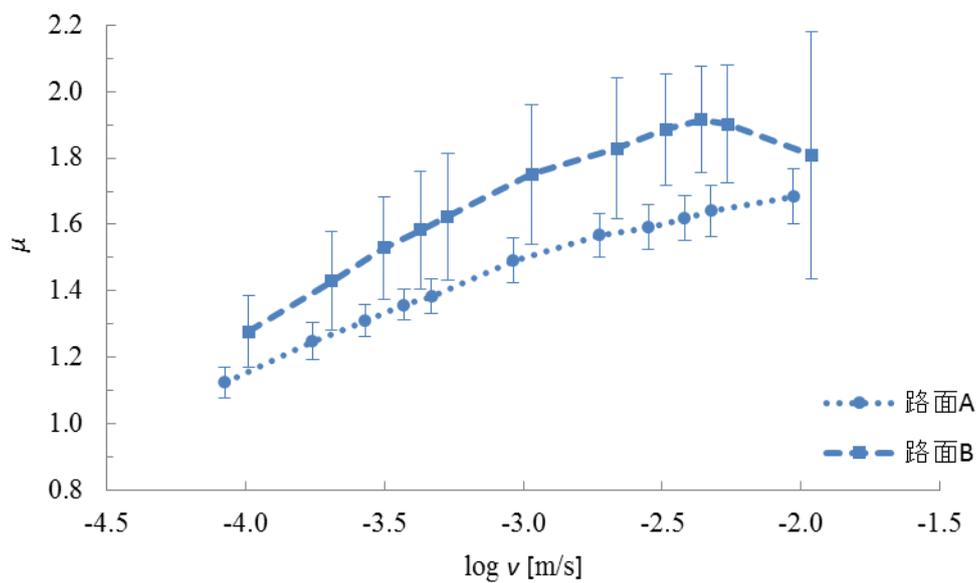


(a)

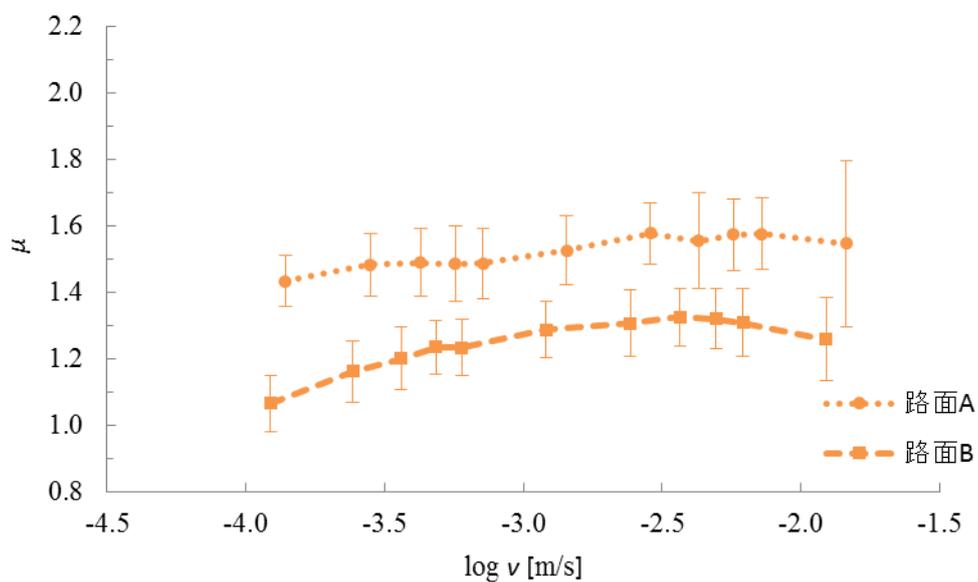


(b)

Fig. 3-7 μ - v curves comparing R1 with R2 (a)Surface A (b)Surface B.



(a)



(b)

Fig. 3-8 μ - v curves comparing Surface A with Surface B (a)R1 (b)R2.

3.5 路面に水を散布した場合における直動型摩擦試験

3.5.1 試験概要

本節では、路面に霧吹きを用いて純水を吹き付けた場合における試験を行い、3.4節の結果と比較することで水の散布の有無による影響を評価する。以下、水の散布がない場合を「ドライ」、水の散布がある場合を「ウェット」と表記する。

試験に用いるゴムサンプル、路面、および測定条件は3.4節と同様である。試験条件をTable 3-6に示す。

Table 3-6 Conditions of the friction tests for the wet surfaces.

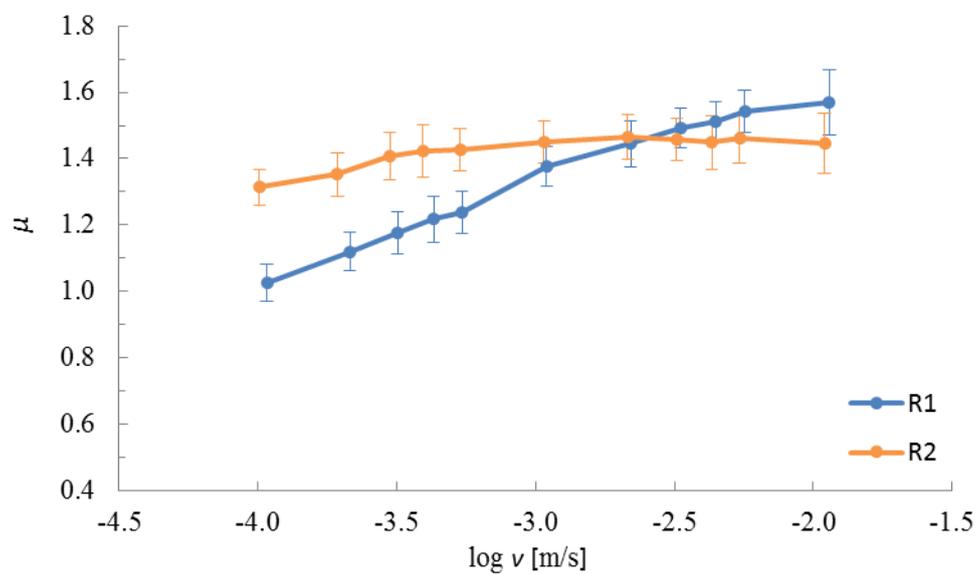
Rubber sample	Surface	Weight [g]	Sliding velocity [mm/s]	Measuring distance [mm]	The number of trials
R1	A	200	0.1~10.0	20.0	3
R2	A	200	0.1~10.0	20.0	3
R1	B	200	0.1~10.0	20.0	3
R2	B	200	0.1~10.0	20.0	3

3.5.2 試験結果

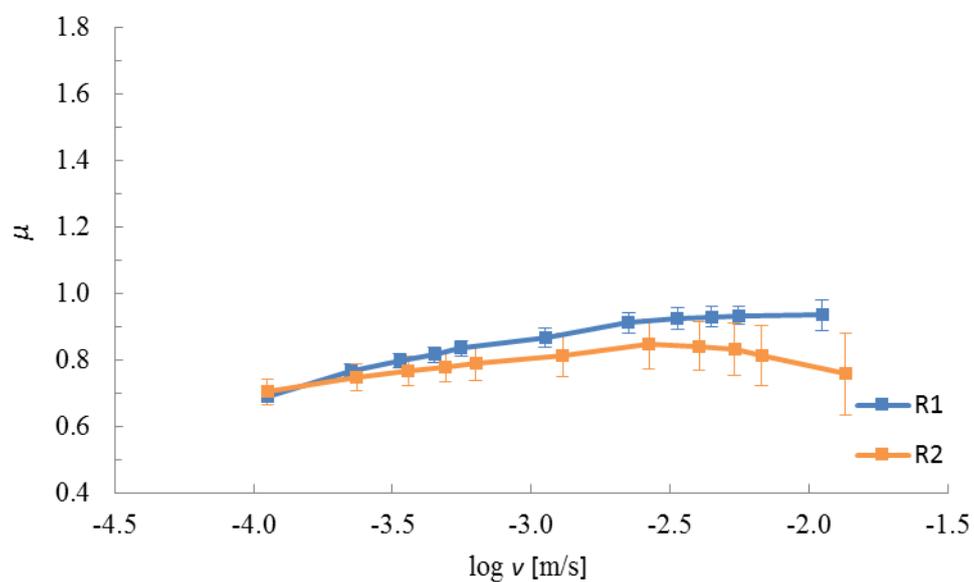
路面 A および路面 B における試験結果を Fig. 3-9 に示す。また、2 種類のゴムサンプルおよび 2 種類の路面の、ドライおよびウェットの比較をそれぞれ Fig. 3-10, Fig. 3-11 に示す。3.4 節と同様に、すべり速度において、式(3.1)に示される WLF 変換式を用い、温度が $T = 25[^\circ\text{C}]$ における値にシフトを行った。また、図のエラーバーは、各すべり速度における全試行を通しての標準偏差 S を表す。

各試験において、ウェットはドライと比較して全すべり速度域で摩擦係数の減少が見られた。これは、ゴム-路面間において水が潤滑剤の役割を果たしたことにより、凝着摩擦の影響がなくなったためだと考えられる。

Fig. 3-10 より、路面 A の場合、R1 および R2 において、すべり速度に対する摩擦係数の増加率について、ドライとウェットの違いは見られない。また、R2 は R1 と比較して、摩擦係数の減少値が大きい。Fig. 3-11 より、路面 B の場合、R1 および R2 において、すべり速度に対する摩擦係数の増加率について、ドライはウェットと比較して大きい。また、路面 B の場合、R1 は R2 と比較して摩擦係数の減少値が大きい。R1 および R2 において、路面 B は路面 A と比較して、摩擦係数の減少値が大きい。

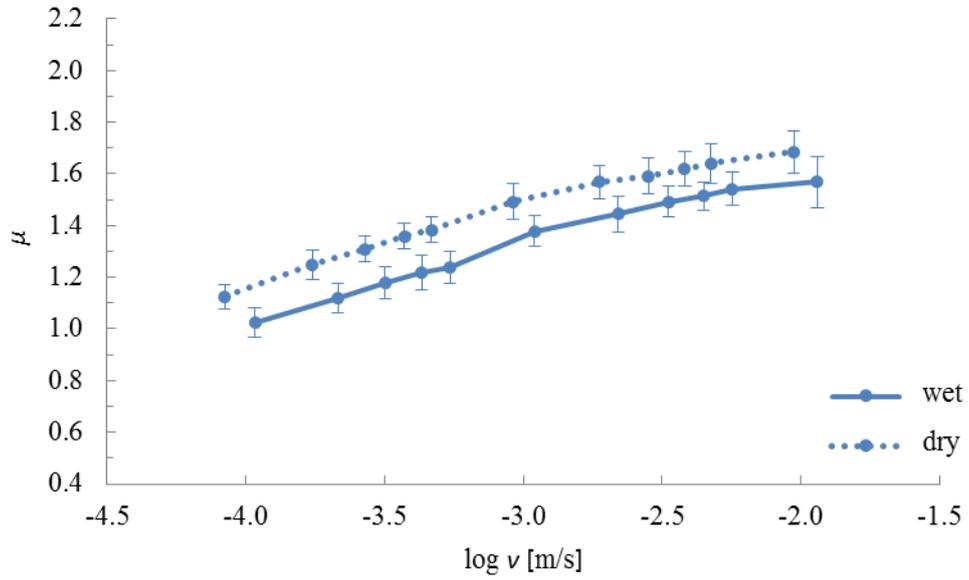


(a)

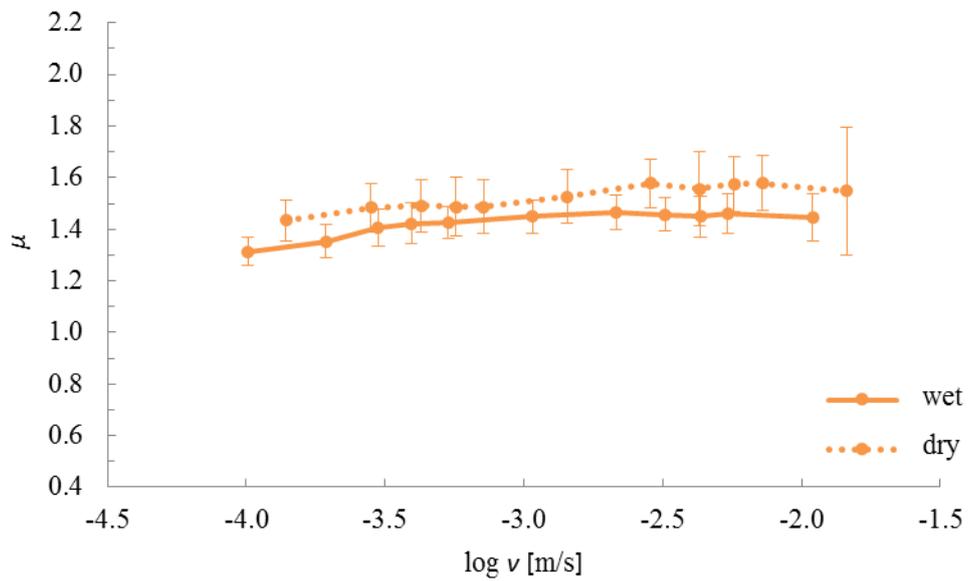


(b)

Fig. 3-9 μ - v curves comparing R1 with R2 under wet conditions for (a) Surface A and (b) Surface B.



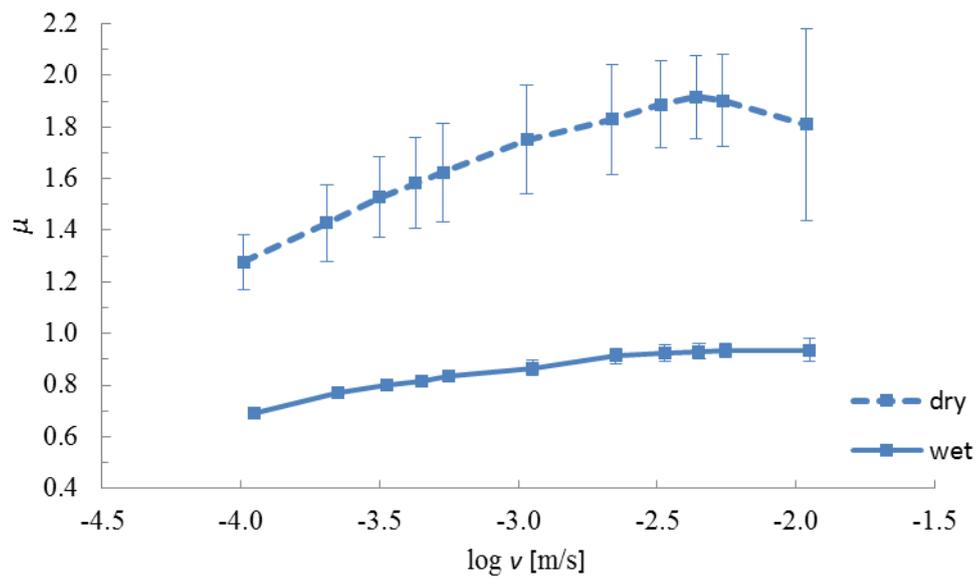
(a)



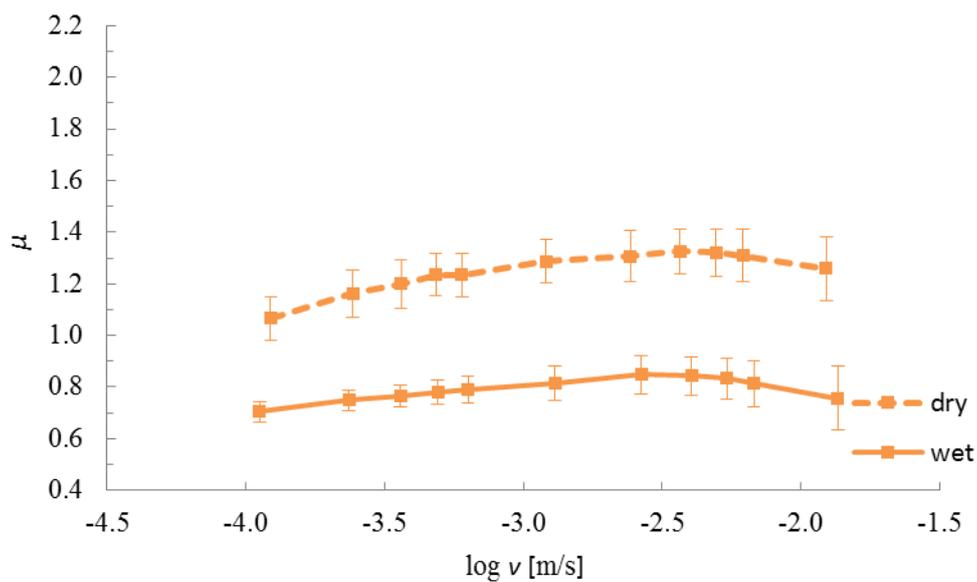
(b)

Fig. 3-10 μ -v curves comparing between dry and wet conditions of Surface A for (a) R1 and (b) R2.

3 摩擦試験



(a)



(b)

Fig. 3-11 μ - v curves comparing between dry and wet conditions of Surface B for (a) R1 and (b) R2.

第4章 摩擦係数予測

4.1 摩擦試験に基づくカットオフ波数 q_1 の同定

4.1.1 Persson の摩擦モデルによるカットオフ波数 q_1 の同定

2章で導出した摩擦係数の計算式を再掲する.

$$\mu_h = \frac{1}{4\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^{q_1/q_0} d\zeta \zeta^{-2H+1} P(\zeta) \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \operatorname{Im} \frac{E(\zeta q_0 v \cos \varphi)}{(1-v^2)\sigma_0} \quad (4.1)$$

ここで, 接触領域の割合 $P(\zeta)$ は次のように計算される.

$$P(\zeta) = (1 + [\pi G(\zeta)]^{3/2})^{-1/3} \quad (4.2)$$

$$G(\zeta) = \frac{1}{16\pi} (q_0 h_0)^2 H \int_1^\zeta d\zeta' \zeta'^{-2H+1} P(\zeta') \int_0^{2\pi} d\varphi \left| \frac{E(q_0 \zeta' v \cos \varphi)}{(1-v^2)\sigma_0} \right|^2 \quad (4.3)$$

Persson の摩擦理論においては, ミクロ領域の力学的取り扱いについての考察が不足しており, カットオフ波数 q_1 の理論的決定法が示されていない. 本研究では, カットオフ波数 q_1 の同定を行うために, 式(4.1)-(4.3)を用いて $q_1 = \zeta_{\max} q_0$ で定義される ζ_{\max} に対する感度解析を行う. 具体的には, $\zeta_{\max} = 10^{2.4}, 10^{2.7}, 10^{3.0}, 10^{3.4}$ について摩擦係数の計算を行う. はじめに, 本節では R2 とウェット状態の路面 A における理論予測値と実験値との比較を行う. 式(4.1)では凝着項が考慮されていないため, 凝着項の影響が無視できるウェット表面の摩擦係数値と直接比較することが可能である. 計算条件を Table 4-1 に示す. また, 実験値および計算値の比較を Fig. 4-1 に示す.

Fig. 4-1 より, $\zeta_{\max} = 10^{3.4}$ において, $v = 10^{-4}$ m/sで摩擦係数が良く一致しているが, すべり速度に対する摩擦係数の増加率は, 計算値が実験値と比較して大きい. $\zeta_{\max} = 10^{2.4}$, $\zeta_{\max} = 10^{2.7}$ において, $v \leq 10^{-3}$ m/sの領域ですべり速度に対する摩擦係数の増加率は良く一致しているが, 摩擦係数の値としては実験値の方が計算値と比較して大きい. ここで, Lorenz らは観察された最小の摩耗粒子の大きさから $q_1 = 5 \times 10^6$ 1/mとしている[20]. $\zeta_{\max} = 10^{3.4}$ において $q_1 \sim 10^7$ 1/m, $\zeta_{\max} = 10^{2.4}, 10^{2.7}$ において $q_1 \sim 10^6$ 1/mであり, $\zeta_{\max} = 10^{2.4}, 10^{2.7}$ の場合は適当なオーダーを有していると言える.

Table 4-1 Calculation conditions for R2 and Surface A.

Surface data		Surface A
	q_0 [1/m]	6684.93
	h_0 [1/m]	76.5587
	H	0.630691
Rubber data		Rubber 2
	Viscoelastic property $E(\omega)$ [Pa]	if $\omega < 2\pi \times 10^2$ $\text{Re } E(\omega) = \sum_{i=0}^n E_i$ $\text{Im } E(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{0.15} \times 10^{6.634}$
		if $\omega \geq 2\pi \times 10^2$ $E_0 + \sum_{i=0}^n \{(1/E_i) + (1/i\omega\eta_i)\}^{-1}$
Poisson's ratio ν	0.49	
Normal stress σ_0 [Pa]		2450.0
Maximum magnification ζ_{\max}		$10^{2.4}, 10^{2.7}, 10^{3.0}, 10^{3.4}$
Sliding speed range [m/s]		$1.0 \times 10^{-4} \sim 1.0 \times 10^{-2}$

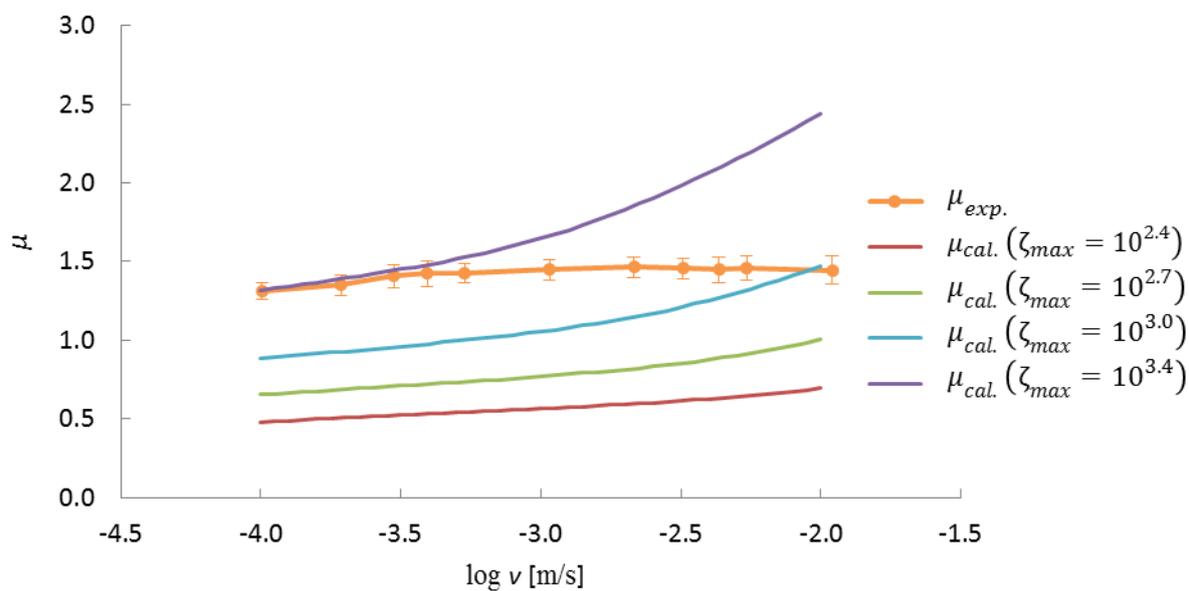


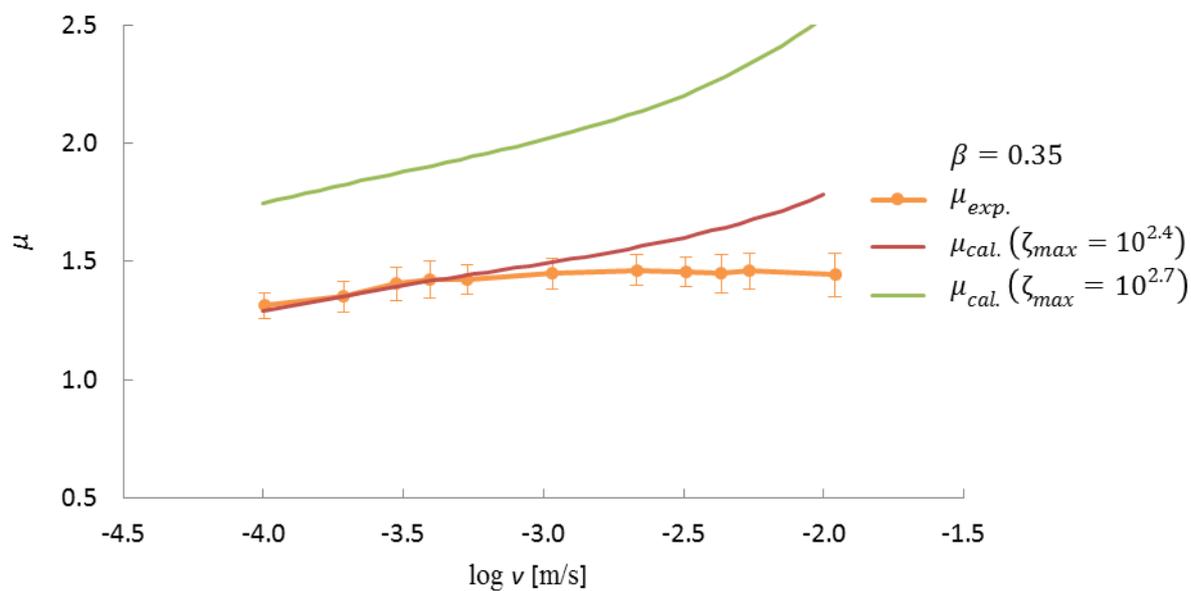
Fig. 4-1 μ - v curves comparing the calculation with the experiment for R2 and Surface A under wet condition.

4.1.2 非線形粘弾性挙動を考慮した摩擦係数予測

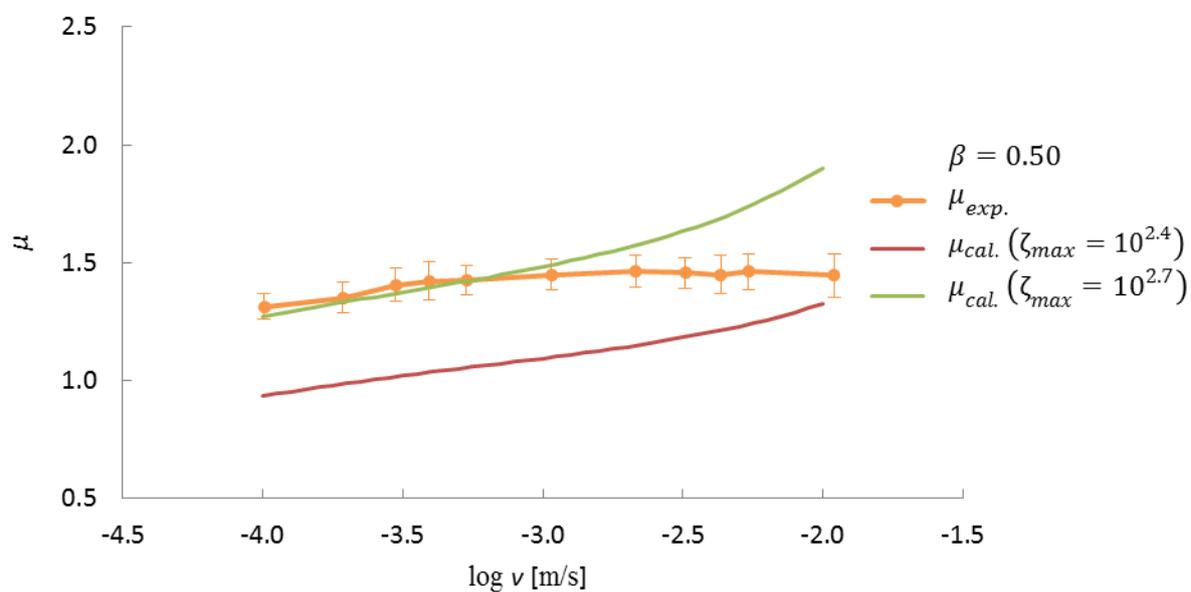
前項において、 $\zeta_{\max} = 10^{2.4}$ 、 $10^{2.7}$ の場合に、すべり速度に対する摩擦係数の増加率が良く一致よく一致した。また、 q_1 のオーダーが適当であったが、摩擦係数の値としては実験値の方が計算値と比較して大きい。

ここで、ゴムの貯蔵弾性率はひずみ依存性があり、ひずみが大きくなると一般的には貯蔵弾性率は低下する傾向にある。これを非線形粘弾性挙動(Payn 効果)と呼ぶ[19]。そこで、貯蔵弾性率 E' を $\beta E'$ に修正し、再度計算を実行する。ただし、 β は $0 \leq \beta \leq 1$ を満たすパラメータである。具体的には $\beta = 0.35$ 、 0.50 の場合について計算を行う。計算条件は Table 4-1 同様である。

実験値および計算値の比較を Fig. 4-2 に示す。実験値は R2 およびウェットな路面 A の条件における摩擦係数値を用いた。Fig. 4-2 より、 $\beta = 0.35$ において、 $v \leq 10^{-3}$ m/sの領域で、 $\zeta_{\max} = 10^{2.4}$ での計算値と実験値が良く一致する。また、 $\beta = 0.50$ において、 $v \leq 10^{-3}$ [m/s]の領域で、 $\zeta_{\max} = 10^{2.7}$ での計算値と実験値が良く一致する。



(a)



(b)

Fig. 4-2 μ - v curves accounting for nonlinear viscoelastic behavior (R2, Surface A)(a) $\beta = 0.35$ (b) $\beta = 0.50$.

4.1.3 凝着摩擦を考慮した摩擦係数予測

ウェット状態の路面においては、水が潤滑剤の役割を果たしており、凝着項の影響が無視できる。一方、ドライ状態の路面においてはゴム-路面間の接触領域において凝着摩擦が生じる。凝着項の摩擦係数 μ_a を考慮すると、摩擦係数 μ は次のように表される。

$$\mu = \mu_h + \mu_a = \mu_h + \frac{\tau_f A}{\sigma_0 A_0} \quad (4.4)$$

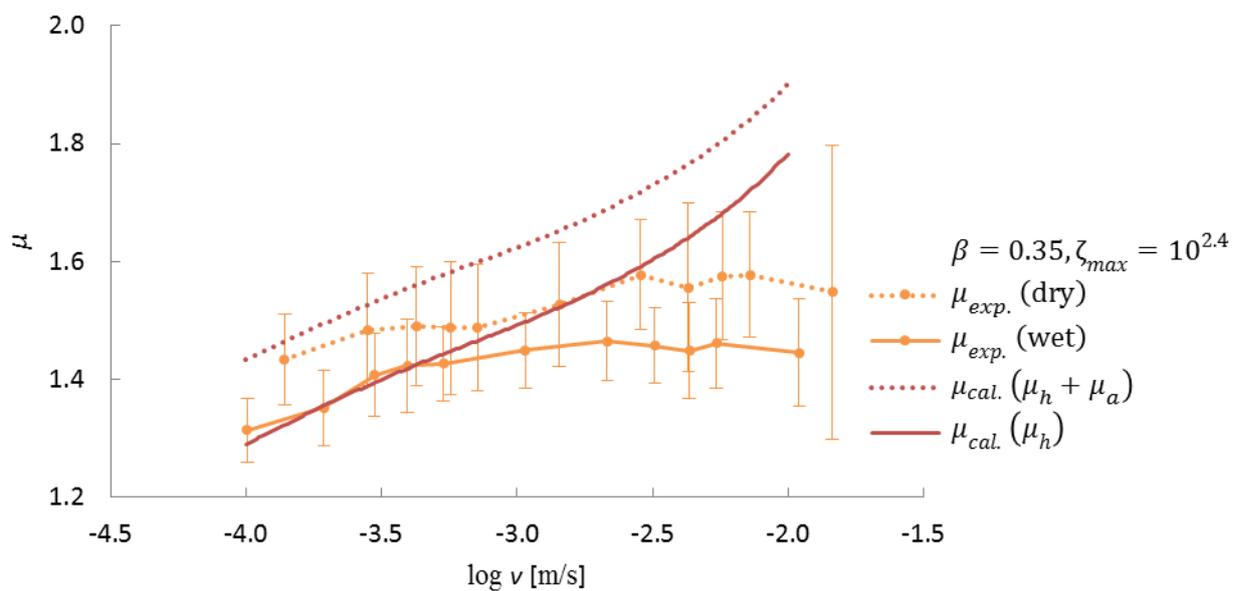
τ_f はゴム-路面間のせん断応力であり、 $\tau_f A$ はゴムが接触領域から受ける力を表している。ここで、 μ_h 、 $A/A_0 = P(\zeta)$ は式(4.1)-(4.3)を用いて計算を実行する。せん断応力 τ_f を適切に見積もるためには、結合破壊やき裂進展などのミクロスケールの現象への考察が必要である。

Lorenzらはき裂進展エネルギーの観点から τ_f を予測するモデルを構築した[20]。本研究では、このモデルを用いて τ_f の計算を行う。具体的な計算方法は付録Aに記述する。

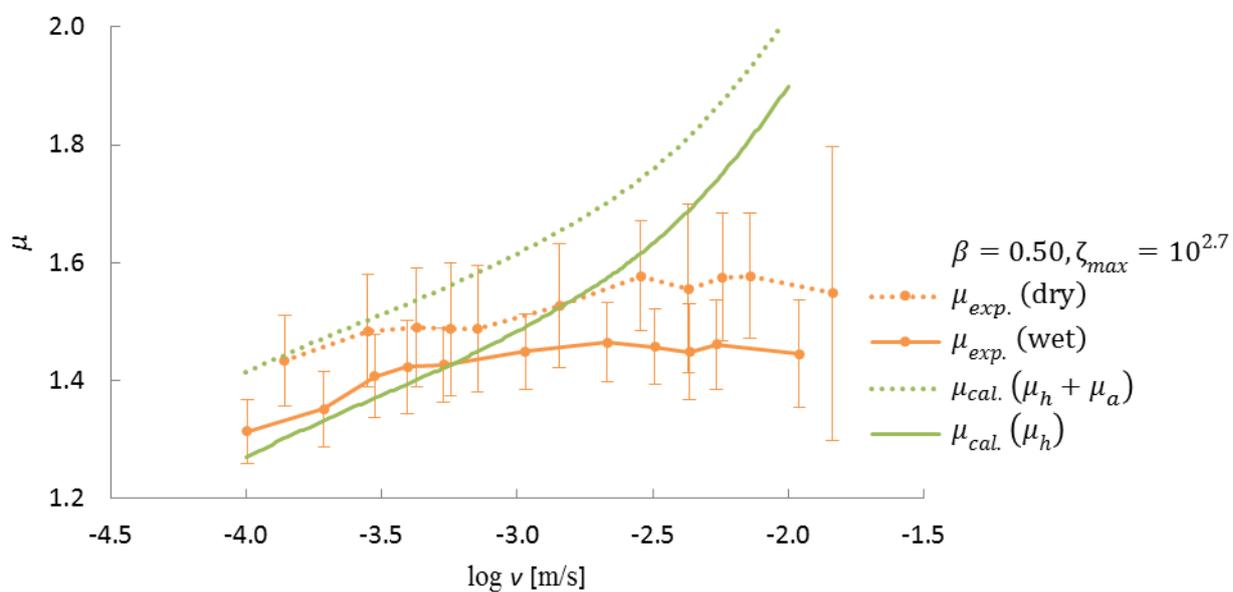
前項より、 $\beta = 0.35$ の場合には $\zeta_{\max} = 10^{2.4}$ の計算値が、 $\beta = 0.50$ の場合には $\zeta_{\max} = 10^{2.7}$ の計算値がそれぞれ実験値と良く一致する。本節ではそれぞれの場合について凝着項を計算し、式(4.4)を用いて摩擦係数 μ を算出し、ドライにおける実験値との比較を行う。計算条件はTable 4-1と同様である。

実験値および計算値の比較をFig. 4-3に示す。実験値はR2およびウェットな路面Aの条件における摩擦係数値を用いた。破線はドライ路面での実験値および μ_h の計算値を示す。また、実線はウェット路面での実験値および $\mu_h + \mu_a$ の計算値を示す。

Fig. 4-3より、 $\beta = 0.35$ 、 $\zeta_{\max} = 10^{2.4}$ の場合は $\beta = 0.50$ 、 $\zeta_{\max} = 10^{2.7}$ の場合と比較して凝着項の摩擦係数が大きい。また、 $\beta = 0.35$ 、 $\zeta_{\max} = 10^{2.4}$ において、全速度領域で摩擦係数 μ がドライ路面での実験値と比較して大きい。 $\beta = 0.50$ 、 $\zeta_{\max} = 10^{2.7}$ において、 $v \leq 10^{-3}$ の速度領域で摩擦係数 μ がドライ路面での実験値と良く一致するが、より大きい速度領域では摩擦係数 μ は実験値と比較して大きい。



(a)



(b)

Fig. 4-3 μ - v curves accounting for adhesive effect (R2, Surface A)

(a) $\beta = 0.35, \zeta_{max} = 10^{2.4}$ (b) $\beta = 0.50, \zeta_{max} = 10^{2.7}$.

4.2 異種路面における摩擦係数予測

前節では, R2 およびウェットな路面 A の条件において非線形粘弾性挙動および凝着項の影響を考慮した摩擦係数の計算を行い, 実験値と比較した. 本節では, R2 および路面 B を用いた場合について, ウェット条件における値を用いて β および ζ_{\max} を決定し, さらに凝着項を計算し, ドライ条件下における摩擦係数の実験値との比較を行う. 計算条件を Table 4-2 に示す.

Table 4-2 Calculation conditions for R2 and Surface B.

Surface data		Surface B
	q_0 [1/m]	3341.7
	h_0 [1/m]	50.5383
	H	0.60671
Rubber data		Rubber 2
	Viscoelastic property $E(\omega)$ [Pa]	if $\omega < 2\pi \times 10^2$ $\operatorname{Re} E(\omega) = \sum_{i=0}^n E_i$ $\operatorname{Im} E(\omega) = \left(\frac{\omega}{2\pi}\right)^{0.15} \times 10^{6.634}$
		if $\omega \geq 2\pi \times 10^2$ $E_0 + \sum_{i=0}^n \{(1/E_i) + (1/i\omega\eta_i)\}^{-1}$
Poisson's ratio ν	0.49	
Normal stress σ_0 [Pa]		2450.0
Maximum magnification ζ_{\max}		$10^{2.4}, 10^{2.7}, 10^{3.0}, 10^{3.4}$
Sliding speed range [m/s]		$1.0 \times 10^{-4} \sim 1.0 \times 10^{-2}$

実験値および計算値の比較を Fig. 4-4 に示す. 実験値は R2 およびウェットな路面 B の条件における摩擦係数値を用いた. 破線はドライ路面での実験値および μ_h の計算値を示す. また, 実線はウェット路面での実験値および $\mu_h + \mu_a$ の計算値を示す. ウェットの場合と比較することにより, $\beta = 0.55, \zeta_{\max} = 10^{2.8}$ において $v \leq 10^{-3}$ m/sの速度領域で良い一致が得られた. 摩擦係数 μ について, $v = 10^{-4}$ m/sにおいては実験値と良く一致したが, より大きい速度領域においては, 実験値が計算値より大きく, 実験値が計算値と比較して, すべり速度に対する摩擦係数の増加率が大きい.

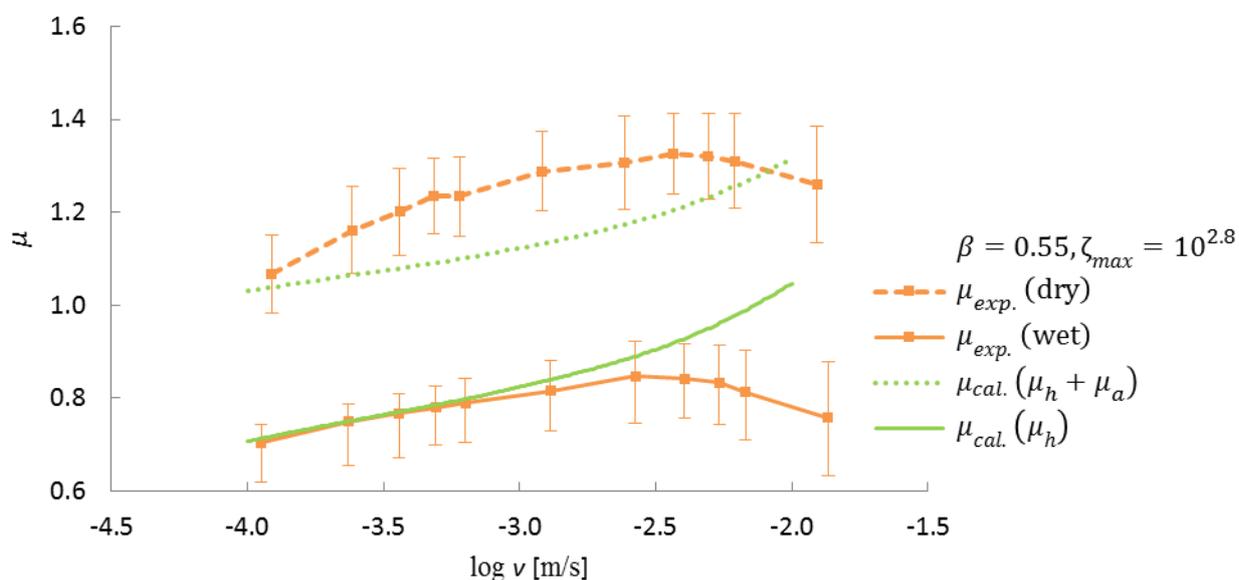


Fig. 4-4 μ - v curves accounting for adhesive effect (R2, Surface B)

4.3 異種ゴムにおける摩擦係数予測

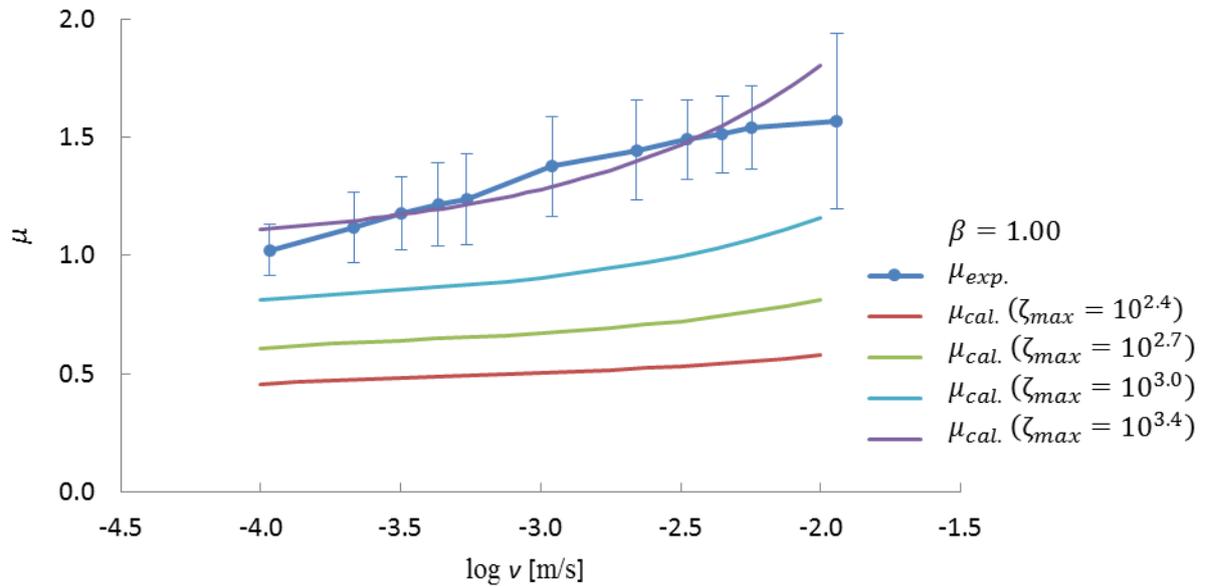
本節では、R1 について、実験値と計算値の比較を行う。計算条件は Table 4-1 および Table 4-2 と同様である。路面 A および路面 B について、凝着項は考慮せず、 $\beta = 1.00$ 、 $\beta = 0.50$ において計算を行ったものをそれぞれ Fig. 4-5、Fig. 4-6 に示す。実験値は R1 およびウェットな路面条件における摩擦係数値を用いた。

Fig. 4-5 より、路面 A の場合、 $\beta = 1.00$ において、 $\zeta_{\max} = 10^{3.4}$ の場合に $v = 10^{-3.5}$ m/s で摩擦係数が良く一致しているが、すべり速度に対する摩擦係数の増加率は、実験値が計算値と比較して大きい。また、 $\beta = 0.50$ において、 $\zeta_{\max} = 10^{2.7}$ の場合に $v = 10^{-3.5}$ m/s で摩擦係数が良く一致しているが、すべり速度に対する摩擦係数の増加率は、実験値が計算値と比較して大きい。

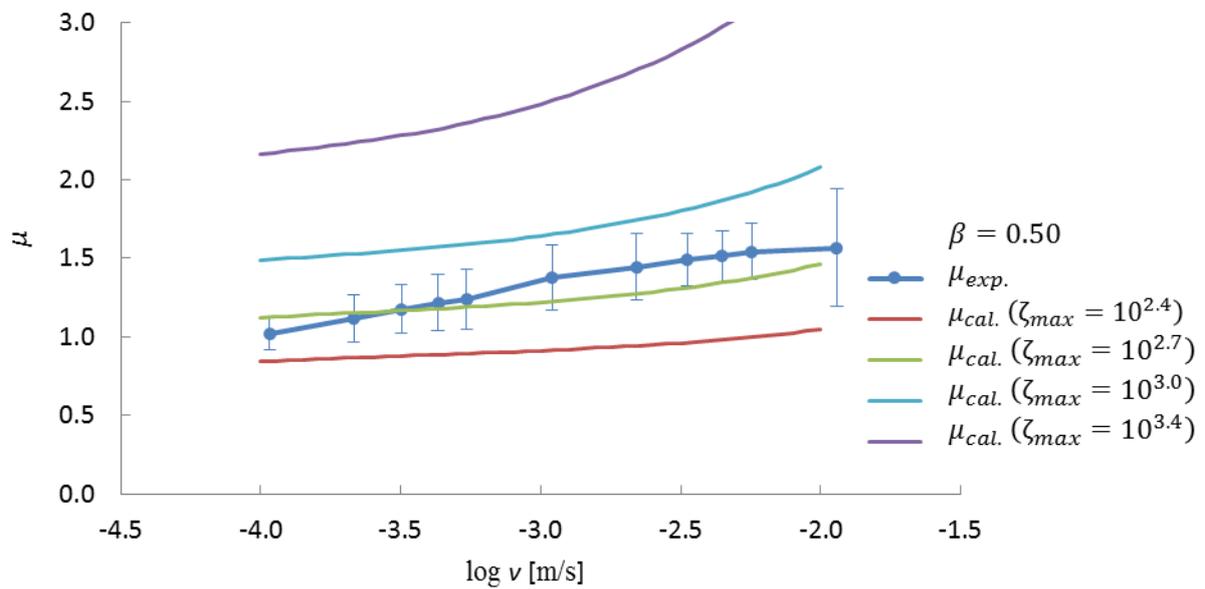
Fig. 4-6 より、路面 B の場合、 $\beta = 1.00$ において、すべり速度に対する摩擦係数の増加率は、すべての ζ_{\max} に対して実験値が計算値と比較して大きい。また、 $\beta = 0.50$ において、 $\zeta_{\max} = 10^{2.7}$ の場合に $v = 10^{-4.0}$ m/s で摩擦係数が良く一致しているが、すべり速度に対する摩擦係数の増加率は、実験値が計算値と比較して大きい。

グラフ Fig. 4-5 から読み取れるように、Persson の摩擦理論においては、 ζ_{\max} の増加に伴いすべり速度に対する摩擦係数の増加率も大きくなる。よって、実験値における摩擦係数の速度に対する増加率と一致させるには、 $\zeta_{\max} \geq 10^{3.4}$ の範囲で ζ_{\max} を決定する必要がある。その場合、 $q_1 \sim 10^7$ 1/m 以上となり、非常に大きなオーダーとなる。

以上より、R1 においては前節で記述した手法を適用することができない。さらなる考察は次節で行う。

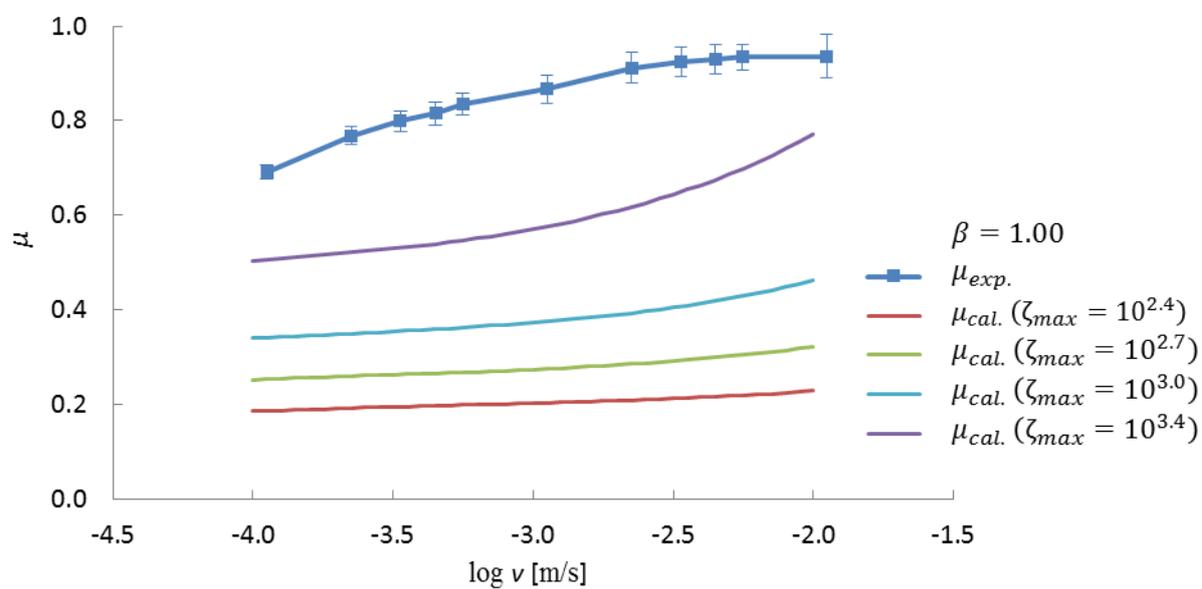


(a)

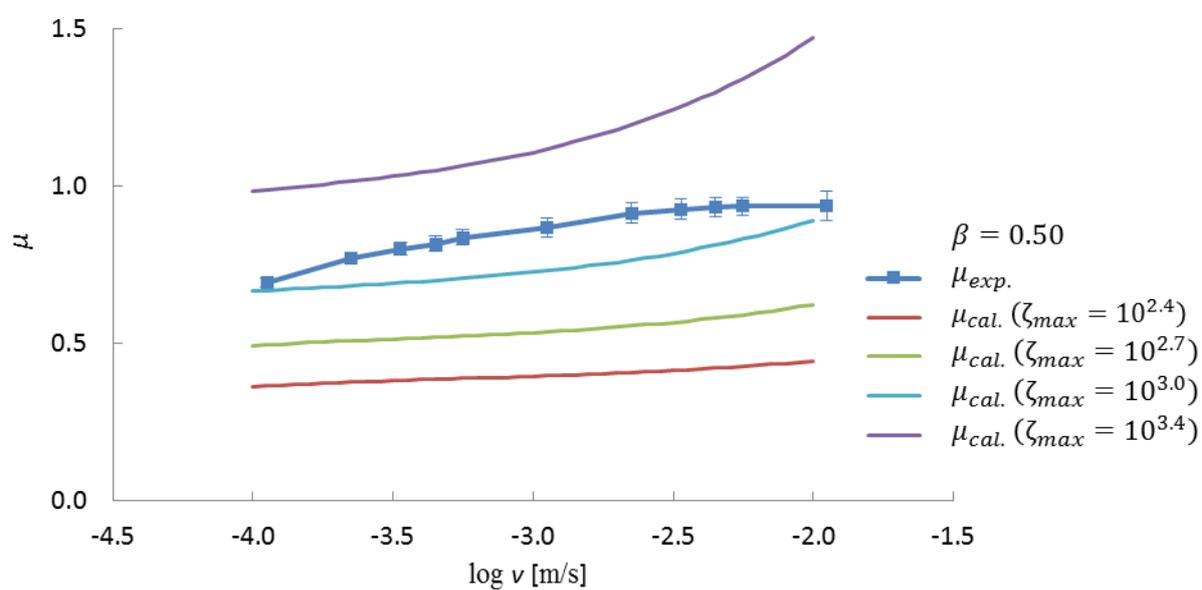


(b)

Fig. 4-5 μ - v curves comparing the calculation with the experiment for R2 and Surface A under wet condition (a) $\beta = 1.00$ (b) $\beta = 0.50$.



(a)



(b)

Fig. 4-6 μ - v curves comparing the calculation with the experiment for R2 and Surface B under wet condition (a) $\beta = 1.00$ (b) $\beta = 0.50$.

4.4 考察

4.1 節および 4.2 節より得られた R2 についての路面データを Table 4-3 に示す. カットオフ波数 q_1 はゴム固有の値であり, 路面の違いによる影響はないと考えられる. 路面 A において $q_1 = 2.5350 \times 10^6$ 1/m, 路面 B において $q_1 = 2.3392 \times 10^6$ 1/mであり, 近い値を示している.

路面 B が路面 A と比較して摩擦係数が大きくなった原因としては, 路面 B は路面と比較して q_0 , h_0 , および H の値が大きいため, 式(4.1)の $(q_0 h_0)^2 H$ の値が大きくなったことが考えられる. また, 路面 B が路面 A と比較してすべり速度に対する摩擦係数の増加率が大きくなった原因としては, 路面 B は路面 A と比較してロールオフ波数 q_0 が小さい, すなわち ζ_{\max} が大きいため, 式(4.1)における積分値の寄与が大きくなったためだと考えられる.

凝着項について, 路面 A においては計算値と実験値が良く一致したが, 路面 B においては実験値が計算値より大きくなった. 本研究における摩擦モデルでは掘り起こし摩擦などのマクロな摩擦による効果を考慮していないため, 実験値が計算値より大きな値を示したと考えられる. ただし, 路面 B は路面 A と比較して凝着項の摩擦係数が大きくなったが, これは計算値においても同様であり定性的な一致は得た. 路面 A および路面 B において, 速度と接触面積の割合 $P(\zeta)$ の関係を Fig. 4-7 に示す. 全速度領域において路面 B は路面 A と比較して接触面積の割合が大きく, 式(4.4)より凝着の摩擦係数は路面 B の方が大きな値を示すことがわかる. 式(4.2)および式(4.3)より $P(\zeta)$ は $(q_0 h_0)^2 H$ と逆数に近い関係にあることがわかり, 上記と同様の理由により, 接触面積の割合 $P(\zeta)$ について路面 B が路面 A と比較して大きな値を示すことがわかる.

R2 は R1 と比較して, すべり速度に対する摩擦係数の増加率が大きくなる. Table 3-1 にも示したように, R1 は R2 と比較してSBRの配合量が少ない. これにより, R1 は R2 はと比較してより波長の小さな路面凹凸に追従する, すなわち ζ_{\max} が大きくなると考えられる. よって, すべり速度に対する摩擦係数の増加率は R1 が R2 と比較して大きくなったと考えられる.

Table 4-3 Surface properties for R2.

	Surface A	Surface B
q_0 [1/m]	5.0700×10^3	3.3417×10^3
q_1 [1/m]	2.5350×10^6	2.3392×10^6
h_0 [μm]	82.8859	50.5383
H	0.63069	0.60671
β	0.50	0.55

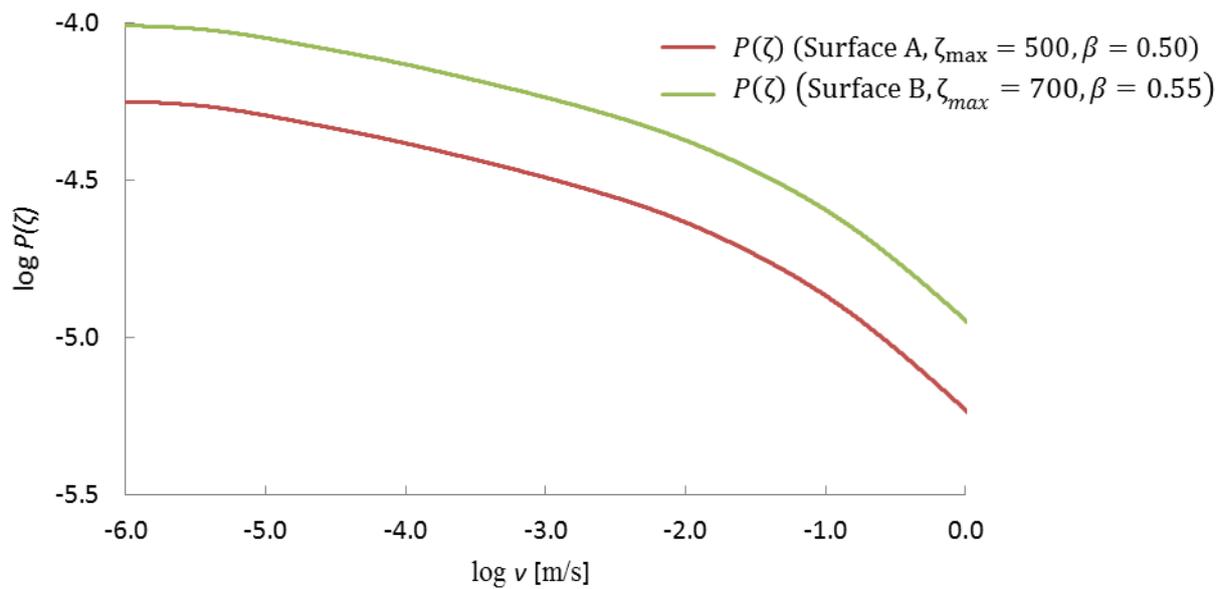


Fig. 4-7 v-p curve comparing Surface A with Surface B (R2, wet)

R1 について、R2 と同様の手法では合わせ込みが困難であることが前節で示された。ここで、周波数が10 Hzにおけるひずみと複素弾性率 $E(\omega)$ 、損失正接 $\tan \delta$ の関係を Fig. 4-8 に示す。ひずみの増加に伴い、貯蔵弾性率、損失弾性率ともに減少し、ひずみが 10^{-1} 付近で損失正接はピークを迎え、より大きいひずみでは損失正接は減少に転じていることがわかる。4.1.2 で用いた非線形粘弾性挙動のモデルでは、すべての波数領域において貯蔵弾性率 E' が一律に $\beta E'$ になるとして計算を行ったが、ひずみに依存して貯蔵弾性率 E' の値が変化しており、 β をひずみの関数として定義する必要がある。本研究における手法において、 $\beta = 0.50$ の場合、貯蔵弾性率 E' は一律に半分となる。一方、Fig. 3-1 と Fig. 4-8 を比較することにより、 E' の値は1/10以下に減少している。よって、 β をひずみの関数として定義する場合の方が、 β を一定とする場合より貯蔵弾性率 E' の値は小さくなると考えられ、すなわちすべり速度に対する摩擦係数の増加率が大きくなると考えられる。これは、 β をひずみの関数として定義することにより、実験値と計算値の合わせ込みが可能であることを示唆している。

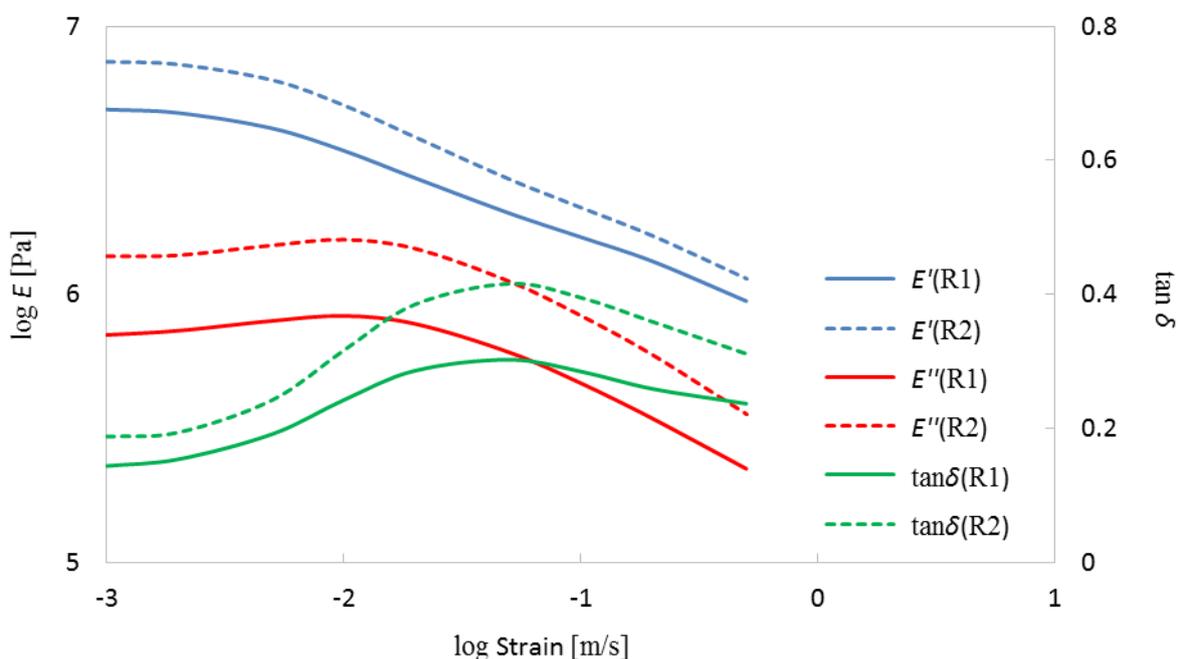


Fig. 4-8 Nonlinear viscoelastic behaviors of R1 and R2; the change in the complex elastic modulus as a function of dynamic strain amplitude.

第5章 結論

本研究では、ゴム2種(R1 および R2)と路面2種(路面 A および路面 B)の組み合わせに対してそれぞれ摩擦試験を実施した。ドライ状態の路面に加えて、ウェット状態での路面についても摩擦試験を行い、ヒステリシス摩擦と凝着摩擦に起因する摩擦係数を測定した。

次に、Persson の摩擦理論を用いて、計算値と実験値の合わせ込みを行った。R2 について、路面 A と路面 B ともに ζ_{\max} が先行研究[20]におけるオーダーと比較して非常に大きくなった。そこで、Persson の摩擦理論において、非線形粘弾性挙動を考慮したモデルを考え、計算値と実験値の合わせ込みを行った。路面 A では $\beta = 0.50$, $\zeta_{\max} = 10^{2.7}$ とすることにより合わせ込みが可能であることがわかった。路面 B では $\beta = 0.55$, $\zeta_{\max} = 10^{2.8}$ とすることによりヒステリシス摩擦を合わせ込むことはできたが、凝着項においては実験値が計算値と比較して 0.1 程度大きくなった。カットオフ波数 q_1 について、合わせ込みにおける結果より、路面 A において $q_1 = 2.5350 \times 10^6$ 1/m, 路面 B において $q_1 = 2.3392 \times 10^6$ 1/m が得られ、2 種類の路面においてカットオフ波数が良く一致し、また、先行研究[20]とのオーダーとも一致した。凝着項について、実験値と計算値で大小関係は一致し、定性的な一致は得られた。R1 については、実験で得られたすべり速度に伴う摩擦係数の増加率が、提案したモデルでは表現できないことを示した。その改良点として、 β をひずみの関数として定義し、Persson の摩擦モデルに組み込む方法が考えられ、これは今後改善すべき課題である。

付録 A き裂進展に基づくせん断応力の導出

凝着項におけるせん断応力を，ゴム-路面間の接触領域におけるき裂進展エネルギーから見積もる手法について示す．き裂進展の速度 v とすると，き裂進展エネルギー $G(v)$ とき裂先端半径 $a(v)$ には次のような関係式が成り立つ．

$$\frac{a(v)}{a_0} = \frac{G(v)}{G_0} \quad (\text{A.1})$$

ここで， a_0 ， G_0 はき裂進展の速度が非常に低速な場合における $a(v)$ ， $G(v)$ である．Lorenzらはさらなる考察を行うことにより，式(A.1)の左辺を次のように記述した[20]．

$$\frac{a(v)}{a_0} = 1 - \left(1 - \frac{E(\omega_0)}{E(\omega_1)}\right) \frac{\int_0^{\zeta^*} d\zeta F(\omega_0 e^\zeta) \text{Im}[1/E(\omega_0 e^\zeta)]}{\int_0^{\zeta^*} d\zeta \text{Im}[1/E(\omega_0 e^\zeta)]} \quad (\text{A.2})$$

ただし， $F(\omega_0 e^\zeta)$ および ζ^* は以下の式で表される．

$$F(\omega_0 e^\zeta) = [1 - e^{2(\zeta - \zeta^*)}]^{1/2} \quad (\text{A.3})$$

$$\zeta^* = \ln\left(\frac{2\pi v a_T}{a \omega_0}\right) \quad (\text{A.4})$$

ここで， a_T は式(3.1)におけるシフトファクターであり， $E(\omega_0) \approx E(0)$ ， $E(\omega_1) \approx E(\infty)$ である．真実接触面積の代表長さを l とすると，せん断応力 τ_f は次式で表される．

$$\tau_f = \frac{G(v) G_0}{G_0 l} \quad (\text{A.5})$$

式(A.1)-(A.5)を用いることにより τ_f の導出を行う．本研究の計算においては， $\omega_0 = 10^{-6}$ ， $\omega_1 = 10^9$ とし，十分広い領域において積分計算を行った．また，参考文献[20]より， $a_0 = 10^{-9}$ m， $G_0/l = 0.25$ MPaとした．

謝辞

本研究を進めるにあたり、多くの方のご指導、ご協力を賜りました。感謝申し上げます。株式会社ブリヂストンの門脇弘様には、ゴムサンプルや実験データの提供で大変お世話になりました。また、専門家として研究に対して助言をいただきました。ありがとうございました。

独立行政法人労働安全衛生総合研究所の山際謙太様には、路面データの測定において、レーザ顕微鏡をお貸し頂きました。ありがとうございました。

この1年間忙しい中指導して下さった、酒井教授、泉教授、田中助教、波田野助教、ありがとうございました。同じ研究テーマとして指導して下さった、荒牧純平さんと吉村候泰さん、ありがとうございました。また、研究に対して様々な助言をして下さった、研究室の先輩および同期の皆様方、ありがとうございました。

ここに挙げた以外にも多くの方にお力添えをいただきました。本当にありがとうございました。

参考文献

- [1] 深堀 美英, “設計のための高分子の力学 高分子鎖が織りなす力学の世界”, 技報堂出版, 2000.
- [2] J. F. Archard, “Contact and Rubbing of Flat Surfaces”, *Journal of Applied Physics*, Vol.24, No.8, pp.981-988, 1953.
- [3] E. Guth, “Theory of Filler Reinforcement,” *Journal of Applied Physics*, Vol.16, No.20, pp.20-25, 1945.
- [4] M.-J. Wang, “Effect of polymer-filler and filler-filler interactions on dynamic properties of filled vulcanizates,” *Rubber Chemistry and Technology*, Vol.71, No.3, pp.520-589, 1998.
- [5] J. Gao, W. D. Luedtke, D. Gourdon, M. Ruths, J. N. Israelachvili, U. Landman, “Frictional Forces and Amontons’ Law: From the Molecular to the Macroscopic Scale”, *Journal of Physical Chemistry B*, Vo.108, pp.3410-3425, 2004.
- [6] F. P. Bowden, D. Tabor, “THE FRICTION AND LUBRICATION OF SOLIDS,” Oxford at The Clarendon Press, 1950.
- [7] I. Szlufarska, M. Chandross, R. W. Carpick, “Recent advances in single-asperity nanotribology,” *Journal of Physics D : Applied Physics*, Vol.41, pp.1-39, 2008.
- [8] B. N. J. Persson, “On the theory of rubber friction,” *Surface Science*, Vol.401, pp.445-454, 1998.
- [9] B. N. J. Persson, E. Tosatti, “Qualitative theory of rubber friction and wear,” *Journal of Chemical Physics*, Vol.112, No.4, pp.2021-2029, 2000.
- [10] B. N. J. Persson, “Theory of rubber friction and contact mechanics,” *The Journal of Chemical Physics*, Vol.115, No.8, pp.3840-3861, 2001.
- [11] B. N. J. Persson, O Albohr, U Tartaglino, A I Volokitin, E Tosatti, “On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, Vol.17, pp.1-62, 2005.
- [12] B. N. J. Persson, “Rubber friction : role of the flash temperature,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, Vol.18, pp.7789-7823, 2006.
- [13] B. N. J. Persson, “Adhesion between an elastic body and a randomly rough hard surface” *The European Physical Journal E*, Vol.8, pp.385-401, 2002.
- [14] B. N. J. Persson, E. Tosatti, “The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids,” *The Journal of Chemical Physics*, Vol.115, No.12, pp.5597-5610, 2001.
- [15] 森住 竜雄, “温度依存性を考慮したゴム - 路面間のマルチスケール評価”, 東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻, 修士論文, 2013.

- [16] 荒牧 純平, “Flash Temperature を考慮したタイヤゴムの摩擦特性評価”, 東京大学工学部機械工学科, 卒業論文, 2013.
- [17] 吉村 候泰, “直動型摩擦試験によるゴム-路面間のマルチスケール評価”, 東京大学工学部機械工学科, 卒業論文, 2014.
- [18] 久富 寛, アンタナス ダウゲラ, 藤井 洋, “超音波振動する材料のナノ材料試験”, 日本機械学会 東海支部 第 52 期総会・講演会, 2003.
- [19] A. R. Payne, R. E. Whittaker “Low Strain Dynamic Properties of Filled Rubbers”, Rubber Chemistry and Technology, Vol. 44, No.2, pp. 440-478, 1971.
- [20] B. Lorenz, B. N. J. Persson, S. Dieluweit, T. Tada, “Rubber friction: Comparison of theory with experiment”, The European Physical Journal E, Vol.34, No.12, pp.1-11, 2011.