

修士論文

部分接触および非線形粘弾性を考慮した
マルチスケール性に基づくタイヤゴムの
摩擦係数予測およびその実験的検証

p.1 — p.188 完

2016年2月3日

指導教員 泉 聡志 教授

37-146242 吉村 侯泰

目次

1	序論	12
1.1	研究の背景	13
1.2	従来の研究	15
1.3	研究の目的および手法.....	17
1.4	本論文の構成.....	18
2	表面粗さパワースペクトル.....	19
2.1	表面粗さパワースペクトルの定義および計算手法.....	20
2.1.1	表面粗さパワースペクトルの定義.....	20
2.1.2	計算手法.....	21
2.2	セルフアフィンフラクタル表面.....	24
3	ゴムの力学的特性.....	26
3.1	概要	27
3.2	周波数依存性（粘弾性特性）	28
3.2.1	周波数依存性の概要.....	28
3.2.2	一般化 Maxwell モデル	29
3.3	ひずみ依存性（超弾性特性）	32
3.3.1	ひずみ依存性の概要.....	32
3.3.2	Kraus モデル	33
3.4	非線形粘弾性.....	35
3.4.1	非線形粘弾性特性の概要.....	35
3.4.2	拡張 Maxwell モデル	36
4	タイヤ - 路面間の摩擦理論.....	41
4.1	摩擦現象のマルチスケール性.....	42
4.2	Persson の摩擦理論	43
4.2.1	接触理論.....	43
4.2.2	すべり摩擦.....	52
5	摩擦試験	57
5.1	路面サンプルの表面粗さパワースペクトル.....	58
5.1.1	路面サンプル.....	58
5.1.2	表面高さデータ測定.....	59
5.1.3	表面粗さパワースペクトルの計算.....	61
5.2	ゴムサンプルの力学的特性.....	63
5.2.1	ゴムサンプル.....	63
5.2.2	周波数依存性.....	64
5.2.3	ひずみ依存性.....	68

5.2.4	非線形粘弾性.....	71
5.3	温度制御下直動型摩擦試験の概要.....	78
5.4	ドライ/ウェット路面における摩擦試験.....	81
5.4.1	試験概要.....	81
5.4.2	試験結果.....	83
5.5	WLF 式による試験結果のマスターカーブ作成.....	87
5.6	考察.....	88
6	Persson の摩擦理論に基づく摩擦係数予測.....	90
6.1	緒言.....	91
6.2	計算条件.....	92
6.3	計算結果.....	94
7	部分接触を考慮した摩擦係数予測.....	100
7.1	理論.....	101
7.2	表面モデルに基づく表面粗さパワースペクトルの検討.....	111
7.2.1	概要.....	111
7.2.2	表面粗さパワースペクトルからの表面モデルの作成.....	112
7.2.3	各種表面パラメータ比較.....	115
7.2.4	表面モデルによる理論検証.....	118
7.3	特性値の挙動.....	122
7.4	計算条件.....	125
7.5	計算結果.....	126
8	非線形粘弾性を考慮した摩擦係数予測.....	130
8.1	ひずみ依存性を考慮した摩擦モデルの定式化.....	131
8.2	非線形粘弾性挙動の表現手法.....	133
8.3	計算条件.....	138
8.4	計算結果.....	139
8.5	考察.....	148
9	摩擦試験と摩擦モデルとの比較・検証.....	152
9.1	計算条件.....	153
9.2	計算結果.....	154
9.3	考察.....	158
9.3.1	緒言.....	158
9.3.2	拡張 Maxwell モデルのフィッティング精度の検討.....	159
9.3.3	複素弾性率の測定精度の検討.....	161
9.3.4	ヒステリシスロス過大評価の可能性に関する検討.....	163
9.3.5	部分接触高さに関する検討.....	165

9.3.6	非線形粘弾性領域に関する検討.....	167
10	結論と今後の課題.....	169
10.1	結論.....	170
10.2	今後の課題.....	172
付録 A	拡張 Maxwell モデルの基礎式.....	173
付録 B	拡張 Maxwell モデルのパラメータ フィッティング指針.....	174
付録 C	表面モデルのパワースペクトルに対する 平均化处理.....	177
付録 D	粗視化分子動力学法による検証指針.....	180
	謝辞.....	182
	参考文献.....	184

図目次

Fig. 2-1 The surface roughness power spectrum of a surface with a self-affine fractal for $q_0 < q < q_1$	25
Fig. 3-1 Categorization for mechanical behavior of rubber[54].	27
Fig. 3-2 The viscoelastic modulus $E(\omega)$ of a typical rubber-like material[46].	28
Fig. 3-3 Viscoelastic models; (a) Voigt · Kelvin Model, (b) Maxwell Model.....	31
Fig. 3-4 Generalized Maxwell Model.	31
Fig. 3-5 Schematic view of strain dependence; (a) Storage modulus, (b) Loss modulus.	32
Fig. 3-6 Typical storage/loss modulus behavior of Kraus model.....	34
Fig. 4-1 A rubber squeezed against a hard, rough, substrate.	42
Fig. 4-2 Elastic contact between a flat rubber surface and a hard solid substrate.....	43
Fig. 4-3 The energy dissipated during the time period t_0 (macro).....	53
Fig. 4-4 The energy dissipated during time period t_0 (micro).	53
Fig. 5-1 Surface sample.	58
Fig. 5-2 Means for observing surface; (a) Macroscope, (b) Laser microscope.....	59
Fig. 5-3 The surface roughness power spectrum of the surface sample.....	62
Fig. 5-4 The complex modulus of elasticity as a function of frequency.	65
Fig. 5-5 Fitting results of generalized Maxwell model for frequency dependence.....	67
Fig. 5-6 Enlarged view of Fig. 5-5.....	67
Fig. 5-7 The complex modulus of elasticity as a function of strain.	69
Fig. 5-8 Fitting results of Kraus model for strain dependence.....	70
Fig. 5-9 Fitting results of the extended Maxwell model for frequency dependence.....	74
Fig. 5-10 Enlarged view of Fig. 5-9.....	74
Fig. 5-11 Fitting results of the extended Maxwell model for strain dependence.	75
Fig. 5-12 Strain dependence of the extended Maxwell model at four different frequencies; (a) Storage modulus, (b) Loss modulus.....	76
Fig. 5-13 Isometric diagrams of complex modulus of the extended Maxwell model over $\omega - \epsilon$ plane; (a) Storage modulus, (b) Loss modulus.....	77
Fig. 5-14 Friction test unit.	78
Fig. 5-15 Schematic view of the friction test operation.	79
Fig. 5-16 A typical experimental result.	80
Fig. 5-17 Square rubber samples.....	81
Fig. 5-18 A cross sectional view of edge-processed rubber sample.	81
Fig. 5-19 Experimental results at rubber temperature of 10 °C.	84
Fig. 5-20 Experimental results at rubber temperature of 25 °C.	84
Fig. 5-21 Experimental results at rubber temperature of 40 °C.	85

Fig. 5-22 Experimental results at rubber temperature of 55 °C.	85
Fig. 5-23 Experimental results for all specified temperatures.	86
Fig. 5-24 Master curve of the measured friction coefficients under dry and wet conditions shifted by the WLF equation.....	87
Fig. 5-25 Experimental results for comparison with friction model.	89
Fig. 6-1 μ - v curve calculated from Persson's theory; (a) Interpolation, (b) Generalized Maxwell model, (c) Extended Maxwell model.	96
Fig. 6-2 The fraction of real contact area calculated from Persson's theory; (a) Interpolation, (b) Generalized Maxwell model, (c) Extended Maxwell model.....	97
Fig. 6-3 μ - v curve calculated from Persson's theory with different representations of $E(\omega)$	98
Fig. 6-4 The fraction of real contact area calculated from Persson's theory with different representations of $E(\omega)$	98
Fig. 6-5 Enlarged view of Fig. 6-4.....	99
Fig. 7-1 Partial contact state between rubber and surface.....	102
Fig. 7-2 Effective surface profile according to Fig. 7-1.....	102
Fig. 7-3 Schematic view of modified power spectrum of surface roughness.	104
Fig. 7-4 Exemplary distribution of surface height equal to or more than d over $x - y$ plane.	107
Fig. 7-5 Exemplary distribution of surface height equal to or more than $d - \Delta d$ over $x - y$ plane.	107
Fig. 7-6 Relationship between d and q_c	109
Fig. 7-7 Cross sectional view of numerically produced surface.	113
Fig. 7-8 The surface roughness power spectrum of the surface model.....	113
Fig. 7-9 Calculated distribution of surface height greater than or equal to 50 μm over $x - y$ plane.	114
Fig. 7-10 Probability density function of the surface height of the surface sample observed at magnification $\times 40$	116
Fig. 7-11 Probability density function of the surface height of the calculated surface model. .	116
Fig. 7-12 Modified surface roughness power spectrum of the surface model where $d = R_q$	119
Fig. 7-13 Modified surface roughness power spectrum of the surface model where $d = R_q/2$. .	119
Fig. 7-14 Modified surface roughness power spectrum of the surface model where $d = 0$	120
Fig. 7-15 Modified surface roughness power spectrum of the surface model where $d = R_q/2$. ..	120
Fig. 7-16 Modified surface roughness power spectrum of the surface model where $d = R_q$	121
Fig. 7-17 Modified surface roughness power spectrum of the surface model for five different cutting height.	123
Fig. 7-18 Modified surface roughness power spectrum of the surface model where $d = d_s$	124
Fig. 7-19 Calculated nominal stress as a function of d_s under static contact condition.	124

Fig. 7-20 μ - v curve based on partial contact theory; (a) Interpolation, (b) Generalized Maxwell model, (c) Extended Maxwell model.	127
Fig. 7-21 The fraction of real contact area based on partial contact theory; (a) Interpolation, (b) Generalized Maxwell model, (c) Extended Maxwell model.	128
Fig. 7-22 Comparison between friction coefficients with Persson's and partial contact theories for $d=d_s$ and $\zeta=3000$	129
Fig. 7-23 Comparison between the fraction of real contact areas with Persson's and partial contact theories for $d=d_s$ and $\zeta=3000$	129
Fig. 8-1 Fitting results of Kraus model for strain dependence in combination with $E(\omega)$	136
Fig. 8-2 Calculation results according to method 1; (a) μ - v curve, (b) P- ζ curve, (c) ε - ζ curve.	140
Fig. 8-3 Calculation results according to method 2; (a) μ - v curve, (b) P- ζ curve, (c) ε - ζ curve.	141
Fig. 8-4 Calculation results according to method 3; (a) μ - v curve, (b) P- ζ curve, (c) ε - ζ curve.	142
Fig. 8-5 Calculation results according to method 4; (a) μ - v curve, (b) P- ζ curve, (c) ε - ζ curve.	143
Fig. 8-6 Calculation results according to method 5; (a) μ - v curve, (b) P- ζ curve, (c) ε - ζ curve.	144
Fig. 8-7 Comparison of μ - v curves with five different methods; (a) $\zeta=500$, (b) $\zeta=1500$, (c) $\zeta=3000$	145
Fig. 8-8 Comparison of P- ζ curves with five different methods; (a) $\log v = -6$ m/s, (b) $\log v = -3$ m/s, (c) $\log v = 0$ m/s.	146
Fig. 8-9 Comparison of ε - ζ curves with five different methods; (a) $\log v = -6$ m/s, (b) $\log v = -3$ m/s, (c) $\log v = 0$ m/s.	147
Fig. 8-10 Contour drawing of $\tan \delta$ function over ω - ε plane according to method 1.	151
Fig. 8-11 Contour drawing of $\tan \delta$ function over ω - ε plane according to method 5.	151
Fig. 9-1 μ - v curve comparing the calculation from Persson's theory with experiment.	155
Fig. 9-2 μ - v curve comparing the calculation from the friction theory considering nonlinear viscoelasticity with experiment.	155
Fig. 9-3 μ - v curve modified from Fig. 9-2 with the experimental result on the second axis.	156
Fig. 9-4 μ - v curve comparing the calculation from the friction theory considering nonlinear viscoelasticity and partial contact with experiment.	156
Fig. 9-5 The fraction of real contact area calculated from the friction theory considering nonlinear viscoelasticity and partial contact with experiment.	157
Fig. 9-6 Fitting results of the extended Maxwell model for strain dependence with modification.	

.....	159
Fig. 9-7 μ - ν curve comparing the calculations with and without modification for storage modulus.	160
Fig. 9-8 μ - ν curve comparing the calculations considering error of phase difference.....	162
Fig. 9-9 μ - ν curve comparing the calculation for $\zeta=200$ with experiment.	164
Fig. 9-10 μ - ν curve comparing the calculation with experiment where d_s is a function of ν . .	166
Fig. 9-11 μ - ν curve modified from Fig. 9-10 with the experimental result on the second axis.	166
Fig. B-1 The complex modulus of elasticity subject to fitting the extended Maxwell model; (a) frequency dependence, (b) strain dependence.	176
Fig. C-1 Surface roughness power spectrum of the original surface model.	178
Fig. C-2 Surface roughness power spectrum of the modified surface model.	178
Fig. C-3 Surface roughness power spectrum of the modified surface model after averaging process.	179
Fig. D-1 Schematic diagram for one molecular chain of styrene-butadiene rubber.....	181

表目次

Table 3-1 Exemplary parameters for Kraus model	33
Table 5-1 Conditions of the measurements for surface height.....	60
Table 5-2 Surface properties.	62
Table 5-3 Test piece properties.	63
Table 5-4 Fitted material parameters with a 35-term generalized Maxwell model.....	66
Table 5-5 Fitted material parameters with a Kraus model.	69
Table 5-6 Fitted material parameters with a 24-term extended Maxwell model.....	73
Table 5-7 Specification of the straight-type friction tester.	79
Table 5-8 Specification of the temperature control unit.....	79
Table 5-9 Conditions of friction tests sliding on dry/wet surface under the control of rubber temperatures.....	82
Table 5-10 Difference between friction coefficients under dry and wet surface conditions for $v \leq$ 1.0 mm/s.....	86
Table 6-1 Calculation conditions for Persson's theory.....	93
Table 7-1 Comparison of surface properties.	117
Table 7-2 Input parameters for calculating static contact surface height.	123
Table 8-1 Fitted material parameters with a Kraus model in combination with $E(\omega)$	136
Table 8-2 Method list for calculating $E(\omega, \varepsilon)$	137
Table 8-3 Calculation conditions for friction coefficients including nonlinear viscoelastic effect.	138
Table 9-1 Calculation conditions for friction coefficients in comparison with experiment.	153

1 序論

1.1 研究の背景

タイヤは唯一路面に接していて車両を支える重要な機械要素であり、その摩擦係数は車両自体の性能を左右する重要な因子となる[1]. 車両の性能、特に燃費性能については、近年の環境問題に対する二酸化炭素などの排出規制に起因して、高性能化が要求されている. タイヤの転がり抵抗は燃費の20~30%に寄与するとされており[2], タイヤゴム - 路面間に生じる摩擦現象は重要な役割を有する. 省エネルギー化を実現するタイヤ開発および設計を実施するには、タイヤと路面との間における現象を解明することが重要である.

そのようなタイヤの開発の一例として挙げられるのが、有限要素法を用いたトレッドパターンによる転がり抵抗への影響調査である[3]. また、燃費向上を目的として転がり抵抗を抑えながら、車両の安全性のために制動性能も維持しなければならない. 2010年より開始されたタイヤのラベリング制度では、「転がり抵抗係数」と「ウェットグリップ性能」とをグレーディングすることで、タイヤの基本性能と環境性能とを消費者が認知できる取り組みが進められている[4][5]. この相反効果を実現させるために、ゴム材料の周波数応答性を制御する取り組みが行われている[6].

摩擦係数は上述したようなシミュレーションにおいて不可欠な要素であり、周波数応答を含むゴム特性が摩擦に与える作用についても定量的に評価する必要がある. しかし、現在でもゴムと路面との組み合わせごとに摩擦試験を行うことで摩擦係数を測定しており、同一のタイヤ - 路面間であっても、摩擦係数は環境温度やすべり速度に依存して変動することが知られている[7]. よって、タイヤ性能評価に必要な摩擦係数をすべて実験で測定すると、開発期間およびコストの増加は避けられない.

したがって、タイヤゴムと路面間の摩擦現象を表現する数理モデルを構築することは非常に有用である. 数理モデルを採用することで、ゴムの組成に基づく摩擦特性の評価が容易になり、タイヤの設計および開発ステップにおいて有益な知見を提供することができる.

タイヤの転がり抵抗に対しては、現在、以下の3つの要因が考えられている. すなわち、走行時にタイヤが路面凹凸に追従して変形する際に伴うエネルギーロス（ヒステリシス摩擦）、トレッドゴムと路面との接地界面で生じるエネルギーロス（凝着摩擦、掘り起こし摩擦）、およびタイヤの回転に伴う空気抵抗に起因するエネルギーロスである[8]-[10]. これらの要因の中でもヒステリシス摩擦が8割以上の寄与率を占めるとされており、タイヤゴムが路面凹凸に従い変形することによるエネルギー損失について数理的に評することが特に望まれる. また、タイヤのブレーキ性能で重要なウェットグリップ特性は、ヒステリシス摩擦による動摩擦係数が主な因子となる. 路面の凹凸との関係性やヒステリシスロスによるすべり速度依存性など現在も未解明な問題が多く残っている.

しかし、摩擦係数を理論的に予測するのは非常に困難である。その原因として、摩擦現象のマルチスケール性が挙げられる。路面凹凸はマクロスケールから視認できないミクロスケールにまで存在し、ゴムとの接触状態はスケールごとに大きく異なる。さらに、このような路面特性により、ゴムが路面凹凸上で変形する振動周期も広範囲にわたり、ゴム材料が示す力学的性も大きく変わってくる。ゴム - 路面間の摩擦は、路面およびゴムの特性を巨視的かつ微視的にスケールを跨って反映しなければならない、大変複雑な現象である。

1.2 従来の研究

タイヤの転がり時に路面の凹凸が与える影響について、路面粗さを階層化しその効果が議論されてきた[11]. 数十 cm から数 m のタイヤや車両のサイズと同程度の路面粗さ（道路の歪み）が車両の乗り心地やノイズなどに影響を与える. 一方、タイヤゴム - 路面間の摩擦は、タイヤの接地領域に等しい数十 cm サイズでみられるマクロな路面凹凸からその凹凸の中に存在するミクロな凹凸までの影響を受ける. このようなマクロからミクロまでの粗さは、実際のアスファルトに対してもパワースペクトル解析を用いて議論が進められている[12][13]. また、タイヤゴムを含む高分子材料は、固有の特性速度（特性時間／緩和時間）を基準として、粘性的あるいは弾性的な振る舞いを示す[14]. このような高分子の力学的特性は、動的に与えられる周波数、ひずみ、温度など様々な要因に大きく依存する[15]-[19]. その原理の解明、変形挙動の正確な表現を目指し、動的ひずみを評価するなど多くの研究が行われてきた[20]-[22].

従来、2 固体間のマクロな摩擦係数と接触面積の関係については、Amontons の法則がよく知られている[23]. 摩擦力は荷重に比例し、摩擦力を荷重で除算することで摩擦係数が得られる. このとき、摩擦力は見かけの接触面積に依らないとされる. その後、2 体間に生じる真実接触領域の考察が進められ、摩擦力は真実接触面積に比例することが示された[24]. 真実接触を考慮した接触および摩擦特性について、実験および理論・モデルによる評価が広く実施されている[25]-[27]. しかし、タイヤと路面とに発生するようなゴム摩擦は、他の固体間の摩擦現象とは異なる特徴を示す. これの要因として、接触および摩擦メカニズムのマルチスケール性が挙げられる. 上述したようなスケールに跨る路面粗さおよび対応するゴムの力学応答の変化により、見かけの接触・摩擦状態とミクロにみた接触・摩擦状態とは大きく乖離する.

マクロスケールでの粗い路面上のタイヤゴムの摩擦や転がり抵抗について、タイヤの物理モデルや有限要素法を用いた解析が行われている[28]-[31]. 他方、分子動力学法による路面に対する高分子鎖の摺動評価[32]やフィラーによるゴムの力学応答への影響の実験的評価[33][34]が行われ、ミクロスコピックな現象に対しても研究が進んでいる. 特に、ゴム粘弾性の発現に対する研究をはじめ、粗視化分子動力学法を用いた手法が多く取り入れられている[35]-[38]. また、分子動力学法より同定された連続体パラメータを用いて有限要素法を行うといった、スケールの異なる階層的シミュレーションも報告されている[39][40].

しかし、路面凹凸に沿ってゴムが変形する際に発生するヒステリシスロスを見積もるには、マクロスケールからミクロスケールまでを合わせて考慮する必要がある。そこで、Persson は、単一の粗さを持つ理想化された表面に対するゴムの摩擦理論を構築し[41][42]、その後様々なスケールの粗さを考慮した接触・摩擦理論を提案した[12][43]。路面の表面粗さパワースペクトルおよびゴムの粘弾性特性からヒステリシスロスに相当する摩擦係数を計算することができる。

文献[43]に従えば、スケールごとのゴム - 路面間の接触状態およびそれに起因する変形エネルギー損失を見積もることができるが、同時に発生するゴム物性値の変動や他の摩擦因子も摩擦係数を左右する。その一例として、摩擦によるゴム摺動面の局所的加熱が挙げられる。局所的な温度上昇はゴムの弾性率を減少させ、結果として摩擦係数は減少する。本現象は **Flash Temperature** と呼ばれ、ゴム温度場の拡散方程式に基いて任意のスケールにおける温度分布を計算することで、温度に依存する弾性率から厳密な摩擦係数を求めることが可能である[44][45]。このゴムの局所的加熱については、摩擦試験に基づいた効果の検証もなされている[46][47]。また、Persson の接触理論に基づきゴムと路面との界面における凝着力についても評価が行われており[48][49]、様々な摩擦特性の知見に基づいたモデルの構築が進んでいる。このようなモデルに対しては摩擦試験による妥当性の評価が重要であり[50]、実験的考察に基づいてゴム弾性率のひずみ依存性の重要性が指摘されている[51][52]。

以上より、Persson の摩擦理論は摩擦係数を予測する有効な手段であるが、実現象に沿った更なるモデルの確立も重要であると考えられる。指摘されているゴムのひずみ依存性を含み、検討が不十分な現象による影響を評価する必要がある。ミクロな領域では真実接触領域の減少により、公称応力よりも非常に高い応力場が生じている。そこで、ひずみ依存性を考慮したゴム弾性率を用い、ミクロ領域の適切な応力・ひずみ状態を表現すべきである。しかし、高周波数かつ大ひずみにおけるゴムの粘弾性試験は一般に難しいため、非線形粘弾性モデルの導入が有用である。また、Persson の接触理論ではゴム - 路面間は見かけには完全に接触していると仮定し理論展開を進めているが、マクロ領域での部分接触を考慮した場合の効果についても同様に評価が求められる。これらの因子の検証に際しては、摩擦試験との比較も行うことで、摩擦係数予測の妥当性を判断するに留まらず、摩擦現象の基礎的理解を深める一助となるとが期待される。

1.3 研究の目的および手法

従来の研究に基づき本研究では、マルチスケール性を考慮した Persson の摩擦モデルを基礎として、ヒステリシスロスに関わる新たな因子に関して摩擦モデルを構築すること、そして、摩擦試験との比較を実施することで、摩擦メカニズムを解明することを目的とする。

摩擦モデルにおいては、ゴムの周波数およびひずみに対する力学的特性を広く表現することで、マクロからミクロにおけるゴム - 路面間の応力場の釣り合いを考慮した摩擦モデルを考案する。また、見かけ上の全接触といった接触理論で前提とされている条件を再検討し、より実際の摩擦挙動に沿ったモデルに発展させる。提案した摩擦モデルにより、諸因子の定性的かつ定量的な議論が可能になり、それらの摩擦メカニズムにおける影響を評価する。

摩擦試験においては、ヒステリシス摩擦を評価するために、他の現象を可能な限り低減させる必要がある。そこで、ゴム内部の温度上昇が小さい低速域、凝着摩擦の排除が期待されるウェット路面、かつ掘り起こし摩擦の影響を抑えるべくゴム試料の丸み付け、という条件のもと試験を実施する。また、ゴム温度を制御し試験を行うことで、ゴム弾性率の温度依存性と摩擦係数との関係を議論する。

最後に、摩擦モデルと摩擦試験とを比較することで、摩擦モデルの妥当性を評価し、ヒステリシス摩擦に寄与する各因子について詳細に考察する。

以上より、理論と実験の両側面からゴム - 路面間の摩擦現象の評価を行い、摩擦に関わる諸因子を関連付けることで、マクロからミクロにおける摩擦メカニズムの相互作用に関する知見を提供する。

1.4 本論文の構成

本論文の構成を以下に示す.

第 1 章「序論」

本研究の背景, 従来の研究, および研究の目的を述べる.

第 2 章「表面粗さパワースペクトル」

路面特性を表す表面粗さパワースペクトルおよびセルフアフィンフラクタル性について説明する.

第 3 章「ゴムの力学的特性」

弾性率の周波数依存性およびひずみ依存性の概要を説明し, それらの特性を表現する数理モデルを紹介する.

第 4 章「タイヤ - 路面間の摩擦理論」

タイヤ - 路面間の摩擦について, 概要を述べ, Persson の接触・摩擦理論を説明する.

第 5 章「摩擦試験」

本研究で用いる路面試料およびゴム試料の特性を示し, 実施した摩擦試験の概要と結果を述べ, 考察を付す.

第 6 章「Persson の摩擦理論に基づく摩擦係数予測」

路面の表面特性およびゴムの粘弾性特性を用いて Persson の摩擦理論より計算される摩擦係数値の特徴を述べる.

第 7 章「部分接触を考慮した摩擦係数予測」

マクロスケールにおけるゴム - 路面間の部分接触状態を考慮した摩擦モデルを提案し, 摩擦係数への影響を示す.

第 8 章「非線形粘弾性を考慮した摩擦係数予測」

ゴムの非線形粘弾性を考慮した摩擦モデルを提案し, 摩擦係数への影響を示す.

第 9 章「摩擦試験と摩擦モデルとの比較・検証」

提案した摩擦モデルと摩擦試験とを比較し, ゴム - 路面間で生じるヒステリシス摩擦を議論し, 考察を行う.

第 10 章「結論と今後の課題」

本研究の結論と今後の課題について述べる.

2 表面粗さパワースペクトル

2.1 表面粗さパワースペクトルの定義および計算手法

2.1.1 表面粗さパワースペクトルの定義

ゴム-路面間で生じる接触状態および摩擦現象において、路面粗さの寄与は大きく、その特性を適切に表現することが重要である。道路などの路面において、その表面粗さは、マイクロテクスチャ、マクロテクスチャ、メガテクスチャ、および路面凹凸の4つの領域に分類することができる[11]。特に、タイヤの転がり抵抗に対しては、マイクロテクスチャおよびマクロテクスチャが支配的であることが知られている。

そのため、路面粗さを詳細に議論するためには、幅広いスケールに対応する指標が必要である。しかし、広く用いられている算術平均粗さ (R_a) や二乗平均平方根粗さ (R_q) はマクロテクスチャの性質を表現するに留まる。スペクトル解析は、表面粗さのマルチスケール性を表現する有効な手法であり、表面粗さパワースペクトルは以下のように定義される[53]。

$$C(\mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \langle h(\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau})h(\boldsymbol{\tau}) \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \quad (2-1)$$

ただし、 $h(\mathbf{x})$ は位置 $\mathbf{x} = (x, y)$ における高さプロファイルであり、 $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表す。路面表面の統計的性質は基準位置に依らないと仮定しているため、高さプロファイルにおいて $h(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x})h(\mathbf{x}_0) = h(\mathbf{x})h(\mathbf{0})$ であることに注意されたい。つまり、路面の表面粗さパワースペクトルは、路面表面の高さプロファイルの自己相関関数を計算し、そのアンサンブル平均をフーリエ変換したものと定義される。物理的には、路面の表面粗さパワースペクトルは、路面凹凸の波数成分ごとの強さであると表現できる。

2.1.2 計算手法

式(2-1)に基づいて表面粗さパワースペクトルを数値的に計算するためには、高さデータ $h(\mathbf{x})$ の自己相関関数を求める必要があり、計算時間が大きくなり得る。そこで、式(2-1)を展開することで、自己相関関数を求めずに、表面粗さパワースペクトルを計算する手法を導入する[12].

高さデータ $h(\mathbf{x})$ について、測定長さを L とし測定範囲の面積を $A(=L^2)$ とすると、自己相関関数は次式で表される。

$$\langle h(\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau})h(\boldsymbol{\tau}) \rangle = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \int d^2\boldsymbol{\tau} h(\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau})h(\boldsymbol{\tau}) \quad (2-2)$$

これを式(2-1)に代入すると、

$$C(\mathbf{q}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \int d^2\mathbf{x} \int d^2\boldsymbol{\tau} h(\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau})h(\boldsymbol{\tau}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \quad (2-3)$$

と表される。ここで、高さ $h(\mathbf{x})$ のフーリエ変換を $h(\mathbf{q})$ と定義すると、

$$h(\mathbf{x}) = \int d^2\mathbf{q} h(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \quad (2-4)$$

で表わされるので、式(2-4)を用いて式(2-3)を整理すると、

$$\begin{aligned} C(\mathbf{q}) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{1}{A} \int d^2\mathbf{x} \int d^2\boldsymbol{\tau} \int d^2\mathbf{q}' \int d^2\mathbf{q}'' h(\mathbf{q}')h(\mathbf{q}'') e^{i(\mathbf{q}'+\mathbf{q}'')\cdot\boldsymbol{\tau}} e^{i(\mathbf{q}'-\mathbf{q})\cdot\mathbf{x}} \\ &= \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^2}{A} h(\mathbf{q})h(-\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (2-5)$$

が得られる。ただし、式(2-5)中の変換には、以下に示されるフーリエ変換とデルタ関数の公式を用いた。

$$\int d^2\mathbf{x} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} = (2\pi)^2 \delta(\mathbf{q})$$

$$\int d^2\mathbf{q}' h(\mathbf{q}') \delta(\mathbf{q}' - \mathbf{q}) = h(\mathbf{q})$$

さらに、

$$\begin{aligned} h(\mathbf{q}) &= \int d^2\mathbf{x} h(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \int d^2\mathbf{x} h(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}) + i \int d^2\mathbf{x} h(\mathbf{x}) \sin(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}) \end{aligned}$$

$$h(-\mathbf{q}) = \int d^2\mathbf{x} h(\mathbf{x}) \cos(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}) - i \int d^2\mathbf{x} h(\mathbf{x}) \sin(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x})$$

であるから、 $h(-\mathbf{q})$ は $h(\mathbf{q})$ の複素共役であることがわかる。したがって、式(2-5)は、

$$C(\mathbf{q}) = \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{(2\pi)^2}{A} |h(\mathbf{q})|^2 \quad (2-6)$$

と表される. 以上より, 高さデータ $h(\mathbf{x})$ の自己相関関数を求めずに, $h(\mathbf{x})$ のフーリエ変換 $h(\mathbf{q})$ を計算することで表面粗さパワースペクトル $C(\mathbf{q})$ を算出することができる. ここでは路面の等方性を仮定しているため, 路面の表面粗さパワースペクトルは波数ベクトル \mathbf{q} の絶対値 $|\mathbf{q}| = q$ のみに依存する. よって, 波数ベクトル \mathbf{q} のスカラー q を用いて 2 次元データ $C(\mathbf{q})$ を 1 次元データ $C(q)$ に変換して表現する.

また, 表面粗さパワースペクトル $C(\mathbf{q})$ より二乗平均平方根粗さ R_q を表現することができる. ここで, 二乗平均平方根粗さ R_q は,

$$R_q = \sqrt{\frac{1}{A} \iint d^2x h^2(\mathbf{x})} \quad (2-7)$$

で定義される. 式(2-1)をフーリエ逆変換し, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ とすると,

$$\langle h(\boldsymbol{\tau})^2 \rangle = \int d^2q C(\mathbf{q}) \quad (2-8)$$

が得られ, 式(2-8)の平方根を取れば, R_q となる. よって,

$$R_q = \langle h(\boldsymbol{\tau})^2 \rangle^{\frac{1}{2}} = \left\{ \int d^2q C(\mathbf{q}) \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2-9)$$

と表される. ここで, 路面の等方性を仮定していることから, 波数空間を直交座標から極座標へ座標変換すると,

$$\begin{aligned} \begin{cases} q_x = q \cos \phi \\ q_y = q \sin \phi \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} dq_x = \cos \phi dq - q \sin \phi d\phi \\ dq_y = \sin \phi dq + q \cos \phi d\phi \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} dq_x \\ dq_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -q \sin \phi \\ \sin \phi & q \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq \\ d\phi \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

右辺の行列式 $|J|$ は,

$$|J| = q \cos^2 \phi + q \sin^2 \phi = q.$$

よって,

$$d^2q = dq_x dq_y = q dq d\phi.$$

以上より, 式(2-9)は次式のとおりとなる.

$$\begin{aligned} R_q &= \left\{ \int_0^{2\pi} d\phi \int dq q C(\mathbf{q}) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{ 2\pi \int dq q C(\mathbf{q}) \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2-10)$$

2.2 セルフアフィンフラクタル表面

クラック表面や路面のような自然生成された表面は、多くの場合セルフアフィンフラクタル表面であることが知られている。セルフアフィンフラクタル表面とは、表面の観察倍率を上げる際、高さを平面座標とは異なる倍率で表示すると、観察倍率を上げる前の表面と同じ表面プロファイルが見られる表面のことである。具体的には、次のようなスケール変換を考える。

$$x \rightarrow \zeta x, y \rightarrow \zeta y, z \rightarrow \zeta^H z, \quad (2-11)$$

このとき、表面の統計的性質が倍率変更前後で変化しない表面がセルフアフィンフラクタル表面である。ここで、 H はハースト指数であり、フラクタル次元 D_f と、 $D_f = 3 - H$ の関係がある。さらに、セルフアフィンフラクタル表面では、

$$C(q) \sim q^{-2(H+1)} \quad (2-12)$$

の関係が成り立つ。自然に生成された一般的な表面形状に見られるパワースペクトルと波数の関係を Fig. 2-1 に示す。ここで、セルフアフィンフラクタル性は、 $q_0 < q < q_1$ の範囲でみられる。 q_0 はロールオフ波数であり、セルフアフィンフラクタル性を示す波数の最小値を示す。 q_1 はカットオフ波数であり、その波長は分子スケールである。

したがって、路面がセルフアフィンフラクタル性を持つと仮定すると、

$$C(q) \simeq k \left(\frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)} \quad (k = \text{const.}),$$

と表すことができる。 $\langle h^2 \rangle = h_0^2/2$ と定義すると、式(2-8)および式(2-10)より、

$$\begin{aligned} \frac{h_0^2}{2} &= 2\pi \int_{q_0}^{q_1} dq q C(q) \\ &= 2\pi \int_{q_0}^{q_1} dq q k \left(\frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)} \\ &= \frac{\pi}{H} q_0^{2(H+1)} k \left(q_0^{-2H} - q_1^{-2H} \right), \end{aligned}$$

ここで、 $q_0 \ll q_1$ より、

$$\frac{h_0^2}{2} \simeq \frac{\pi}{H} q_0^2 k.$$

よって、

$$k \simeq \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0} \right)^2.$$

したがって、

$$C(q) \simeq \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0} \right)^2 \left(\frac{q}{q_0} \right)^{-2(H+1)} \quad (2-13)$$

また、セルフアフィンフラクタル表面の二乗平均平方根粗さ R_q を考えると、上述した h_0 の定義より、

$$R_q = \frac{h_0}{\sqrt{2}} \quad (2-14)$$

で表わされることがわかる。ここで、実測データより h_0 を計算する手法については、5.1.3項を参照されたい。

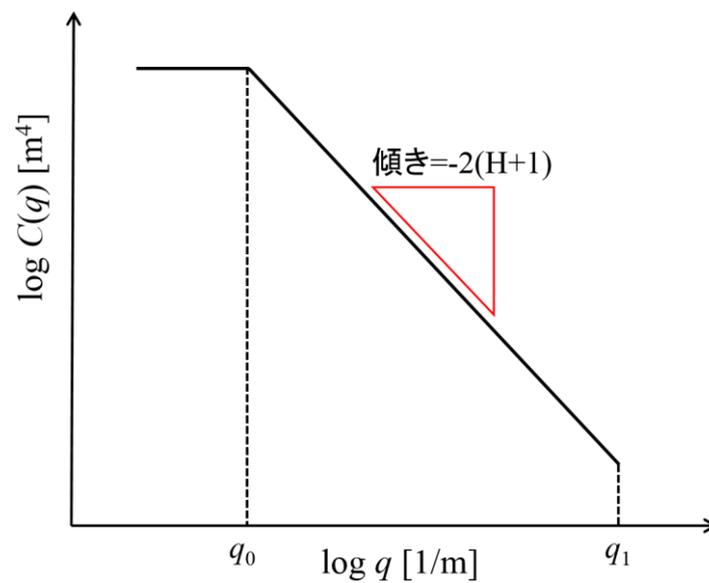


Fig. 2-1 The surface roughness power spectrum of a surface with a self-affine fractal for $q_0 < q < q_1$.

3 ゴムの力学的特性

3.1 概要

タイヤゴムをはじめとする高分子材料は、金属などの他材料と比較した際、特異的な力学的挙動を示すことが知られている[7]。たとえば、弾性率に注目すると、金属がGPaオーダーの値を示すのに対し、ゴムはMPaオーダーの値を有する柔らかい材料である。また、ゴムは、粘性と弾性の性質を併せ持つ粘弾性体としても知られる。すなわち、ひずみ振幅がゴムに入力されると、出力される応力は位相遅れを伴って現れる。このような粘弾性応答は、ひずみと同位相の成分とそれに直交する成分として分離することで、次式のような複素弾性率として表すことができる。

$$E(\omega) = E' + iE'' \quad (3-1)$$

ここで、ひずみと同位相の成分に対応する E' を貯蔵弾性率、直交成分に対応する E'' を損失弾性率と呼び、これらの位相差を表す $\tan \delta = E''/E'$ は損失正接と呼ぶ。このような力学的挙動は、摩擦現象を含むタイヤの性能に影響し、その挙動を正確に把握および表現することは非常に重要である。

ゴムの力学的挙動は、与えられる周波数およびひずみを用いて Fig. 3-1 のように整理することができる。まず、周波数およびひずみが共に微小の場合、その挙動は線形弾性として知られ、変形時間や変形履歴に依存せず、応力とひずみが1対1に対応する領域である。次に、ひずみが小さい領域において周波数が大きく変化した際に現れるのが周波数依存性である。この周波数依存性が、広く「粘弾性」として知られる領域で、3.2節で詳細を説明する。また、周波数が低く、ひずみが大きく変化する場合の挙動がひずみ依存性であり、超弾性として知られる。ひずみ依存性については、3.3節で取り扱う。最後に、高周波数かつ大ひずみの領域は、非線形粘弾性と呼ばれ、その挙動の表現については、3.4節で説明を行う。

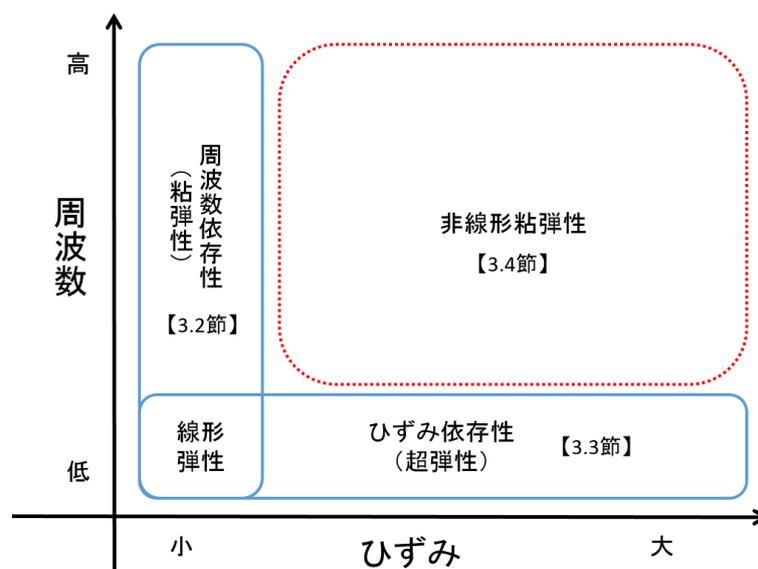


Fig. 3-1 Categorization for mechanical behavior of rubber[54].

3.2 周波数依存性（粘弾性特性）

3.2.1 周波数依存性の概要

ゴムなどの粘弾性体は、非常に速い変形に対しては弾性的な、非常に遅い変形に対しては粘性的な振る舞いを見せる。一般的なゴム粘弾性係数の周波数依存性として、Fig. 3-2 に典型的な貯蔵弾性率（実部）と損失弾性率（虚部）を示す[46]。1~10⁶ Hzの周波数帯域では、貯蔵弾性率、損失弾性率ともに増加するが、より大きい周波数でゴムの貯蔵弾性率は一定になり、損失弾性率はピークを迎えた後、減少に転じることが一般に知られている[55]。低周波側($\omega < 10^0 \text{ s}^{-1}$)においては、複素弾性率の虚部は実部より著しく小さく、実部はおよそ一定値を取り「ゴムのような」特性を示す。一方、高周波側では、弾性的に硬くなる「ガラスのような」特性を示す。高周波側($\omega > 10^6 \text{ s}^{-1}$)では、実部は一定値となるが、低周波側より大きい値になる。これらの中間の周波数帯($10^0 < \omega < 10^6 \text{ s}^{-1}$)は「遷移領域」として知られ、大きな損失正接を有する。

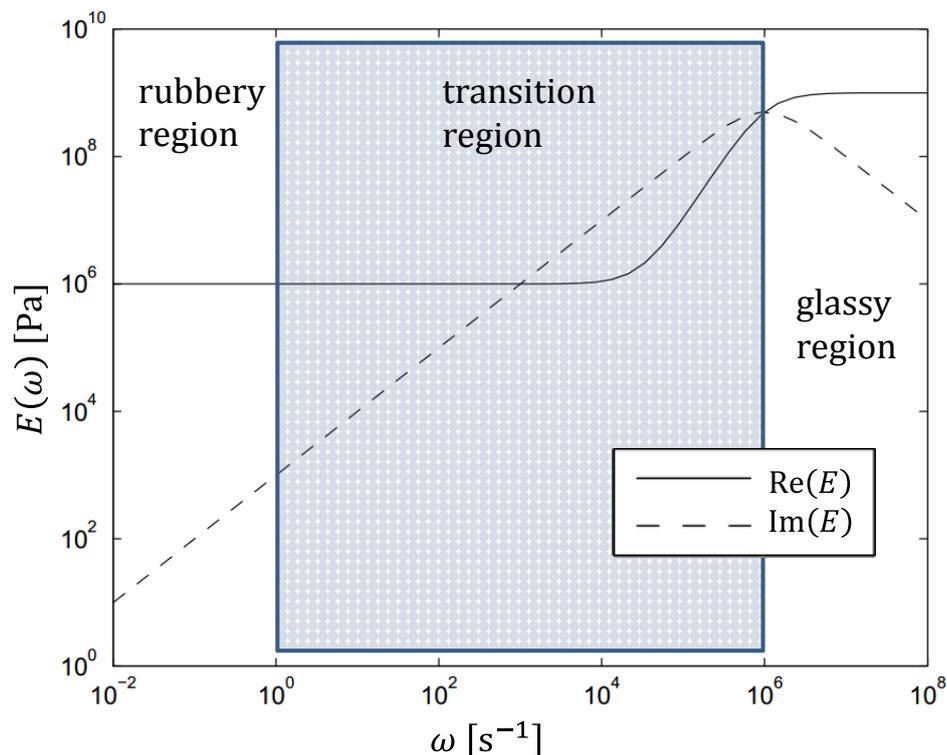


Fig. 3-2 The viscoelastic modulus $E(\omega)$ of a typical rubber-like material[46].

3.2.2 一般化 Maxwell モデル

周波数依存の挙動をスプリングとダッシュポットの力学モデルによって表現できれば、数学的に取り扱うことが容易になる。ここで、粘弾性体の典型的な挙動であるクリープと応力緩和を考える。この両挙動を表現するために考案された代表的なモデルが、Voigt・Kelvin モデルと Maxwell モデルである (Fig. 3-3 参照)。

実際の粘弾性体の力学的挙動は複雑であるため、構成要素を増やして、より正確に挙動を近似することになる。そこで、本研究における粘弾性挙動の表現は Fig. 3-4 に示す一般化 Maxwell モデルを用いる。現在、粘弾性解析ではこの一般化 Maxwell モデルが広く使用されている。以下に一般化 Maxwell モデルの関係式を導出し説明する。

まず、一つの Maxwell 要素に注目し、参照番号 $i (i = 1, 2, \dots, n)$ を付す。この要素のバネによる弾性率を E_i とし、ダッシュポットの粘性係数を η_i とする。このとき、Maxwell 要素にかかる応力 σ_i とひずみ ε_i について、バネ部分のひずみを $\varepsilon_{i,1}$ 、ダッシュポット部分のひずみを $\varepsilon_{i,2}$ と表現することで以下の3つの関係式が得られる。

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i,1} + \varepsilon_{i,2} \Leftrightarrow \frac{d\varepsilon_i}{dt} = \frac{d\varepsilon_{i,1}}{dt} + \frac{d\varepsilon_{i,2}}{dt}$$

$$\sigma_i = E_i \varepsilon_{i,1} \Leftrightarrow \frac{d\varepsilon_{i,1}}{dt} = \frac{1}{E_i} \frac{d\sigma_i}{dt}$$

$$\sigma_i = \eta_i \frac{d\varepsilon_{i,2}}{dt} \Leftrightarrow \frac{d\varepsilon_{i,2}}{dt} = \frac{1}{\eta_i} \sigma_i$$

これらより $\varepsilon_{i,1}$ および $\varepsilon_{i,2}$ を消去すると、

$$\frac{1}{E_i} \frac{d\sigma_i}{dt} + \frac{1}{\eta_i} \sigma_i = \frac{d\varepsilon_i}{dt} \quad (3-2)$$

という微分方程式が得られ、Maxwell 要素の基礎式である。ここで、 $\varepsilon_{i,0}$ の強制振動として $\varepsilon_i = \varepsilon_{i,0} e^{i\omega t}$ を与えると、

$$\frac{d\varepsilon_i}{dt} = i\omega \varepsilon_{i,0} e^{i\omega t}$$

となるので、式(3-2)は以下のように変換できる。

$$\frac{1}{E_i} \frac{d\sigma_i}{dt} + \frac{1}{\eta_i} \sigma_i = i\omega \varepsilon_{i,0} e^{i\omega t} \quad (3-3)$$

はじめに、

$$\frac{1}{E_i} \frac{d\sigma_i}{dt} + \frac{1}{\eta_i} \sigma_i = 0$$

の一般解を求めると、

$$\sigma_i = \sigma_{i,0} \exp\left(-\frac{t}{z_i}\right) \quad (3-4)$$

となる. ここで, z_i を緩和時間と呼び, $z_i = \eta_i/E_i$ で与えられ, $t = 0$ の解を $\sigma_{i,0}$ とした. 次に, 式(3-3)の特解を求める. $\sigma_i = Ae^{i\omega t}$ として代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_i} i\omega A e^{i\omega t} + \frac{1}{\eta_i} A e^{i\omega t} &= i\omega \varepsilon_{i,0} e^{i\omega t} \\ A &= \frac{i\omega E_i \eta_i}{i\omega \eta_i + E_i} \varepsilon_{i,0} = \frac{1}{\frac{1}{E_i} + \frac{1}{i\omega \eta_i}} \varepsilon_{i,0} \end{aligned}$$

が求まる. したがって, 式(3-3)の解は,

$$\sigma_i = \sigma_{i,0} \exp\left(-\frac{t}{z_i}\right) + \frac{1}{\frac{1}{E_i} + \frac{1}{i\omega \eta_i}} \varepsilon_{i,0} e^{i\omega t} \quad (3-5)$$

である. ただし, 式(3-5)の右辺第1項 (一般解) は時間とともに減衰するため, 定常状態にある Maxwell 要素にかかる応力 σ_i は次式のとおりである.

$$\sigma_i = \frac{1}{\frac{1}{E_i} + \frac{1}{i\omega \eta_i}} \varepsilon_{i,0} e^{i\omega t} \quad (3-6)$$

以上を基に一般化 Maxwell モデルに拡大する. $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$ を仮定すると, $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n$ であり, 全体にかかる応力 σ は, $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$ であるから,

$$\sigma = \left\{ E_0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{1}{E_i} + \frac{1}{i\omega \eta_i}} \right\} \varepsilon_0 e^{i\omega t} \quad (3-7)$$

となる. よって, $E = \sigma/\varepsilon$ より, 複素弾性率は,

$$E(\omega) = E_0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{1}{E_i} + \frac{1}{i\omega \eta_i}} \quad (3-8)$$

となることが導かれる.

また, 各 Maxwell 要素の貯蔵弾性率および損失弾性率を整理すると, それぞれ,

$$E'_i = \frac{E_i z_i^2 \omega^2}{z_i^2 \omega^2 + 1} \quad (3-9)$$

$$E''_i = \frac{E_i z_i \omega}{z_i^2 \omega^2 + 1} \quad (3-10)$$

と表される.

実際のゴムの複素弾性率にはひずみ依存がみられるが, 一般化 Maxwell モデルより計算される複素弾性率はひずみ ε には依存していないことが確認される.

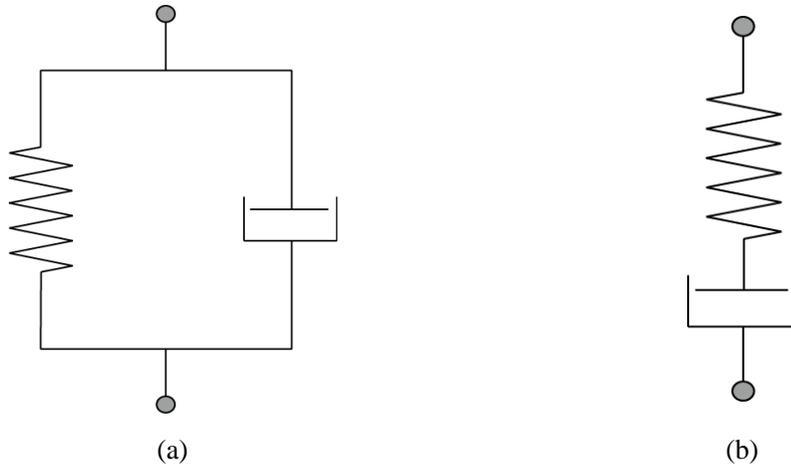


Fig. 3-3 Viscoelastic models; (a) Voigt • Kelvin Model, (b) Maxwell Model.

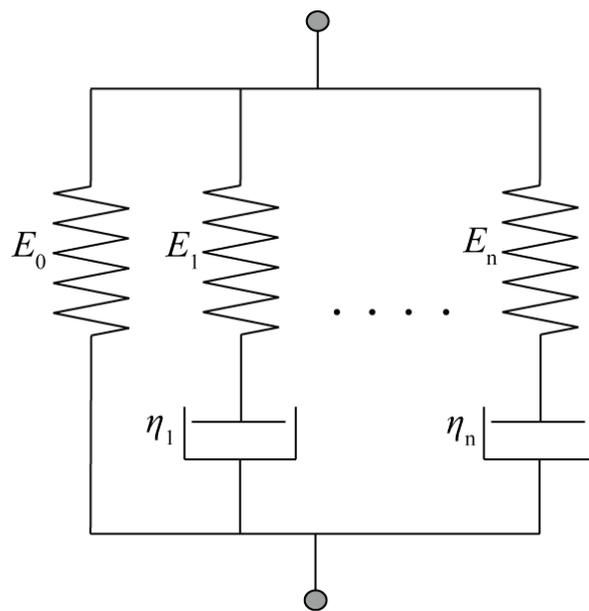


Fig. 3-4 Generalized Maxwell Model.

3.3 ひずみ依存性（超弾性特性）

3.3.1 ひずみ依存性の概要

ゴムの複素弾性率はひずみ依存を有しており、ひずみが小さいときは、応力とひずみは線形性を保つが、ひずみが大きくなると一般的には複素弾性率は低下する傾向にある[56]. 特に、貯蔵弾性率および損失弾性率のそれぞれについて注目すると、貯蔵弾性率はひずみが大きくなるに伴い弾性率が低下していき、ひずみ100%前で一定の値を示すようになる. 一方、損失弾性率は、ひずみ約1%において極大値を示し、その後ひずみ量の増加に対して弾性率も減少していく (Fig. 3-5 参照) [16][57][58].

また、異なる周波数によるひずみ依存性への影響についても研究が進められており、Fig. 3-5 にその概略図を示す[57][58]. 貯蔵弾性率は、小ひずみ側においては高周波数ほど高い弾性率を有し、周波数依存性が大きい、大ひずみ側では周波数に関わらずおよそ一定の弾性率に収束する. 一方、損失弾性率は、周波数が異なっても極大値を示すひずみ量は大きく変化せず、大ひずみ側においても高周波数が低周波数よりも大きい弾性率を示し、貯蔵弾性率ほど顕著に弾性率は収束しない.

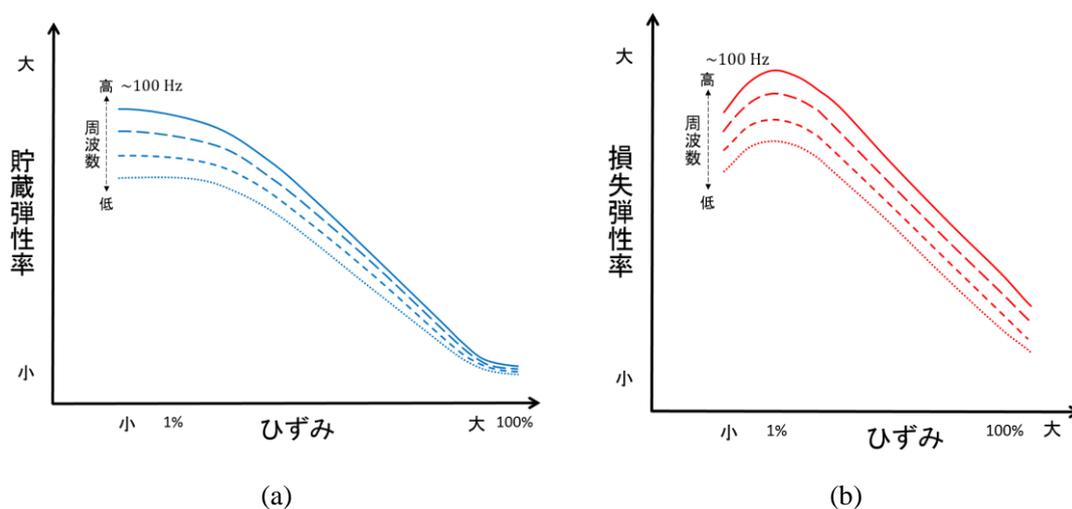


Fig. 3-5 Schematic view of strain dependence; (a) Storage modulus, (b) Loss modulus.

3.3.2 Kraus モデル

3.3.1 項で述べたひずみ依存性挙動は、分子鎖の物理的結合で生じる破壊と再構成とに基づき現象論的にモデル化され[59], Kraus モデルとして知られている. このモデルは, 実験値との精度良いフィッティングを得るため, 修正が加えられており[60][61], 本研究では文献[61]を基に以下の式で Kraus モデルを与える.

$$E'(\varepsilon) = E'_{\infty} + \frac{E'_0 - E'_{\infty}}{1 + (\varepsilon/\varepsilon_c)^{2m}} \quad (3-11)$$

$$E''(\varepsilon) = E''_{\infty} + \frac{2(E''_m - E''_{\infty})(\varepsilon/\varepsilon_c)^m}{1 + (\varepsilon/\varepsilon_c)^{2m}} \quad (3-12)$$

ここで, ε_c は損失弾性率が極大値を示すひずみ量であり, ε_c での損失弾性率が E''_m である. また, E'_{∞} および E''_{∞} はそれぞれ, 大ひずみ域における貯蔵弾性率と損失弾性率の漸近値であり, E'_0 は微小ひずみ域での貯蔵弾性率を表す. 各パラメータを Table 3-1 で与えた際の Kraus モデルの挙動を Fig. 3-6 に示す. 貯蔵弾性率は $E'_0 = 10$ MPa から $E'_{\infty} = 1$ MPa へと単調減少し, 損失弾性率はひずみ $\varepsilon_c = 1\%$ で極大値 $E''_m = 1$ MPa を示し, その後単調減少する.

この Kraus モデルは実験値と良く一致することが確認されているが, 複数の周波数に対するひずみ依存性を表現するには, 上述したパラメータのうち複数 (特に, E'_0 , および E''_m) を周波数ごとに設定する必要がある. 文献[57]では, ε_c 以外のパラメータを周波数の関数として設定し, 実験値に対してフィッティングを行っている.

Table 3-1 Exemplary parameters for Kraus model.

E'_{∞} [MPa]	1
E'_0 [MPa]	10
E''_{∞} [MPa]	0
E''_m [MPa]	1
ε_c [%]	1
m	0.5

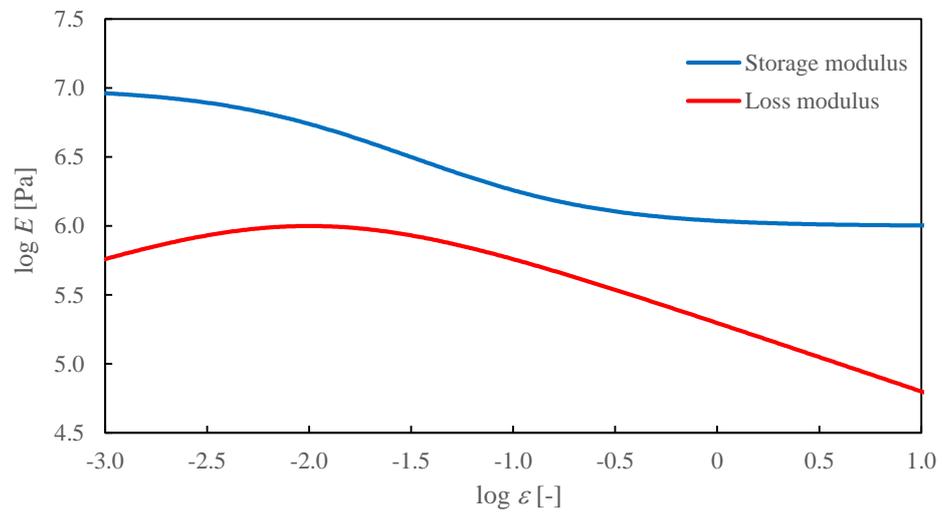


Fig. 3-6 Typical storage/loss modulus behavior of Kraus model.

3.4 非線形粘弾性

3.4.1 非線形粘弾性特性の概要

ひずみが小さい場合、低周波数から高周波数までの複素弾性率は粘弾性として、周波数が低い場合、小ひずみから大ひずみまでの複素弾性率は超弾性として、弾性率の挙動を表現することができた。しかし、高周波数かつ有限ひずみに対応する領域を含む非線形粘弾性は、その強い非線形性ゆえに粘弾性や超弾性と比較して挙動がより複雑となる。本研究では、各 Maxwell 要素の固有時間をひずみ履歴依存型で表現した拡張 Maxwell モデルを採用する。その詳細を 3.4.2 項で説明する。

3.4.2 拡張 Maxwell モデル

Höfer らは 3.2.2 項で述べた一般化 Maxwell モデルを発展させ、緩和時間に非線形性を導入することで、周波数およびひずみに依存した複素弾性率が表現できる非線形粘弾性モデルを提案した[62]. 本研究では、当該モデルを「拡張 Maxwell モデル」と称する. 以下にその導出の説明を付す.

3.2.2 節で導出したように、一般化 Maxwell モデルの i 番目の要素を支配する微分方程式は、式(3-2)より

$$\frac{d\sigma_i}{dt} + \frac{1}{z_i} \sigma_i = E_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} \quad (3-13)$$

で表される. ここに、要素ごとの固有時間 $z_i(t)$ を導入し、

$$\frac{1}{z_i} = \frac{\dot{z}_i}{z_i} \quad (3-14)$$

と表現すると、式(3-13)は次のように変換できる.

$$\frac{d\sigma_i}{dt} + \frac{\dot{z}_i}{z_i} \sigma_i = E_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} \quad (3-15)$$

ここで、 $z_i(t)$ は微分方程式 $\dot{z}_i(t) = f_i(\dots) \geq 0$ に従い、本モデルでは変形履歴に依存する関数として取り扱う. このとき、ひずみ依存性を表現するために、 $\dot{z}_i(t)$ は、

$$\dot{z}_i = \alpha_i(\tau_i|\dot{\varepsilon}| + 1) + (1 - \alpha_i) \left(\sum_{j=1}^L d_{ij} q_j + 1 \right) \quad (3-16)$$

であると仮定する. ただし、 α_i 、 τ_i 、および d_{ij} は材料パラメータである. また、 q_j は材料のひずみ履歴依存を表現する内部変数であり、以下の 1 次微分方程式で表現される.

$$\dot{q}_j(t) = \frac{1}{\tau_i} (\tau_0 |\dot{\varepsilon}(t)| - q_j) \quad (3-17)$$

ここで、式(3-17)中、 τ_i は材料の微小構造の動的挙動を表す緩和時間を意味し、また、 τ_0 は次元を考慮して $\tau_0 = 1$ の定数として扱う. このとき、ひずみ振幅 $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$ を取ると $\dot{z}_i \rightarrow 1$ が得られるので、式(3-15)、(3-16)、および(3-17)は式(3-13)の Maxwell 要素の基礎式と同値になることがわかる (付録 A 参照). さらに、再び式(3-16)に注目すると、右辺第 1 項はひずみステップ間の材料の短期的挙動を表し、右辺第 2 項は式(3-17)による弾性率の長期的回復を表すといえる. 以下、これらの微分方程式の解を得るために、ガラーキン法を用いる.

ひずみ変形として次式のような正弦波を仮定する.

$$\varepsilon_i(t) = \Delta\varepsilon \sin(\omega t) \quad (3-18)$$

これを式(3-15)に代入すると、

$$\frac{d\sigma_i}{dt} + \frac{\dot{z}_i}{z_i}\sigma_i = E_i\Delta\varepsilon\omega \cos(\omega t) \quad (3-19)$$

が得られる。同様に、式(3-16)に式(3-18)を代入することで、

$$\dot{z}_i = \alpha_i(\tau_i\Delta\varepsilon\omega|\cos(\omega t)| + 1) + (1 - \alpha_i)\left(\sum_{j=1}^L d_{ij}q_j + 1\right) \quad (3-20)$$

を得る。

このとき、 σ_i が取り得る解は、

$$\sigma_i(t) = \sum_k A_{ki}N_k(t) = A_{1i}\sin(\omega t) + A_{2i}\cos(\omega t) \quad (3-21)$$

である。式(3-21)からわかるように、線形独立した試験関数は、

$$N_1(t) = \sin(\omega t), N_2(t) = \cos(\omega t)$$

である。

ここでMaxwellモデルの複素弾性率を再考すると、貯蔵弾性率 E' および損失弾性率 E'' は、

$$E' = E_0 + \sum_{i=1}^n E'_i, E'' = \sum_{i=1}^n E''_i \quad (3-22)$$

を満たし、

$$\varepsilon = \Delta\varepsilon \sin(\omega t) \quad (3-23)$$

という入力に対し、

$$\sigma = \Delta\varepsilon\{E'\sin(\omega t) + E''\cos(\omega t)\} \quad (3-24)$$

を出力する。さらに、 $\varepsilon = \varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_n$ であるから、式(3-21)および式(3-24)より、

$$A_{1i} = \Delta\varepsilon E'_i, A_{2i} = \Delta\varepsilon E''_i \quad (3-25)$$

がわかるので、 σ_i の解となる関数は、

$$\sigma_i(t) = \Delta\varepsilon\{E'_i\sin(\omega t) + E''_i\cos(\omega t)\} \quad (3-26)$$

となる。また、このとき σ_i の時間微分は、

$$\dot{\sigma}_i = \Delta\varepsilon\omega\{E'_i\cos(\omega t) - E''_i\sin(\omega t)\} \quad (3-27)$$

である。

ガラーキン法に従い、式(3-19)を双線型形式で表現した

$$\int_0^{2\pi/\omega} \left(\frac{d\sigma_i}{dt} + \frac{\dot{z}_i}{z_i}\sigma_i\right) N_k(t) dt = E_i\Delta\varepsilon\omega \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t) N_k(t) dt \quad (3-28)$$

を解くことで E'_i および E''_i を導出する。ここで、内部変数 q_j の時間差分は、式(3-19)の角周波数 ω と比較して十分小さいものと仮定すると、ひずみステップに対し q_j は定数とみなすことができる。このとき、十分なひずみ振幅を与え弾性率が定常状態に達すると、 $q_j \rightarrow 2\omega\Delta\varepsilon/\pi$ となる[63]。

式(3-28)の左辺について、式(3-20)、(3-26)、および(3-27)を代入すると、

$$\begin{aligned}
& \int_0^{2\pi/\omega} \left(\frac{d\sigma_i}{dt} + \frac{\dot{z}_i}{z_i} \sigma_i \right) N_k(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi/\omega} \left[\Delta\varepsilon\omega \{ E_i' \cos(\omega t) - E_i'' \sin(\omega t) \} + \right. \\
&\quad \left. \frac{\alpha_i(\tau_i \Delta\varepsilon\omega |\cos(\omega t)| + 1) + (1 - \alpha_i)(\sum_{j=1}^L d_{ij} q_j + 1)}{z_i} \times \right. \\
&\quad \left. \Delta\varepsilon \{ E_i' \sin(\omega t) + E_i'' \cos(\omega t) \} \right] N_k(t) dt \\
&= \int_0^{2\pi/\omega} [\Delta\varepsilon\omega \{ E_i' \cos(\omega t) - E_i'' \sin(\omega t) \} + \\
&\quad \{ C_i^1 \Delta\varepsilon\omega |\cos(\omega t)| + C_i^2 \} \Delta\varepsilon \{ E_i' \sin(\omega t) + E_i'' \cos(\omega t) \}] N_k(t) dt \\
&= \Delta\varepsilon \int_0^{2\pi/\omega} \{ (\omega E_i' + C_i^2 E_i'') \cos(\omega t) - (\omega E_i'' - C_i^2 E_i') \sin(\omega t) + \\
&\quad C_i^1 \Delta\varepsilon\omega E_i'' |\cos(\omega t)| \cos(\omega t) + C_i^1 \Delta\varepsilon\omega E_i'' |\cos(\omega t)| \sin(\omega t) \} N_k(t) dt \quad (3-29)
\end{aligned}$$

が導かれる。ただし、式(3-29)中、 C_i^1 および C_i^2 は、

$$C_i^1 \equiv \frac{\alpha_i \tau_i}{z_i}, C_i^2 \equiv \frac{1 + (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^L d_{ij} q_j}{z_i}$$

と定義された定数である。

よって、式(3-28)は、以下のとおり解くことができる。

(i) $k = 1$ のとき (すなわち、 $N_1(t) = \sin(\omega t)$ のとき)

$$\begin{aligned}
& \Delta\varepsilon \int_0^{2\pi/\omega} \{ (\omega E_i' + C_i^2 E_i'') \cos(\omega t) - (\omega E_i'' - C_i^2 E_i') \sin(\omega t) + \\
&\quad C_i^1 \Delta\varepsilon\omega E_i'' |\cos(\omega t)| \cos(\omega t) + C_i^1 \Delta\varepsilon\omega E_i'' |\cos(\omega t)| \sin(\omega t) \} \sin(\omega t) dt \\
&= E_i \Delta\varepsilon\omega \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t) dt \\
&\Leftrightarrow \Delta\varepsilon \left\{ \left(\frac{4}{3} C_i^1 \Delta\varepsilon + \frac{\pi}{\omega} C_i^2 \right) E_i' - \pi E_i'' \right\} = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3} C_i^1 \Delta\varepsilon + \frac{\pi}{\omega} C_i^2 \right) E_i' = \pi E_i'' \\
&\Leftrightarrow \left\{ \frac{1 + (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^L d_{ij} q_j}{z_i \omega} + \frac{4}{3\pi} \frac{\alpha_i \tau_i \Delta\varepsilon}{z_i} \right\} E_i' = E_i'' \quad (3-30)
\end{aligned}$$

(ii) $k = 2$ のとき (すなわち, $N_2(t) = \cos(\omega t)$ のとき)

$$\begin{aligned}
& \Delta \varepsilon \int_0^{2\pi/\omega} \{(\omega E_i' + C_i^2 E_i'') \cos(\omega t) - (\omega E_i'' - C_i^2 E_i') \sin(\omega t) + \\
& \quad C_i^1 \Delta \varepsilon \omega E_i'' |\cos(\omega t)| \cos(\omega t) + C_i^1 \Delta \varepsilon \omega E_i'' |\cos(\omega t)| \sin(\omega t)\} \cos(\omega t) dt \\
& = E_i \Delta \varepsilon \omega \int_0^{2\pi/\omega} \cos(\omega t) \cos(\omega t) dt \\
& \Leftrightarrow \Delta \varepsilon \left\{ \pi E_i' + \left(\frac{8}{3} C_i^1 \Delta \varepsilon + \frac{\pi}{\omega} C_i^2 \right) E_i'' \right\} = \pi E_i \Delta \varepsilon \omega \\
& \Leftrightarrow \pi E_i' + \left(\frac{8}{3} C_i^1 \Delta \varepsilon + \frac{\pi}{\omega} C_i^2 \right) E_i'' = \pi E_i \\
& \Leftrightarrow E_i' + \left\{ \frac{1 + (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^L d_{ij} q_j}{z_i \omega} + \frac{8}{3\pi} \frac{\alpha_i \tau_i \Delta \varepsilon}{z_i} \right\} E_i'' = E
\end{aligned} \tag{3-31}$$

したがって, 式(3-30)および式(3-31)より,

$$E_i' = \frac{E_i}{1 + \left\{ \frac{1 + (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^L d_{ij} q_j}{z_i \omega} + \frac{8}{3\pi} \frac{\alpha_i \tau_i \Delta \varepsilon}{z_i} \right\} \left\{ \frac{1 + (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^L d_{ij} q_j}{z_i \omega} + \frac{4}{3\pi} \frac{\alpha_i \tau_i \Delta \varepsilon}{z_i} \right\}} \tag{3-32}$$

$$E_i'' = \frac{E_i \left\{ \frac{1 + (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^L d_{ij} q_j}{z_i \omega} + \frac{4}{3\pi} \frac{\alpha_i \tau_i \Delta \varepsilon}{z_i} \right\}}{1 + \left\{ \frac{1 + (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^L d_{ij} q_j}{z_i \omega} + \frac{8}{3\pi} \frac{\alpha_i \tau_i \Delta \varepsilon}{z_i} \right\} \left\{ \frac{1 + (1 - \alpha_i) \sum_{j=1}^L d_{ij} q_j}{z_i \omega} + \frac{4}{3\pi} \frac{\alpha_i \tau_i \Delta \varepsilon}{z_i} \right\}} \tag{3-33}$$

が得られる. ここで, $q_j = 2\omega \Delta \varepsilon / \pi$ を代入し, 簡単のために $\sum_{j=1}^L d_{ij} = 1$ とすることで $\sum_{j=1}^L d_{ij} q_j = 2\omega \Delta \varepsilon / \pi$ とすると, Maxwell 要素の貯蔵弾性率および損失弾性率はそれぞれ,

$$E_i' = \frac{E_i z_i^2 \omega^2}{z_i^2 \omega^2 + \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \Delta \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \Delta \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\}} \tag{3-34}$$

$$E_i'' = \frac{E_i z_i \omega \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \Delta \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\}}{z_i^2 \omega^2 + \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \Delta \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \Delta \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\}} \tag{3-35}$$

と整理される.

以上より, ひずみの振幅 $\Delta \varepsilon$ を ε で置き換えることで, 拡張 Maxwell モデルの複素弾性率は,

$$E'(\omega, \varepsilon) = E_0 + \sum_{i=1}^n \frac{E_i z_i^2 \omega^2}{z_i^2 \omega^2 + \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\} \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\}} \quad (3-36)$$

$$E''(\omega, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{E_i z_i \omega \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\}}{z_i^2 \omega^2 + \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\} \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\}} \quad (3-37)$$

と導出でき、角周波数 ω およびひずみ ε の関数として表される。

最後に、これらを一般化 Maxwell モデルと比較する。拡張 Maxwell モデルの複素弾性率に対し $\varepsilon \rightarrow 0$ を取った場合、すなわちひずみを考慮しない場合、Maxwell 要素の E'_i および E''_i はそれぞれ、

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E'_i = \frac{E_i z_i^2 \omega^2}{z_i^2 \omega^2 + 1} \quad (3-38)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E''_i = \frac{E_i z_i \omega}{z_i^2 \omega^2 + 1} \quad (3-39)$$

となり、式(3-9)および式(3-10)と一致する。よって、 $\varepsilon \rightarrow 0$ において拡張 Maxwell モデルは一般化 Maxwell モデルと等しくなることが確認できる。また、一般化 Maxwell モデルのパラメータ数が $2n + 1$ 個であるのに対し、拡張 Maxwell モデルは $4n + 1$ 個のパラメータを有する。

4 タイヤ - 路面間の摩擦理論

4.1 摩擦現象のマルチスケール性

固く粗い表面上をすべるゴムに生じる摩擦力は、主として、ゴムが路面上の凹凸により周期的な変動を行う際に発生するエネルギーロスによるヒステリシス項と、接触表面間の相互作用（主には van der Waals 力）により生じる凝着（粘着）項とに起因する。特に、タイヤゴムにおいては、ヒステリシスロスが、寄与率としては 8 割以上を占めることが知られている[8][10].

路面の凹凸はあらゆるスケールで存在する (Fig. 4-1 参照)。たとえば、あるスケールで見た凹凸の表面を拡大すると、さらに小さい凹凸が存在することがわかる。このような凹凸は分子スケールまで存在し、このような特性をマルチスケール性と称する。Persson は、あらゆるスケールの路面の粗さの摩擦力に対する寄与をすべて考慮することで、任意の粗さを持つ路面に対するゴムの摩擦理論を構築した[43]。つまり、路面表面のあらゆるスケールの凹凸をゴムが摺動する際に生じるエネルギーロスの積算、すなわちヒステリシスロスの積算を、摩擦力と等価と考えた。

本章では、そのようなマルチスケール性に基づくヒステリシスロスを考慮した Persson のモデル、およびそれに付随するゴムと路面の特性について説明する。

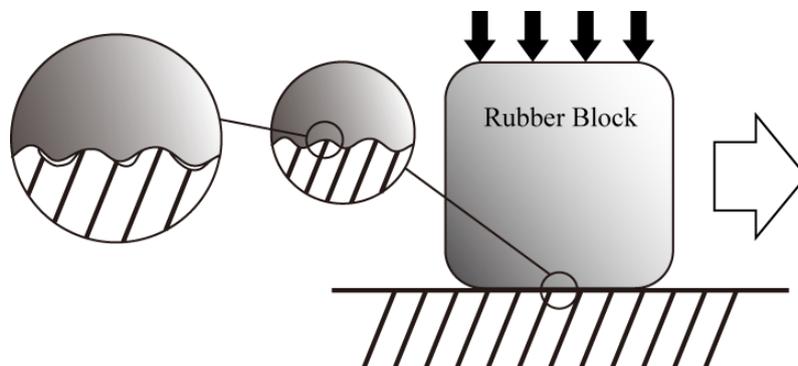


Fig. 4-1 A rubber squeezed against a hard, rough, substrate.

4.2 Persson の摩擦理論

4.2.1 接触理論

平らな表面を持つゴムブロックが、粗い路面表面に押し付けられている状態を考える。このとき、見かけ上ゴムの表面全体が路面に接触しているが、観察倍率を上げ、より詳細に見ると、そこには接触部と非接触部が混在している。さらにその接触部を拡大して見ると、その中にも接触部と非接触部が混在している (Fig. 4-2 参照)。このように見かけ上の接触領域は観察倍率によって変化し、真の接触領域は見かけの接触領域よりも非常に小さくなる。

Persson の摩擦理論においては路面の凹凸を波数空間で表す。つまり、摩擦力を路面の凹凸の波長の大きさごとに求める。波数は観察倍率に対応し、より大きい波数 (より小さい波長) の凹凸ほど観察倍率は大きい。ここで、ある波数の路面凹凸の摩擦力への寄与を考えると、実際にゴムの変形をもたらす、摩擦力に寄与するのは、その波数に対応する観察倍率において、見かけ上ゴムと路面が接触している部分のみである。そこで、波数 q における見かけ上の接触領域の割合 $P(q)$ を考慮することによって、各スケールの凹凸による摩擦力を正しく見積もることが可能となる。 $P(q)$ は次のように定義される。

$$P(q) = \frac{A(\zeta)}{A_0} \quad (4-1)$$

ここで、 A_0 は公称接触領域、 $A(\zeta)$ は倍率 ζ における見かけ上の接触領域である。また、 $q = q_0\zeta$ において、 q_0 は低波数ロールオフであり、 q が最も小さい波数 q_0 の ζ 倍の波数であるということを示している。本節では、この $P(q)$ の導出を説明する。

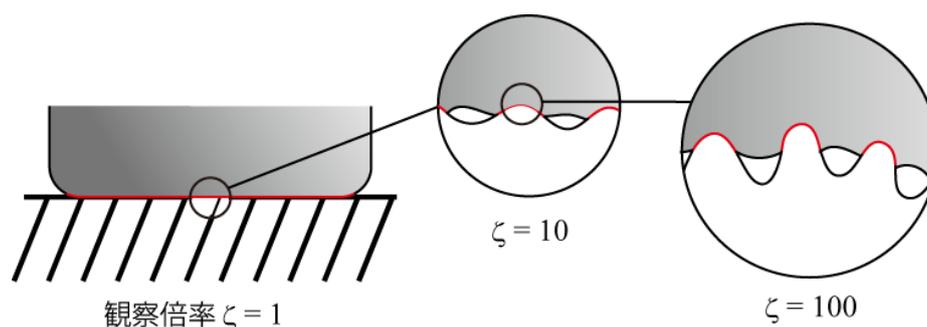


Fig. 4-2 Elastic contact between a flat rubber surface and a hard solid substrate.

ゴムブロックと路面の接触において、 A_0 を公称接触領域（倍率 $\zeta = 1$ での見かけの接触領域）とすると、全荷重 F_N は次式のように表される。

$$F_N = \sigma_0 A_0,$$

ここで、 σ_0 は公称垂直応力である。長さスケール $\lambda = L/\zeta$ を考える。ここで、 L は公称接触領域の直径である。 $q_0 = 2\pi/L$ と定義すると、 $q = q_0\zeta$ より、

$$P(q) = P(q_0\zeta) \equiv P(\zeta).$$

倍率 ζ における見かけの接触領域の平均垂直応力を $\langle\sigma\rangle_\zeta$ と書けば、全荷重は常に一定であるので、

$$\sigma_0 A_0 = \langle\sigma\rangle_\zeta P(\zeta) A_0.$$

よって、

$$P(\zeta) = \frac{\sigma_0}{\langle\sigma\rangle_\zeta}. \quad (4-2)$$

したがって、 $P(\zeta)$ を求めるためには、まず $\langle\sigma\rangle_\zeta$ を求めなければならない。長さスケール $\lambda = L/\zeta$ での応力の確率分布を $P(\sigma, \zeta)$ と書けば、

$$\langle\sigma\rangle_\zeta = \frac{\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta)}{\int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta)}. \quad (4-3)$$

よって、式(4-3)を式(4-2)に代入して、

$$P(\zeta) = \frac{\sigma_0 \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta)}{\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta)}. \quad (4-4)$$

あるスケールにおいて、見かけ上の接触領域ではゴムと路面は完全に接触していると仮定すると、

$$P(\sigma, \zeta) = \langle\delta(\sigma - \sigma_1(\mathbf{x}))\rangle,$$

ここで、 $\sigma_1(\mathbf{x})$ は倍率 ζ でかかる垂直応力である。 $\langle\dots\rangle$ はアンサンブル平均を表し、次式のよう定義される。

$$\langle f(x) \rangle = \frac{1}{A_0} \int d^2x f(x).$$

$\sigma_1 + \Delta\sigma$ を、長さスケール $L/(\zeta + \Delta\zeta)$ における垂直応力とすると、

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \zeta + \Delta\zeta) &= \langle \delta(\sigma - \sigma_1 - \Delta\sigma) \rangle \\
&= \int d\sigma' \langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \delta(\sigma - \sigma_1 - \sigma') \rangle \\
&= \int d\sigma' \langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle P(\sigma - \sigma', \zeta),
\end{aligned}$$

ここで,

$$\langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int dw \langle e^{iw(\sigma' - \Delta\sigma)} \rangle.$$

右辺を $\Delta\sigma = 0$ の周りでテイラー展開すると,

$$\begin{aligned}
\langle \delta(\sigma' - \Delta\sigma) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int dw \left\langle e^{iw\sigma'} \left(1 - iw\Delta\sigma - \frac{w^2}{2} \Delta\sigma^2 + \dots \right) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \int dw e^{iw\sigma'} \left(1 - \frac{w^2 \langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \right),
\end{aligned}$$

ただし, 虚数項と3次以上の微小項は無視した. よって,

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \zeta + \Delta\zeta) &= \int d\sigma' P(\sigma - \sigma', \zeta) \frac{1}{2\pi} \int dw e^{iw\sigma'} \left(1 - \frac{w^2 \langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \right) \\
&= \int d\sigma' P(\sigma - \sigma', \zeta) \left[\delta(\sigma') + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \sigma'^2} \delta(\sigma') \langle \Delta\sigma^2 \rangle \right] \\
&= P(\sigma, \zeta) + \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2}.
\end{aligned}$$

左辺を $\Delta\zeta = 0$ の周りでテイラー展開すれば, 次式が得られる. ただし, 2次以上の微小項は無視する.

$$\begin{aligned}
P(\sigma, \zeta) + \frac{\partial P(\sigma, \zeta)}{\partial \zeta} \Delta\zeta &= P(\sigma, \zeta) + \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{2} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial P(\sigma, \zeta)}{\partial \zeta} &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{\Delta\zeta} \frac{\partial^2 P(\sigma, \zeta)}{\partial \sigma^2}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}, \quad (4-5)$$

ここで,

$$f(\zeta) = \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta\sigma^2 \rangle}{\Delta\zeta}.$$

$P(\sigma, 1) = P_0(\sigma)$ とおくと,

$$P_0(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0).$$

式(4-5)は拡散型の方程式である. 一般的な拡散方程式における時間項は倍率 ζ に, 空間座標は垂直応力 σ に置き換えられている. よって, 倍率 ζ を上げていく(より小さいスケールを見ていく) と, $P(\sigma, \zeta)$ は σ 空間でより広がっていく. 表面間の凝着は無いという仮定では, $\sigma = 0$ で剥離が起こるので, 境界条件は次のようになる.

$$P(0, \zeta) = 0.$$

式(4-5)の両辺に σ をかけて, σ にわたって積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\sigma \sigma \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \int_0^\infty d\sigma \sigma f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta) = 0.$$

ζ で積分して,

$$\int_0^\infty d\sigma \sigma P(\sigma, \zeta) = \sigma_0, \quad (4-6)$$

ただし, 総荷重はあらゆるスケールで不変という仮定を用いた.

次に式(4-5)を σ にわたって積分すると,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\sigma \frac{\partial P}{\partial \zeta} &= \int_0^\infty d\sigma f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) &= f(\zeta) \left\{ \frac{\partial P(\infty, \zeta)}{\partial \sigma} - \frac{\partial P(0, \zeta)}{\partial \sigma} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) &= -f(\zeta) \frac{\partial P(0, \zeta)}{\partial \sigma}. \end{aligned}$$

ζ で積分して,

$$\begin{aligned} \left[\int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta') \right]_1^\zeta &= - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} \\ \Leftrightarrow \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) - \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, 1) &= - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma} \\ \Leftrightarrow \int_0^\infty d\sigma P(\sigma, \zeta) &= 1 - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma}. \end{aligned} \quad (4-7)$$

式(4-4)に式(4-6)と式(4-7)を代入して,

$$P(\zeta) = 1 - \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma}. \quad (4-8)$$

次に, $\langle \Delta \sigma^2 \rangle$ を計算する.

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^2 \rangle &= \frac{1}{A_0} \int d^2x \sigma_z(\mathbf{x}) \sigma_z(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{A_0} \int d^2x \sigma_z(\mathbf{x}) \int d^2q \sigma_z(\mathbf{q}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} \\ &= \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2q \sigma_z(-\mathbf{q}) \sigma_z(\mathbf{q}) \\ &= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} \frac{(2\pi)^2}{A_0} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ u_z(\mathbf{q}) &\rightarrow h(\mathbf{q}) \text{とすれば,} \\ &= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} \frac{(2\pi)^2}{A_0} \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle \\ &= \int d^2q [M_{zz}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_x v)]^{-1} [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\mathbf{q}_x v)]^{-1} C(q), \end{aligned}$$

ここで, M_{zz} は次式で表される.

$$(M_{zz})^{-1} = -\frac{Eq}{2(1-\nu^2)}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \langle \sigma_z^2 \rangle &= \frac{1}{4} \int d^2q q^2 C(q) \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{1-\nu^2} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4} \int dq q^3 C(q) \int d\phi \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{1-\nu^2} \right|^2. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned} f(\zeta) &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta \sigma^2 \rangle}{\Delta \zeta} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\langle \Delta \sigma^2 \rangle}{\Delta q} q_0 \quad (\because q = q_0 \zeta) \\ &= \frac{1}{8} q_0 q^3 C(q) \int d\phi \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{1-\nu^2} \right|^2. \end{aligned}$$

新たに $f(\zeta) = f(q)$ と置き, $g(q) = f(q)/\sigma_0^2$ とすると,

$$g(q) = \frac{1}{8} q_0 q^3 C(q) \int d\phi \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0} \right|^2. \quad (4-9)$$

ここからは, 式(4-5)を解くことを考える. 式(4-5)を再掲すると,

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = f(\zeta) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}. \quad (4-5)$$

境界条件は,

$$P(0, \zeta) = P(\sigma_Y, \zeta) = 0, \quad (4-10)$$

$$P(\sigma, 1) \equiv P_0(\sigma) = \delta(\sigma - \sigma_0). \quad (4-11)$$

ここでは, 一般的な条件を設定し, $P(\sigma, \zeta)$ は $0 < \sigma < \sigma_Y$ でのみ定義されるとした. 後に, $\sigma_Y \rightarrow \infty$ とすることで最終的な解を導く. 式(4-5)の一般解は次のように表される.

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\zeta) \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right). \quad (4-12)$$

式(4-12)を式(4-5)に代入して,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial A_n}{\partial \zeta} \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[-f(\zeta) \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 A_n \sin\left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y}\right) \right] \\ \Leftrightarrow \frac{dA_n}{d\zeta} &= -f(\zeta) \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 A_n. \end{aligned}$$

ζ で積分して,

$$A_n(\zeta) = C \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta')\right] \quad (C = \text{const.}).$$

$\zeta = 1$ を代入すれば,

$$C = A_n(1).$$

よって,

$$A_n(\zeta) = A_n(1) \exp\left[-\left(\frac{n\pi}{\sigma_Y}\right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta')\right].$$

式(4-12)に代入して,

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(1) \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right). \quad (4-13)$$

三角関数の直交性より、次の等式が成り立つ。

$$\int_0^{\sigma_Y} d\sigma \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \sin \left(\frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) = \frac{\sigma_Y}{2} \delta_{nm}, \quad (4-14)$$

ここで、 n, m は自然数とする。式(4-12)の両辺に $\sin(m\pi\sigma/\sigma_Y)$ をかけて、 $0 \sim \sigma_Y$ まで積分すると、

$$\begin{aligned} & \int_0^{\sigma_Y} d\sigma P \sin \left(\frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n(1) \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \int_0^{\sigma_Y} d\sigma \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \sin \left(\frac{m\pi\sigma}{\sigma_Y} \right). \end{aligned}$$

式(4-14)を用いると、

$$\int_0^{\sigma_Y} d\sigma P \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) = A_n(1) \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \frac{\sigma_Y}{2}.$$

さらに、 $\zeta = 1$ を代入すれば、

$$\begin{aligned} A_n(1) &= \frac{2}{\sigma_Y} \int_0^{\sigma_Y} d\sigma P(\sigma, 1) \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \frac{2}{\sigma_Y} \int_0^{\sigma_Y} d\sigma \delta(\sigma - \sigma_0) \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right) \\ &= \frac{2}{\sigma_Y} \sin \alpha_n, \end{aligned} \quad (4-15)$$

ただし、

$$\alpha_n = \frac{n\pi\sigma_0}{\sigma_Y} \equiv s\sigma_0. \quad (4-16)$$

式(4-15)を式(4-13)に代入して、

$$P = \frac{2}{\sigma_Y} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \alpha_n \exp \left[- \left(\frac{n\pi}{\sigma_Y} \right)^2 \int_1^{\zeta} d\zeta' f(\zeta') \right] \sin \left(\frac{n\pi\sigma}{\sigma_Y} \right). \quad (4-17)$$

極限 $\sigma_Y \rightarrow \infty$ をとると、

$$\sum_n \rightarrow \int_0^\infty dn = \frac{\sigma_Y}{\pi} \int_0^\infty ds \quad \left(\because s = \frac{n\pi}{\sigma_Y} \right).$$

よって、式(4-17)は次のようになる.

$$P = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \sin(s\sigma_0) \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right] \sin(s\sigma), \quad (4-18)$$

ここで、次に示す J を考える.

$$J = \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \frac{\partial P(0, \zeta')}{\partial \sigma},$$

ただし、式(4-8)より、 $P(\zeta) = 1 - J$ である. 式(4-18)より、

$$\frac{\partial P(\sigma, \zeta')}{\partial \sigma} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta'' f(\zeta'')\right] \cos(s\sigma).$$

よって、

$$J = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \exp\left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'')\right], \quad (4-19)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta') \exp\left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'')\right] &= \left[-\frac{1}{s^2} \exp\left[-s^2 \int_1^{\zeta'} d\zeta'' f(\zeta'')\right] \right]_1^\zeta \\ &= \frac{1}{s^2} \left(1 - \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right] \right). \end{aligned}$$

式(4-19)に代入して、

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds s \sin(s\sigma_0) \frac{1}{s^2} \left(1 - \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right] \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right] \\ &= 1 - \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right], \end{aligned}$$

ただし、

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} = 1,$$

という関係式を用いた. よって、

$$\begin{aligned} P(\zeta) &= 1 - J \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\sin(s\sigma_0)}{s} \exp\left[-s^2 \int_1^\zeta d\zeta' f(\zeta')\right]. \end{aligned}$$

$s\sigma_0 = x$ と置き換えると、

$$P(\zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \exp\left[-x^2 \int_1^\zeta d\zeta' g(\zeta')\right], \quad (4-20)$$

ただし, $g(q) = g(q_0\zeta) \equiv g(\zeta)$ であり, 式(4-9)によって与えられる. まとめると,

$$P(q) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \frac{\sin x}{x} \exp\left[-x^2 G(q)\right], \quad (4-21)$$

ただし, 式(4-9)より,

$$G(q) = \frac{1}{8} \int_{q_0}^q dq' q'^3 C(q') \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(q'v \cos \phi)}{(1-\nu^2)\sigma_0} \right|^2 \quad (4-22)$$

さらに, ほとんどの場合, $\sigma_0 \ll E(0)$ であり, この場合 $G(q) \gg 1$ となり, 式(4-21)の積分範囲の内 $x \ll 1$ の部分の寄与のみが計算結果に影響する. よって, $\sin x \approx x$ と近似することができ, 次の式が成り立つ.

$$\begin{aligned} P(q) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dx \exp[-x^2 G(q)] \\ &= [\pi G(q)]^{-1/2} \quad (\because \text{ガウス積分}) \end{aligned} \quad (4-23)$$

このとき, $P(q) \sim \sigma_0$ が成り立つので, 4.2.2 項で導出する摩擦係数の式と合わせると, 摩擦係数が公称垂直応力 σ_0 に依存しないことがわかる. さらに, $G(q) \rightarrow 0$ のとき $P(q) \rightarrow 1$ を考慮すると, 補間公式より, 次の近似式が成り立つ.

$$P(q) = \left(1 + [\pi G(q)]^{3/2}\right)^{-1/3}. \quad (4-24)$$

4.2.2 すべり摩擦

本項では Persson の摩擦理論による摩擦係数の導出を説明する。
ゴムブロックが粗い路面上をすべる際の変位場 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ について

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t),$$

と仮定すると,

$$\mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2x dt \mathbf{u}(\mathbf{x} - \mathbf{v}t) e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t)},$$

ここで, $\mathbf{x} - \mathbf{v}t = \mathbf{k}$ とおくと, \mathbf{v} は \mathbf{x} に依存しないため $dk/dx = 1$ より,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^2k dt \mathbf{u}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{k} + i(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v})t} \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q}\cdot\mathbf{v}) \mathbf{u}(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (4-25)$$

Fig. 4-3 より, ゴムと路面間のせん断摩擦力を σ_f とすると, 時間 t_0 の間に摩擦によって散逸するエネルギー ΔE は,

$$\Delta E = \sigma_f A_0 v t_0. \quad (4-26)$$

また, Fig. 4-4 のように ΔE をゴムの変形に使われたエネルギーとして表すと,

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int d^2x dt \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int d^2x dt \left[\frac{d}{dt} \int d^2q d\omega \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \right] \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \\ &= \int d^2q d\omega (-i\omega) \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) \left[\int d^2x dt \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} - \omega t)} \right] \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) \mathbf{u}(\mathbf{q}, \omega) \cdot \boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{q}, -\omega), \end{aligned} \quad (4-27)$$

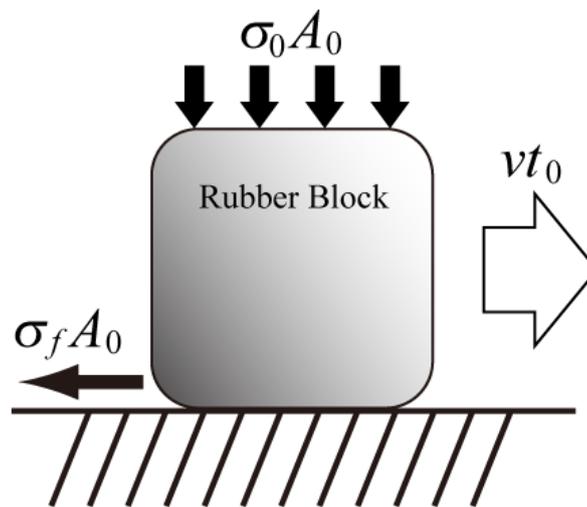


Fig. 4-3 The energy dissipated during the time period t_0 (macro).

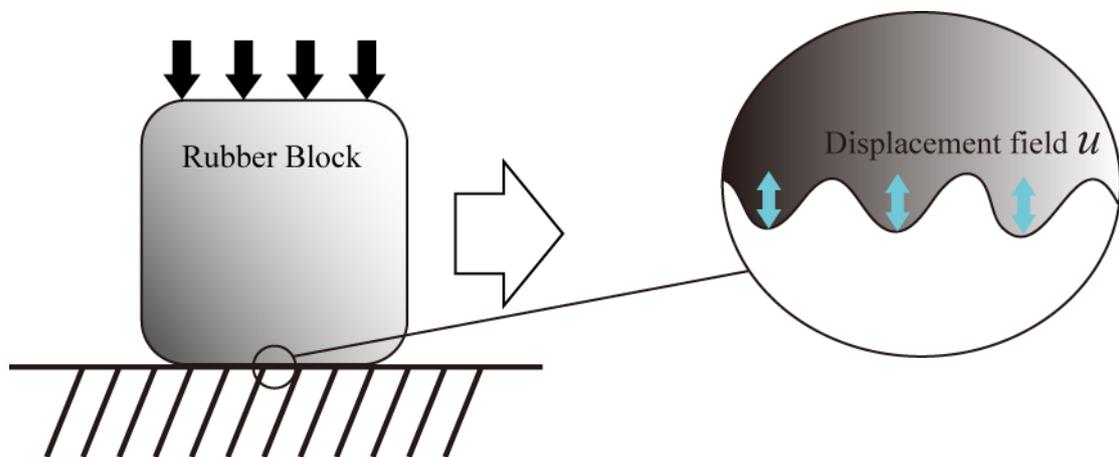


Fig. 4-4 The energy dissipated during time period t_0 (micro).

ここで,

$$u_z(\mathbf{q}, \omega) = M_{zz}(\mathbf{q}, \omega) \sigma_z(\mathbf{q}, \omega),$$

より,

$$\sigma_z(-\mathbf{q}, -\omega) = [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(-\mathbf{q}, -\omega).$$

式(4-27)に代入して, 式(4-25)を用いると,

$$\begin{aligned} \Delta E &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) u_z(\mathbf{q}, \omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(-\mathbf{q}, -\omega) \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \delta(-\omega + \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= (2\pi)^3 \int d^2q d\omega (-i\omega) [\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})]^2 [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}), \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} [\delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v})]^2 &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \delta(0) \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \\ &= \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{t_0}{2}}^{\frac{t_0}{2}} dt \\ &= \frac{t_0}{2\pi} \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}), \end{aligned}$$

という関係式を用いると,

$$\begin{aligned} \Delta E &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2q d\omega (-i\omega) \delta(\omega - \mathbf{q} \cdot \mathbf{v}) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (4-28)$$

式(4-28)と式(4-26)を比較して,

$$\begin{aligned} \sigma_f A_0 v t &= (2\pi)^2 t_0 \int d^2q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ \Leftrightarrow \sigma_f &= \frac{(2\pi)^2}{v A_0} \int d^2q (-i\omega) [M_{zz}(-\mathbf{q}, -\omega)]^{-1} \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle, \end{aligned} \quad (4-29)$$

ここで, $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表し,

$$\begin{aligned} \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle &= \frac{1}{A_0} \int d^2x u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \\ &= u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}), \end{aligned}$$

という関係を用いた. さらに, ゴムがx方向にすべるとすれば, $\omega = vq_x$ と書けるので,

$$\sigma_f = -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \langle u_z(\mathbf{q}) u_z(-\mathbf{q}) \rangle [M_{zz}(-\mathbf{q}, -q_x v)]^{-1}. \quad (4-30)$$

路面の表面プロファイルは次のように記述される.

$$z = h(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} = (x, y)).$$

ゴムが路面上をすべる際、路面の表面プロファイルに完全に追従するとすれば、

$$u_z \simeq h(\mathbf{x}),$$

と書けるので、式(4-30)は次のように表される.

$$\sigma_f = -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle [M_{zz}(-\mathbf{q}, -q_x v)]^{-1}. \quad (4-31)$$

今、路面の表面粗さパワースペクトルは次のように定義される.

$$C(q) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^2 x \langle h(\mathbf{x}) h(\mathbf{0}) \rangle e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}. \quad (4-32)$$

さらに、 $\langle h(\mathbf{x}) h'(\mathbf{x}') \rangle$ が $\mathbf{x} - \mathbf{x}'$ のみに依存することをを用いると、次の関係式が得られる.

$$\langle h(\mathbf{q}) h(-\mathbf{q}) \rangle = \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q). \quad (4-33)$$

式(4-33)と M_{zz} を式(4-31)に代入すれば、

$$\begin{aligned} \sigma_f &= -i \frac{(2\pi)^2}{A_0} \int d^2 q q_x \frac{A_0}{(2\pi)^2} C(q) \left[-\frac{2(1-\nu^2)}{E(-\omega)q} \right]^{-1} \\ &= i \frac{1}{2} \int d^2 q q^2 \cos \phi C(q) \frac{E(-\omega)}{1-\nu^2} \\ &= \frac{1}{2} \int d^2 q q^2 \cos \phi C(q) \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{1-\nu^2}. \end{aligned} \quad (4-34)$$

$q_x = q \cos \phi$, $E = E(\omega) = E(qv \cos \phi)$ である. 厳密には ν も周波数に依存するが、その依存度は無視できるほど小さい.

Amontons-Coulomb の法則より、摩擦係数 μ を $\mu = \sigma_f / \sigma_0$ と定義すると、

$$\mu = \frac{1}{2} \int d^2 q q^2 \cos \phi C(q) P(q) \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{(1-\nu^2) \sigma_0}, \quad (4-35)$$

ここで、4.2.1 項で導出した真実接触領域の割合 $P(q)$ を導入した。さらに、波数空間において直交座標から極座標への座標変換を考えると (2.1.2 項参照)、式(4-35)は次のように表される。

$$\mu = \frac{1}{2} \int dq q^3 C(q) P(q) \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{(1 - v^2)\sigma_0}. \quad (4-36)$$

5 摩擦試験

5.1 路面サンプルの表面粗さパワースペクトル

5.1.1 路面サンプル

本研究の摩擦試験では，路面サンプルとして Fig. 5-1 に示す 3M 社製すべり止めテープ「セーフティ・ウォーク（タイプ B）[®]」を用いる．以降，単に「路面」と称する．



Fig. 5-1 Surface sample.

5.1.2 表面高さデータ測定

路面サンプルの表面粗さパワースペクトルを得るため、まず、路面凹凸の高さデータを測定する必要がある。本研究では、Fig. 5-2 に示すマクロスコープ (KEYENCE VR-3100) およびレーザー顕微鏡 (KEYENCE VK-9500) を用いて測定を行った。Table 5-1 に測定条件を示す。マクロスコープにおいては、測定倍率 40 倍で測定を行った。レーザー顕微鏡においては、10 倍と 100 倍の 2 種の対物レンズを用い、測定倍率 200 倍と 2000 倍で測定を行った。本測定では、3 種の測定倍率により、 $10^3 < q < 10^7$ [1/m] の波数範囲 ($10^{-3} < \lambda < 10^{-7}$ [m] の波長範囲) の表面粗さパワースペクトルを得る。



(a)



(b)

Fig. 5-2 Means for observing surface; (a) Macroscope, (b) Laser microscope.

Table 5-1 Conditions of the measurements for surface height.

Measuring machine	Macroscope (KEYENCE VR-3100)	Laser microscope (KEYENCE VK-9500)
Observed area	15.161 × 15.161 [mm ²] (× 40)	2.849 × 2.849 [mm ²] (× 200)
		0.281 × 0.281 [mm ²] (× 2000)
Points	2048 × 2048	2048 × 2048

5.1.3 表面粗さパワースペクトルの計算

マクロスコープおよびレーザー顕微鏡で測定した表面高さデータから、路面の表面粗さパワースペクトルを計算した。路面のパワースペクトルを Fig. 5-3 に示す。横軸は波数 q 、縦軸はパワースペクトル $C(q)$ である。ただし、マクロスコープの測定において、データを取得できなかった欠損点が全測定点に対して0.23%の割合で発生したため、欠損点を高さ $h = 0$ [μm]の点として計算を行った。また、実表面の表面粗さパワースペクトルにばらつきが存在するため、 $C(q)$ を求める際、波数 q に対する平均化処理を行った。さらに、各測定倍率において測定のノイズの影響が出ていると考えられる高波数側のデータはカットした。

Fig. 5-3 に示されるように、路面のパワースペクトルは低波数側での水平部分と高波数側での傾斜部分がそれぞれほぼ直線で得られており、路面表面がセルフアフィンフラクタル性を有することが分かる (Fig. 2-1 参照)。得られたパワースペクトルより、6章以降で説明する摩擦理論を計算する上で必要となるハースト指数 H 、カットオフ波数 q_0 、および路面の表面粗さ h_0 を以下のように求める。求められたパラメータを Table 5-2 に示す。

(i) ハースト指数 H

高波数側の傾斜部分を $\log C(q) > 4.00$ [m^{-1}]の領域で直線近似し、対応する傾き a を得る。ハースト指数 H を用いることで傾きは $a = -2(H + 1)$ で表されるため、 $H = -(a/2 + 1)$ より H が得られる。

(ii) カットオフ波数 q_0

$\log C(q) < 3.55$ [m^{-1}]の領域での $C(q)$ の平均値を求め、低波数側の水平部分の高さとする。 H を求める際の傾斜部分の近似された直線が水平部分の高さと一致する (交差する) 点を計算し、その点の波数より q_0 が得られる。このとき、水平部分の高さが $C(q_0)$ として表される。

(iii) 路面の表面粗さ h_0

h_0 は、 $\langle h^2 \rangle = h_0^2/2$ と定義され、路面の表面粗さに対応する。ハースト指数 H 、波数 q 、および路面の表面粗さ h_0 の間には式(2-13)の関係が成立する。よって、 $q = q_0$ において h_0 は以下のように表せる。

$$h_0 = \sqrt{\frac{2\pi}{H} q_0^2 C(q_0)}$$

以上より、求めた H 、 q_0 および $C(q_0)$ から h_0 が計算される。

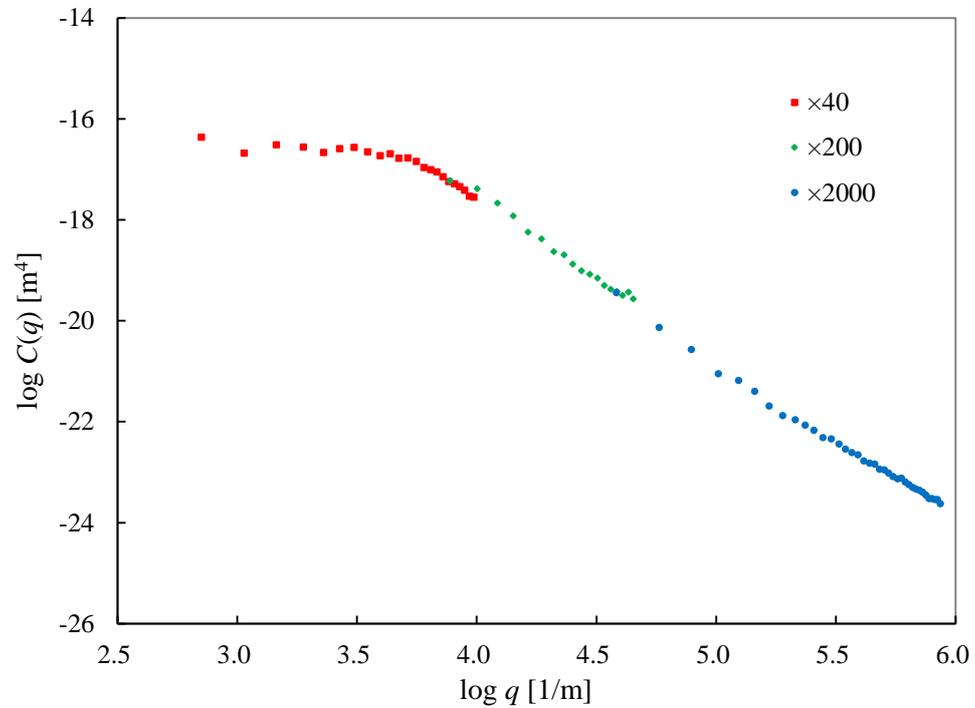


Fig. 5-3 The surface roughness power spectrum of the surface sample.

Table 5-2 Surface properties.

Road specimen	Safety-Walk type B (Sumitomo 3M Limited)
H	0.63069
q_0 [1/m]	5070.0
h_0 [μm]	82.8859

5.2 ゴムサンプルの力学的特性

5.2.1 ゴムサンプル

本研究の摩擦試験で用いるゴムサンプルは、Table 5-3 に示す配合により作成されたカーボンプラック充填スチレンブタジエンゴムである。ここで、Table 5-3 における phr はゴム重量 100 に対する各種配合剤の重量部を示す[64]。5.2.2 項および 5.2.3 項に示す周波数依存データおよびひずみ依存データは、ねじりせん断試験により測定された。得られた横弾性係数 G に対し、等方性材料の性質である $E = 2(1 + \nu)G$ の関係式より $\nu = 0.49$ を用いて変換し、複素弾性率 E' および E'' を計算した。

ゴムサンプル用の材料およびその組成情報の提供、動的粘弾性試験の実施、複素弾性率の一般化 Maxwell モデルへの初期フィッティングは株式会社ブリヂストンの協力によって行われた。

Table 5-3 Test piece properties.

Diameter [mm]	40
SBR [phr]	100
Carbon black [phr]	70
Softener [phr]	40
Sulfur [phr]	1.5
Others	Age inhibitor, Rubber accelerator, etc.

5.2.2 周波数依存性

本項では、ゴムサンプルの周波数依存性について説明する。周波数依存データの計測は、複数の温度条件および周波数 $f(= \omega/2\pi)$ のもとひずみ $\varepsilon = 0.1\%$ を負荷し実施された。異なる温度水準における結果に対し、温度-時間換算則である Williams-Landel-Ferry 式（以下、単に WLF 式と称する）を用いてマスターカーブを作成した。ここで WLF 式による移動因子 a_T は、温度 T の関数として、

$$\log a_T = \frac{-C_1(T - T_S)}{C_2 + (T - T_S)} \quad (5-1)$$

で表され、設定温度 T から基準温度 T_S へのシフト量を意味する[65]。本研究では $T_S = 25^\circ\text{C}$ とし、このとき $C_1 = 10.36$ および $C_2 = 144.5$ となる。WLF 式により周波数 f をシフトして重ね合わせ、周波数範囲 $1.0 \times 10^{-1} \sim 1.0 \times 10^8$ [Hz]での複素弾性率を算出した。以上より得られた複素弾性率を Fig. 5-4 に示す。なお、図中の実線は実験データの補間結果であり、内挿にスプライン補間を、外挿に線形補間を採用している。Fig. 5-4 に示されるように、貯蔵弾性率は周波数と共に増加していくが、損失弾性率は $f \approx 10^6$ [Hz]付近で最大値を示し減少していく。損失正接は $f \approx 10^5$ [Hz]付近でピークを示す。

また、一般化 Maxwell モデルを用い測定値のフィッティングを行った。35 要素 Maxwell を用い、得られた材料パラメータは Table 5-4 のとおりである。この材料パラメータを用いたフィッティング結果を Fig. 5-5 に示す。Fig. 5-5 の拡大図である Fig. 5-6 からわかるように、測定値に対し良いフィッティングが得られている。

測定値を補間した Fig. 5-4 においては、線形補間の性質上、貯蔵弾性率は単調増加し、低周波数および高周波数域で非ゼロの値に漸近することはない。しかし、一般化 Maxwell モデルでは、低周波数側では $E_0 = 25.4$ [MPa]に、高周波数側では $\sum_{i=0}^{35} E_i = 1.76$ [GPa]に収束し、一定値を示す。また、一般化 Maxwell モデルにより表現される損失弾性率は、補間した場合と異なり、測定周波数域以外では急激な減少に転じていることがわかる。

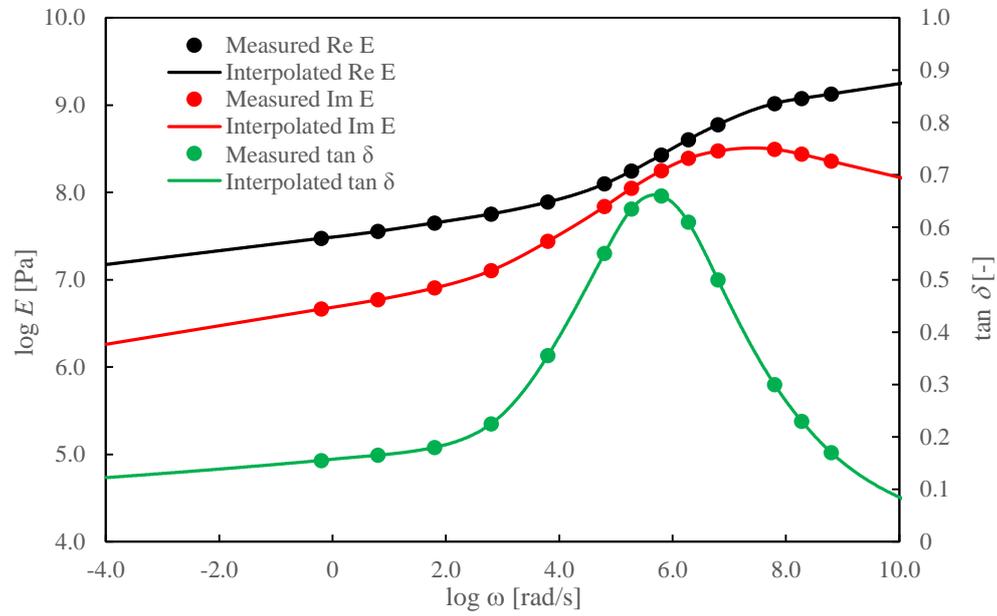


Fig. 5-4 The complex modulus of elasticity as a function of frequency.

Table 5-4 Fitted material parameters with a 35-term generalized Maxwell model.

Element Number i	E_i [Pa]	Z_i [s]
0	2.54E+07	—
1	3.48E+04	4.84E-01
2	7.09E+04	3.96E-01
3	7.31E+04	4.51E-01
4	7.72E+04	4.36E-01
5	8.59E+04	4.39E-01
6	1.07E+05	3.84E-01
7	1.42E+05	3.84E-01
8	5.28E+05	4.62E-01
9	5.69E+05	4.67E-01
10	8.49E+05	4.93E-01
11	8.81E+05	5.12E-01
12	8.89E+05	5.83E-01
13	2.86E+06	7.67E-02
14	3.23E+06	7.38E-02
15	4.20E+06	1.35E-03
16	5.02E+06	8.25E-03
17	5.50E+06	1.13E+00
18	5.90E+06	2.13E-02
19	6.40E+06	2.87E-03
20	7.40E+06	2.16E-04
21	1.20E+07	4.74E-04
22	2.26E+07	2.68E-05
23	2.36E+07	1.32E-08
24	2.41E+07	7.07E-05
25	3.23E+07	9.06E-06
26	7.07E+07	1.59E-09
27	7.09E+07	3.91E-06
28	8.00E+07	6.62E-07
29	9.06E+07	1.59E-09
30	9.56E+07	1.39E-06
31	1.63E+08	3.38E-07
32	1.70E+08	1.33E-07
33	2.70E+08	1.59E-09
34	2.77E+08	4.59E-08
35	2.82E+08	1.32E-08

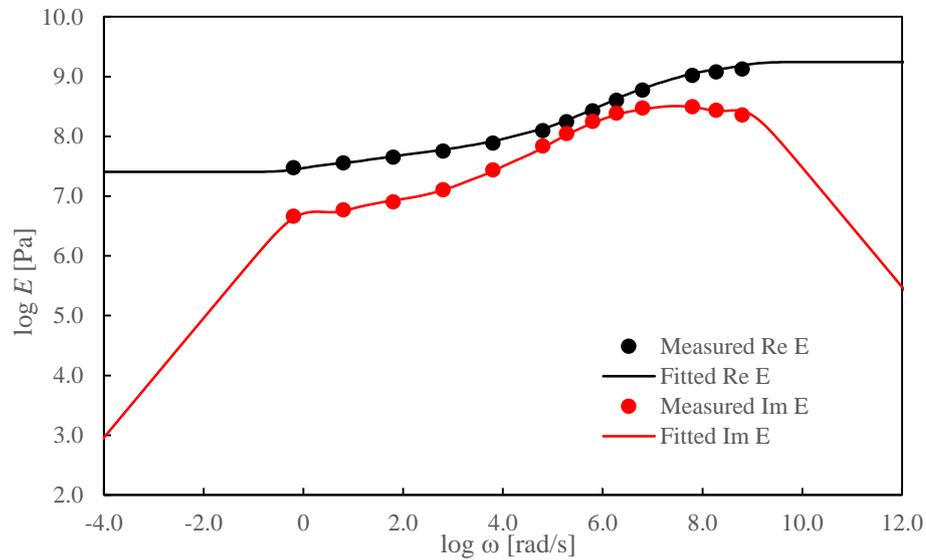


Fig. 5-5 Fitting results of generalized Maxwell model for frequency dependence.

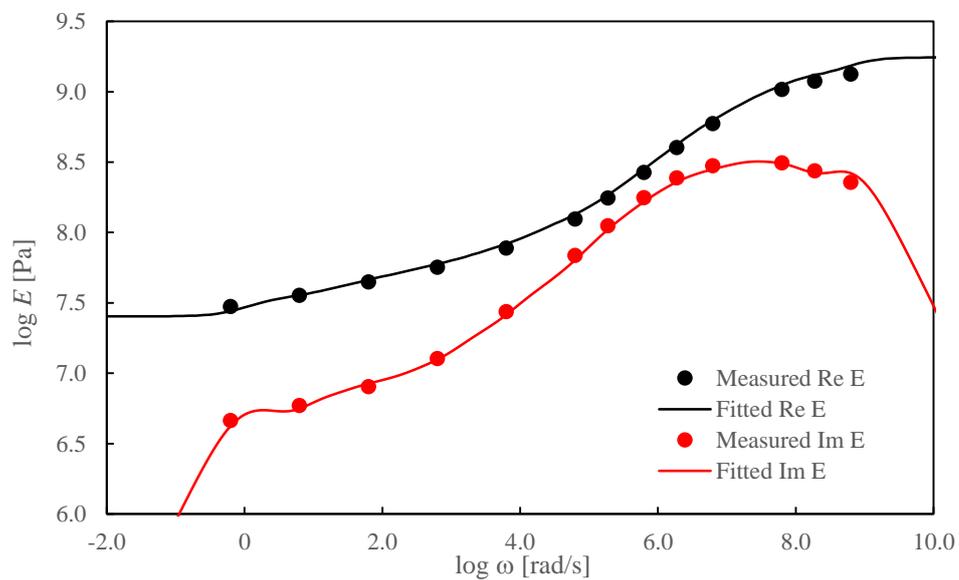


Fig. 5-6 Enlarged view of Fig. 5-5.

5.2.3 ひずみ依存性

本研究で用いるゴムサンプルに対し、周波数 $f = 10$ [Hz]のもとひずみ範囲0.1~50 [%]での複素弾性率を測定した。5.2.2 項で示した周波数依存特性は、 $\varepsilon = 0.1$ [%]におけるデータであるため、本項で示すひずみ依存データの $\varepsilon = 0.1$ [%]における複素弾性率と、周波数依存データの $f = 10$ [Hz]における複素弾性率は等しくなるはずである。しかし、実験誤差などに起因して、周波数依存データとひずみ依存データでは $f = 10$ [Hz]かつ $\varepsilon = 0.1$ [%]での複素弾性率が乖離した値を示した。そこで、本研究では、整合性を保つためひずみ依存データを周波数依存データと一致するように正規化した。正規化された複素弾性率を Fig. 5-7 に示す。図中の実線は、Fig. 5-4 同様、内挿にスプライン補間を、外挿に線形補間を用いた場合の補間結果を示している。貯蔵弾性率は、0.5%程度のひずみ域まではひずみに対する感度が低いが、その後大きな減少に転じている。一方、損失弾性率は、小ひずみ側ではほぼ一定の値を示すが、ひずみ 1%付近で最大値に達し、その後減少していく傾向にある。また、損失正接は、5%のひずみでピークを示し、より大きいひずみ領域では減少していくことから、大ひずみ側では、損失弾性率が貯蔵弾性率より大きな低減率を有することがわかる。

次に、測定値に対する Kraus モデルの適用について述べる。フィッティングの結果、Table 5-5 に示す材料パラメータを得た。このパラメータに基づく Kraus モデルの複素弾性率を Fig. 5-8 に示す。貯蔵弾性率は、微小ひずみ域で $E'_0 = 54.6$ [MPa]に、大ひずみ域で $E'_\infty = 7.48$ [MPa]に収束していく。3.3.1 項で述べたように、貯蔵弾性率は、ひずみが増大すると一定の値に漸近していく傾向を示すことが知られており、単なる補間では再現できなかったこの挙動を Kraus モデルは表現していることがわかる。また、損失弾性率は、 $\varepsilon_c = 0.824$ [%]で最大値を取り、 ε_c より大きいひずみ域では減少していく。そのとき、減少率は測定値より小さく評価されている。また、測定では0.1%ひずみと0.2%ひずみはほぼ同一の値を示したが、Kraus モデルでは微小ひずみ領域から ε_c まで損失弾性率は単調増加しており、 $\log_{\varepsilon \rightarrow 0} E'' = E''_\infty = 0$ となっている。

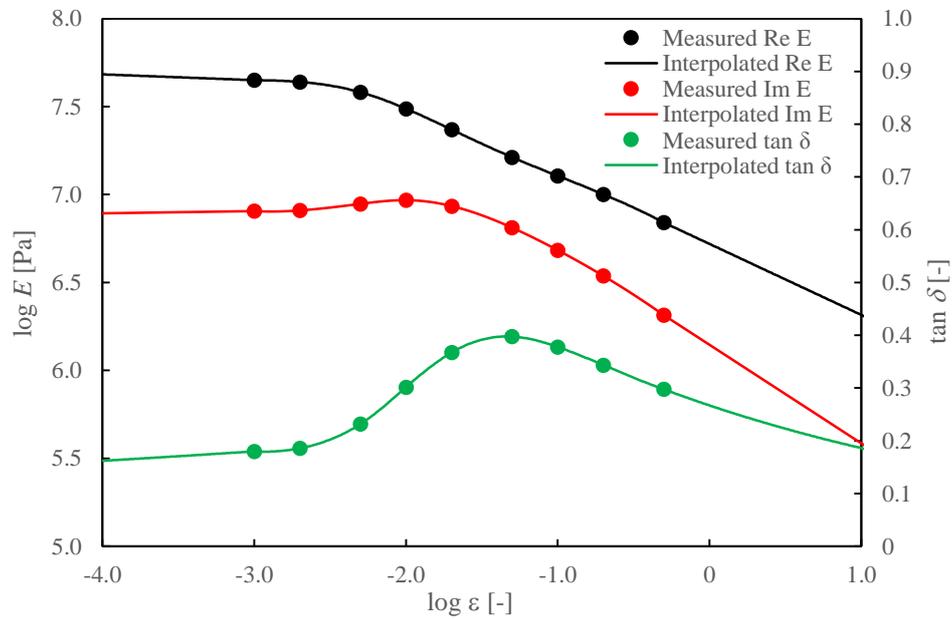


Fig. 5-7 The complex modulus of elasticity as a function of strain.

Table 5-5 Fitted material parameters with a Kraus model.

E'_{∞} [MPa]	7.48
E'_0 [MPa]	54.6
E''_{∞} [MPa]	0
E''_m [MPa]	9.11
ε_c [%]	0.824
m	0.455

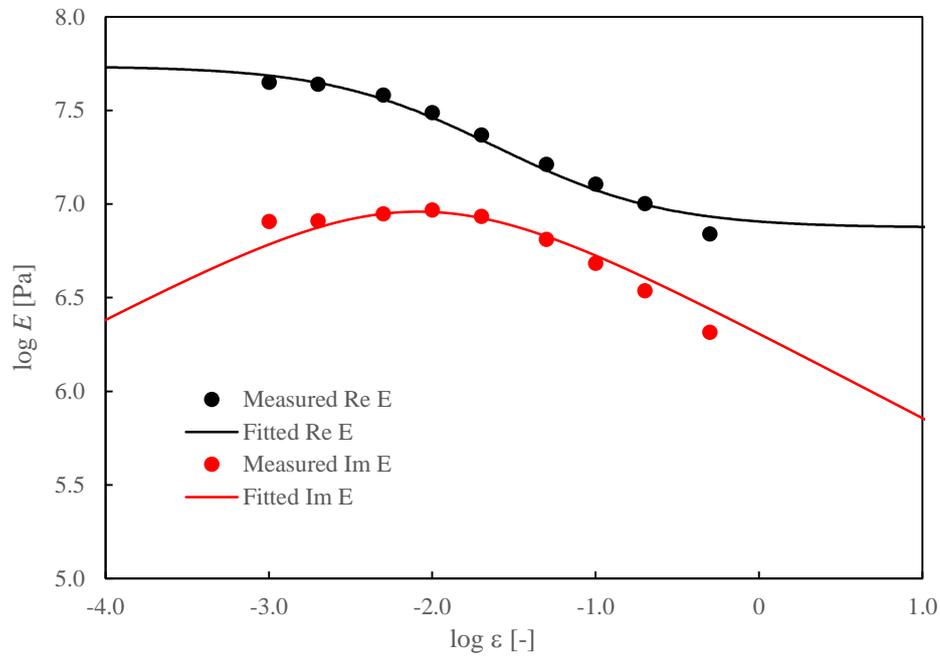


Fig. 5-8 Fitting results of Kraus model for strain dependence.

5.2.4 非線形粘弾性

本項では、上述した周波数依存性およびひずみ依存性に基づき拡張 Maxwell モデルを用いて得られる非線形粘弾性挙動について説明する。まず、測定された 1 組ずつの周波数依存性（ひずみ $\varepsilon = 0.1$ [%]）およびひずみ依存データ（周波数 $f = 10$ [Hz]）に対し拡張 Maxwell モデルのフィッティングを実施した（フィッティングの指針については付録 B を参照されたい）。Maxwell 要素数は $n = 24$ であり、フィッティングにより得られた材料パラメータは、Table 5-6 に示すとおりである。

周波数依存性に対する結果を Fig. 5-9 に示し、Fig. 5-10 は Fig. 5-9 の拡大図を示す。Fig. 5-9 に示されるように、測定値より低い周波数域では損失弾性率の振動が観察されるが、Fig. 5-10 より測定値自体には比較的良いフィッティングが得られていることがわかる。ここで、一般化 Maxwell モデルと挙動の比較を行うと、以下のとおりとなる。

(i) 低周波数側での挙動 ($\omega \rightarrow 0$)

ばね定数 E_0 の違いに起因して、一般化 Maxwell モデルの貯蔵弾性率が $E_0 = 25.4$ [MPa] に収束していくのに対し、拡張 Maxwell モデルは $E_0 = 6.93$ [MPa] とより小さい値に漸近していく。また、 $\omega \rightarrow 0$ における損失弾性率は、一般化 Maxwell モデルでは $f = 0.1$ [Hz] 付近で急激な減少に転じるのに対し、拡張 Maxwell モデルでは $f = 5.0 \times 10^{-8}$ [Hz] 付近で急な減少に転じる。

(ii) 高周波数側での挙動 ($\omega \rightarrow \infty$)

$\omega \rightarrow \infty$ における貯蔵弾性率は、両モデルとも 1.5 GPa 前後に収束していく。しかし、一般化 Maxwell モデルの損失弾性率がゼロに転じていくのに対し、拡張 Maxwell モデルでは、

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} E'' = \sum_{i=1}^{24} \frac{\frac{2}{\pi} E_i z_i \varepsilon \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i\right)}{z_i^2 + \left(\frac{2}{\pi} \varepsilon\right)^2 \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i\right) \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i\right)} \Bigg|_{\varepsilon=0.1 [\%]}$$

で計算される 0.181 GPa に収束していきゼロを取らない。

次に、ひずみ依存性に対するフィッティング結果を Fig. 5-11 に示す。示されるように測定値を良く再現しているといえる。特に、Kraus モデルで測定値と乖離が生じた次の点、すなわち、測定点の最小ひずみ $\varepsilon = 0.1$ [%] における損失弾性率、および大ひずみ側での損失弾性率の減少率について、拡張 Maxwell モデルはさらに精度よく一致していることがわかる。

以上より、拡張 Maxwell モデルは測定された周波数依存性およびひずみ依存性を良く再現することが示された。

次に、測定とは異なる条件に対する複素弾性率の挙動について述べる。具体的には、複数の周波数に対するひずみ依存性に注目する。周波数 $f = 0.1, 10, 100$, および 1000 [Hz]とした場合の貯蔵弾性率および損失弾性率を、それぞれ Fig. 5-12 (a)および Fig. 5-12 (b)に示す。貯蔵弾性率は、いずれもひずみの増加に伴い減少していき、特に 100 Hzまでは大ひずみ側で同一の値に漸近しひずみ 100 %付近において $E_0 = 6.93$ [MPa]を取るようになる。しかし、 1000 Hzにおいては、図中のひずみ全域で常に高い貯蔵弾性率を示している。一方、損失弾性率は、各周波数ともに、ひずみ約 1 %まで微増し、その後減少していく様子が観察される。大ひずみ側では、 $0.1 \sim 10$ Hzまでは損失弾性率はほぼ同一の減少率で減少していくのに対し、 100 Hzおよび 1000 Hzではひずみに対する減少率が小さくなっていることがわかる。

このような様々な周波数およびひずみの組み合わせにおける動的粘弾性を把握すべく、角周波数-ひずみ平面における複素弾性率を計算し、その結果を Fig. 5-13 に示す。ここで、Fig. 5-13 (a)が貯蔵弾性率に、Fig. 5-13 (b)が損失弾性率に対応している。ここで、各周波数における微小ひずみから大ひずみ域への弾性率の変化に注目する。約 1000 Hzまでの周波数域では、貯蔵弾性率はひずみが大きくなると $E_0 = 6.93$ [MPa]へ収束しており、 1.0×10^8 Hz以上の周波数域では、約 1.5 GPaから約 100 MPaへ減少していく。図示されるように、 $10^3 \sim 10^8$ Hzまで周波数帯では、貯蔵弾性率の「崖」が存在していることがわかる。また、損失弾性率は、いずれの周波数においてもひずみ 1 %前後を境にひずみの増加に伴って減少する。しかし、周波数依存性において貯蔵弾性率が最大値を示す $f \approx 10^6$ [Hz]付近の周波数帯においては、他の周波数帯と比較してひずみが増加しても弾性率の減少量が小さくなっている。

Table 5-6 Fitted material parameters with a 24-term extended Maxwell model.

Element Number i	E_i [Pa]	Z_i [s]	τ_i [s]	α_i [-]
0	6.93E+06	—	—	—
1	2.56E+04	5.29E+03	4.38E+07	0.95
2	4.10E+04	4.66E+03	4.38E+07	0.93
3	3.01E+05	5.90E+03	4.38E+07	0.84
4	3.25E+05	5.79E-08	1.04E+01	1.00
5	2.08E+06	1.10E+05	7.19E+07	2.95E-03
6	2.78E+06	1.64E+06	5.64E+07	0.53
7	3.67E+06	7.20E+03	8.74E+07	8.37E-03
8	4.62E+06	2.20E+01	4.65E+02	1.00
9	4.65E+06	3.30E+02	9.45E+04	0.44
10	4.89E+06	2.05E-02	2.16E+01	1.00
11	4.94E+06	6.43E-02	3.88E+01	0.99
12	5.22E+06	2.41E-01	5.64E+01	0.97
13	5.43E+06	8.92E-03	1.02E+01	0.99
14	6.47E+06	1.93E+00	1.83E+02	1.00
15	1.20E+07	8.35E-04	5.02E-01	1.00
16	3.45E+07	7.46E-05	2.90E-06	1.00
17	1.01E+08	6.90E-06	4.05E-14	1.00
18	1.86E+08	6.09E-09	2.62E-06	1.00
19	2.14E+08	2.52E-14	3.13E-01	0.84
20	2.51E+08	8.76E-07	1.49E-09	1.00
21	2.63E+08	2.89E-14	1.05E+01	0.94
22	3.21E+08	3.13E-08	5.15E-06	1.00
23	3.27E+08	1.53E-07	6.08E-06	1.00
24	3.70E+08	8.39E-09	2.58E-05	1.00

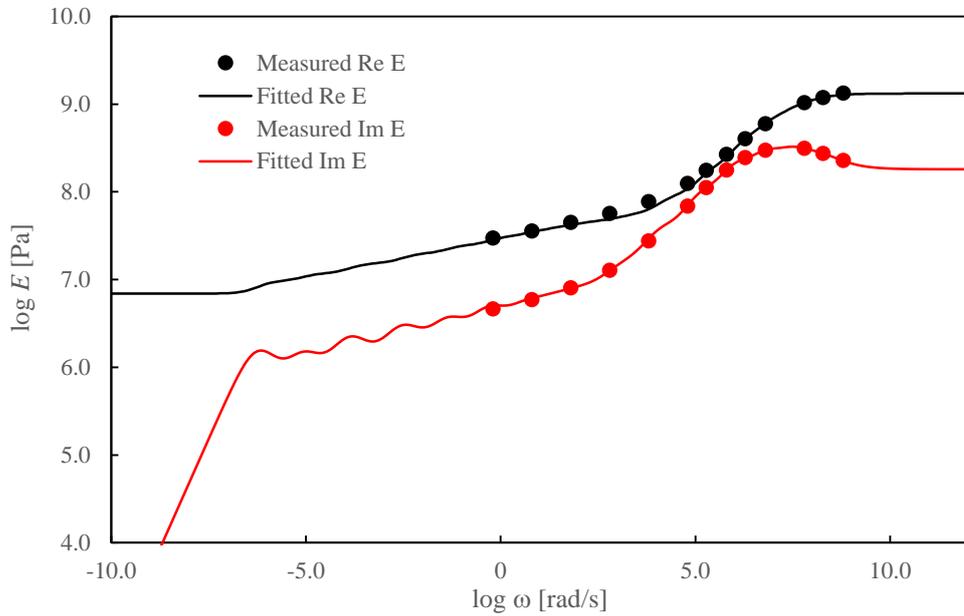


Fig. 5-9 Fitting results of the extended Maxwell model for frequency dependence.

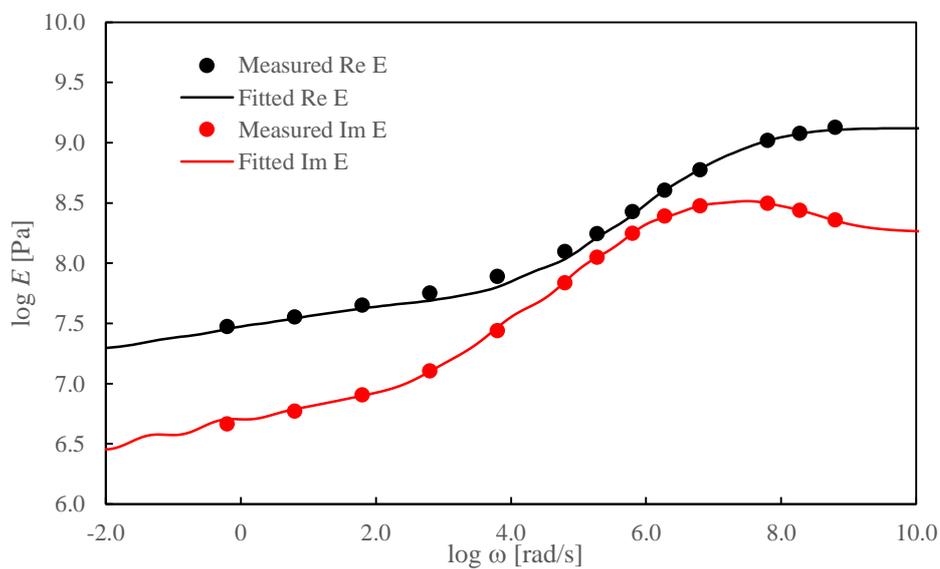


Fig. 5-10 Enlarged view of Fig. 5-9.

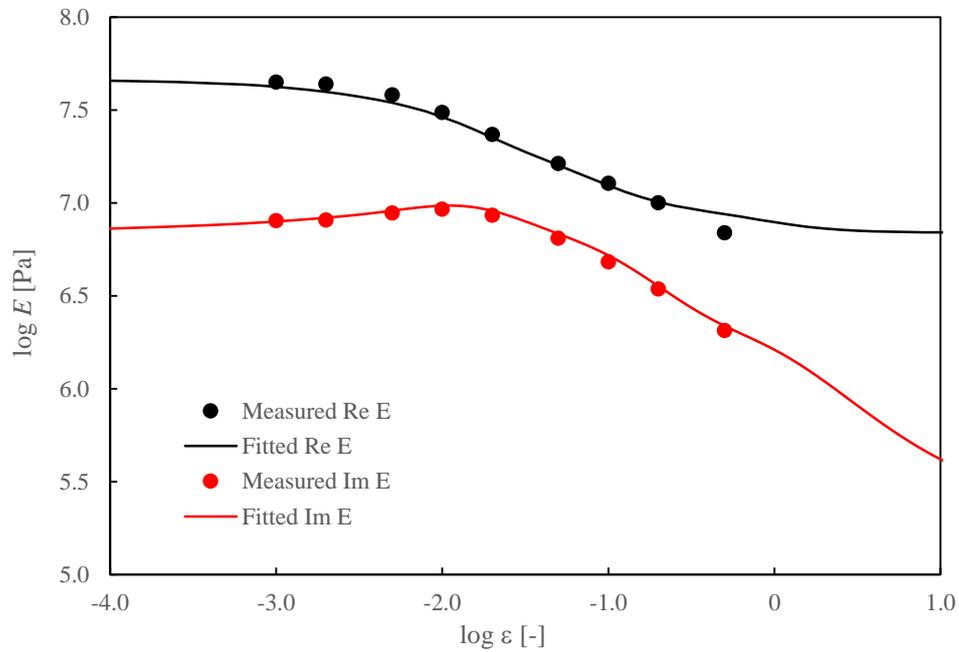
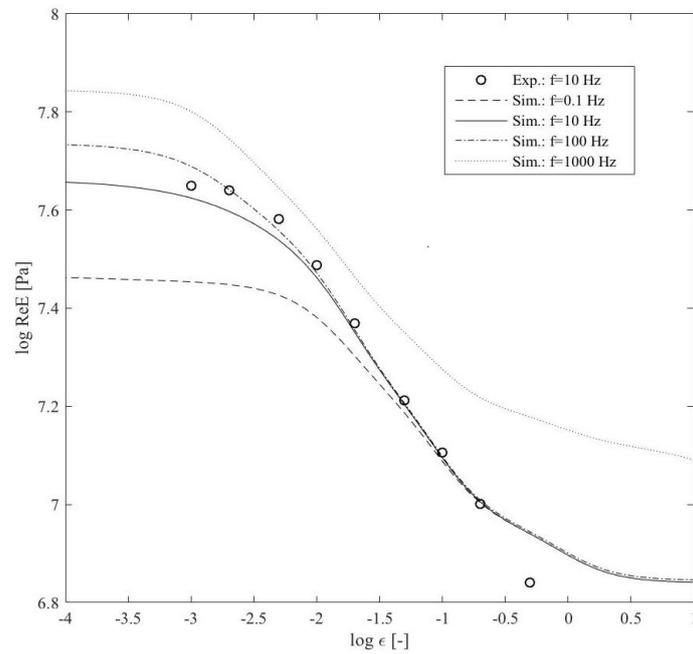
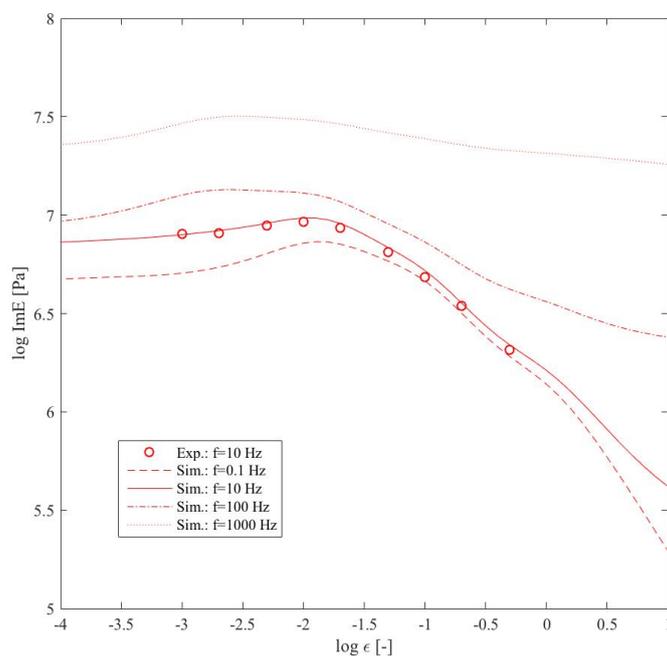


Fig. 5-11 Fitting results of the extended Maxwell model for strain dependence.

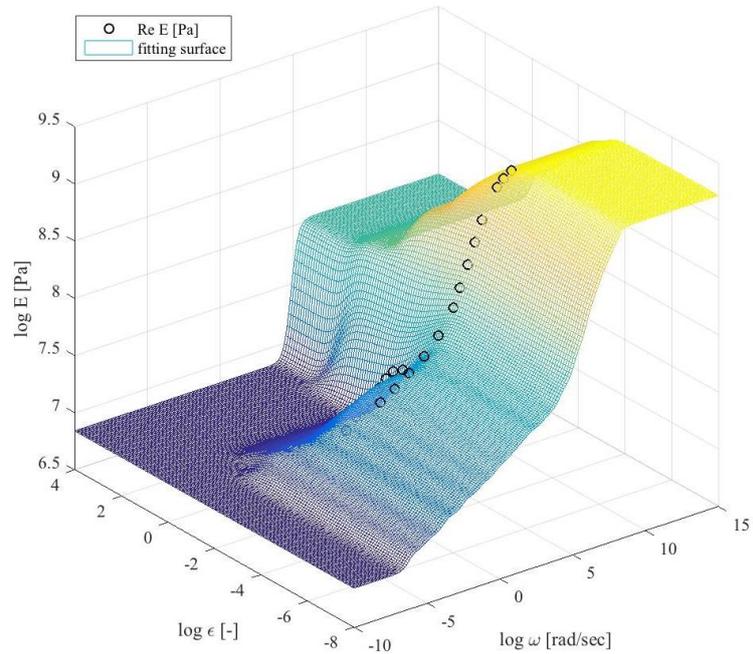


(a)

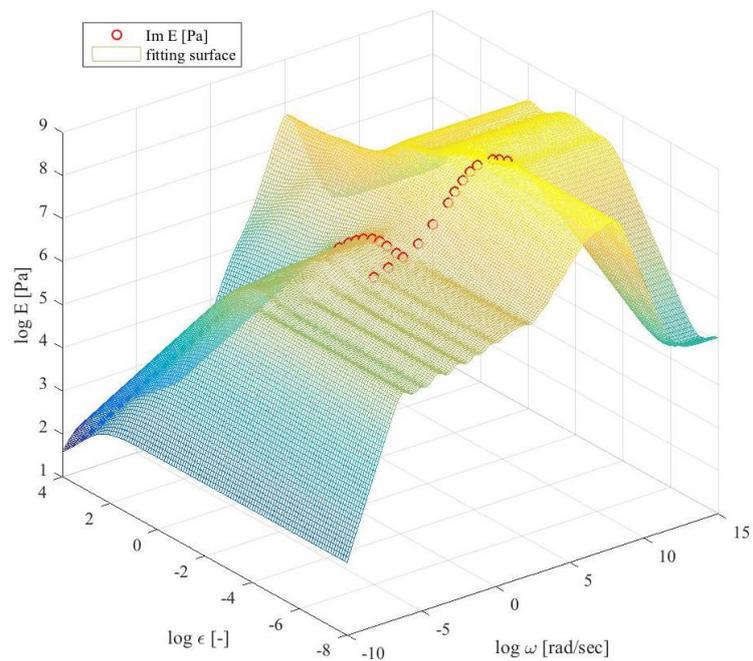


(b)

Fig. 5-12 Strain dependence of the extended Maxwell model at four different frequencies;
(a) Storage modulus, (b) Loss modulus.



(a)



(b)

Fig. 5-13 Isometric diagrams of complex modulus of the extended Maxwell model over $\omega - \epsilon$ plane; (a) Storage modulus, (b) Loss modulus.

5.3 温度制御下直動型摩擦試験の概要

本摩擦試験では、電子クーラーHMC-14F-6000（林時計工業株式会社）によりゴムサンプルの温度を制御し、直動型摩擦試験機 TL201Ts（株式会社トリニティラボ）を用いることで摩擦係数を測定した。試験機の全体図を Fig. 5-14 に示す。本試験機は、直動ユニット、ロードセルユニット、温度制御ユニット、および2つのコントロールボックス（それぞれ、電子クーラー用および直動型摩擦試験機用）で構成される。直動ユニットでは、ボールねじの回転によりロードセルユニットを地面に平行に所望の速度で移動させる。ロードセルユニットは、ロードセル、平面接触子、および垂直荷重分銅受けを備えており、分銅を設置することで垂直荷重を負荷させる。温度制御ユニットは、ペルチェ素子による電子冷却を行い、ユニットの路面上を指定温度に制御する。試験を実施する際の概略図を Fig. 5-15 に示す。ゴムサンプルを温度制御ユニット上に固定し、指定した温度に維持する。路面を平面接触子に取付け、ロードセルユニットに対向するバランス分銅と上下調節ツマミを用いて路面とゴムサンプルの位置合わせを行う。直動ユニットにおいてロードセルユニットを指定した速度で移動させ、ロードセルによりせん断摩擦力を計測し、垂直負荷荷重とせん断摩擦力の比から摩擦係数を求める。直動型摩擦試験機の仕様を Table 5-7 に、温度制御ユニットの仕様を Table 5-8 に示す。

本摩擦試験によって得られる典型的な摩擦係数とすべり速度の関係を Fig. 5-16 に示す。路面の移動開始とともに摩擦係数は急激に増大していき、ある時刻で最大値（静止摩擦係数）を持つ。その後、減少に転じ、摩擦係数は安定した値（動摩擦係数）を示すようになる。本研究では、十分に安定した時刻以降において摩擦係数の平均値を算出し、摩擦試験1回における動摩擦係数値として用いた。



Fig. 5-14 Friction test unit.

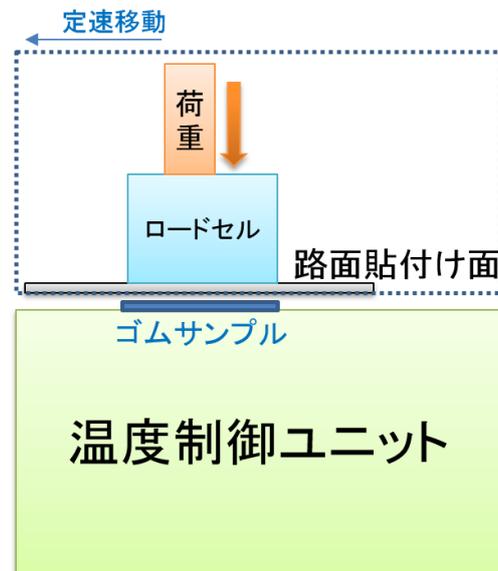


Fig. 5-15 Schematic view of the friction test operation.

Table 5-7 Specification of the straight-type friction tester.

Measuring range (Friction force)	~9.8 N (1000 gf.)
Measuring normal load	~4.9 N (500g)
Sensitivity of normal load	~0.5 g
Measuring speed	0.02~4 mm/s
Measuring distance	1~100 mm

Table 5-8 Specification of the temperature control unit.

Temperature control range (at room temperature 20 °C)	-16~100 °C
Controlled temperature accuracy	±0.3 °C or ±0.5 % of the specified temperature

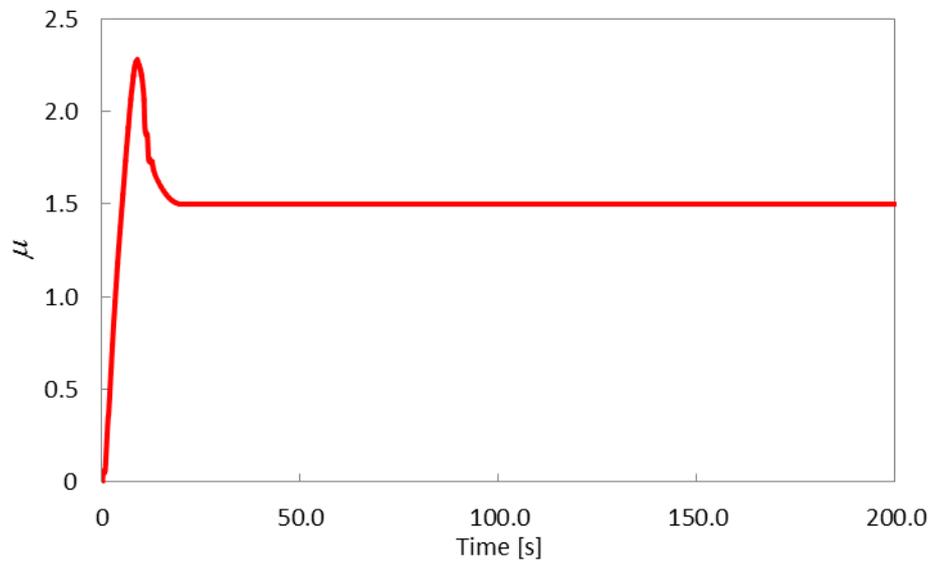


Fig. 5-16 A typical experimental result.

5.4 ドライ／ウェット路面における摩擦試験

5.4.1 試験概要

本研究では、ゴム温度を制御したもと、純水を霧吹きにより路面に吹きつけた場合と吹きつけない場合について摩擦試験を実施し、ゴム温度の影響および純水の散布の有無による影響について調査を行った。なお、純水を吹きつけてない路面状態を「ドライ」と、純水を吹きつけた路面状態を「ウェット」と称することとする。

本試験で用いるゴムサンプルを Fig. 5-17 に示す。ゴムサンプルの寸法は、28.3 mm × 28.3 mm × 2.0 mmである。垂直荷重は、200gを負荷し、公称垂直応力は $\sigma_0 = 2450$ [Pa]とした。また、Fig. 5-18 に示すように、ゴムサンプルにおいて、路面と接する1辺のエッジ部分を面取りし、丸みづけを行った。

試験条件を Table 5-9 に示す。



Fig. 5-17 Square rubber samples.

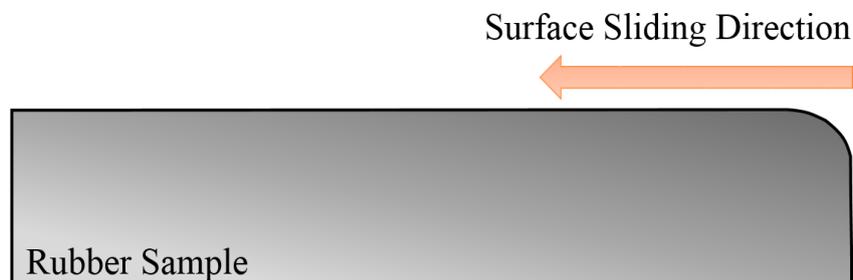


Fig. 5-18 A cross sectional view of edge-processed rubber sample.

Table 5-9 Conditions of friction tests sliding on dry/wet surface under the control of rubber temperatures.

Weight [g]	200
Sliding velocity [mm/s]	0.02, 0.03, 0.04, 0.05, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 1.0, 2.0, 3.0, 4.0
Measuring distance [mm]	5 (for $0.02 \leq v \leq 0.05$ mm/s) 10 (for $0.1 \leq v \leq 0.5$ mm/s) 20 (for $1.0 \leq v \leq 4.0$ mm/s)
Rubber temperature [°C]	10, 25, 40, 55
Surface condition	Dry, Wet
The number of trials for each combination of conditions	3

5.4.2 試験結果

ゴム温度 $T = 10, 25, 40, 55$ °C の試験結果を、それぞれ、Fig. 5-19, Fig. 5-20, Fig. 5-21, および Fig. 5-22 に示す。また、全温度の結果を Fig. 5-23 にまとめて示す。各図中、実線はドライ路面での摩擦係数を、点線はウェット路面での摩擦係数を示す、エラーバーは試行回数 3 回における標準偏差の平均を表す。

Fig. 5-19 から Fig. 5-22 に示す各温度における結果より、ゴム温度 $25 \sim 55$ °C においては、 1 mm/s 以下のすべり速度域ですべり速度が増加すると、摩擦係数も増加する傾向にあることが観察できる。しかし、ドライ路面での摩擦係数に注目すると、すべり速度 $2 \sim 4 \text{ mm/s}$ の摩擦係数は、全試験において 1 mm/s の摩擦係数より低くなっている。加えて、それに伴い、標準偏差の値も低速度側と比較して大きくなっていることから、特に $v \geq 2 \text{ [mm/s]}$ の領域では摩擦振動が大きいことがわかる。

また、ゴム温度 25 °C の 3 mm/s における結果を除き、すべてウェット路面の方が低い摩擦係数を示している。そこで、ドライ路面とウェット路面の摩擦係数の差を $v \leq 1.0 \text{ [mm/s]}$ の各速度で計算し、温度ごとに各速度における差の平均値を求めた。計算された平均値と、差の最大値および最小値を Table 5-10 に整理する。路面状態の違いによる摩擦係数の差の平均は、 $0.111 \sim 0.181$ となっており、散布された純水は $0.1 \sim 0.2$ 程度の摩擦係数の低下に寄与することがわかる。

最後に、Fig. 5-23 に注目すると、ドライ路面およびウェット路面は、ともにゴムサンプルの温度が低くなるほど高い摩擦係数を示す傾向にある。ただし、ドライ路面において、ゴム温度 25 °C の $v \geq 2 \text{ [mm/s]}$ における摩擦係数のみ、 40 °C の同条件の摩擦係数より低い値を示している。この場合のみが、ゴム温度が低くなっても高い摩擦係数が示されなかった領域である。

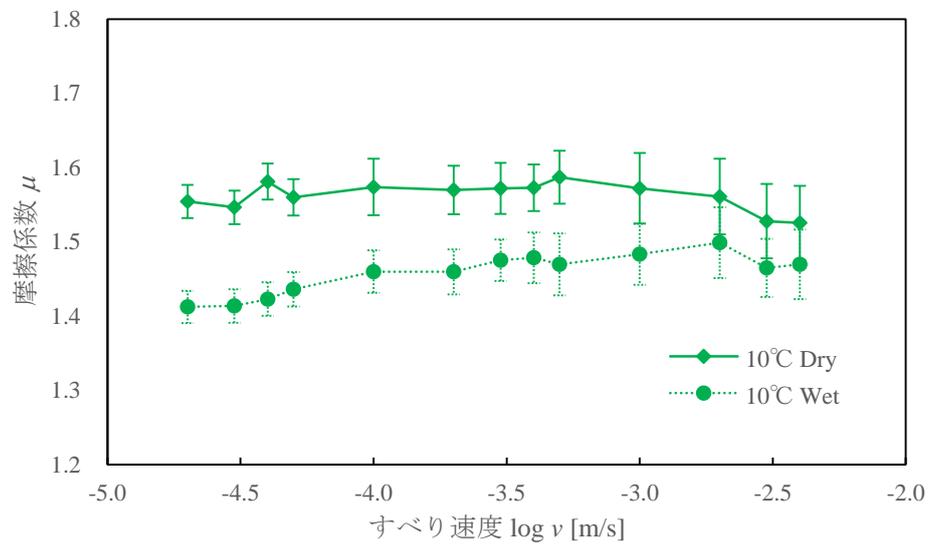


Fig. 5-19 Experimental results at rubber temperature of 10 °C.

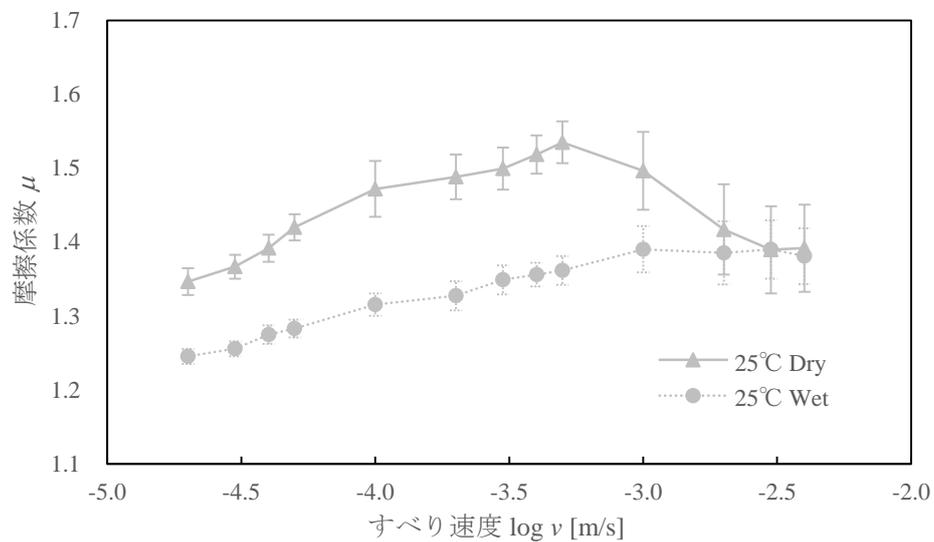


Fig. 5-20 Experimental results at rubber temperature of 25 °C.

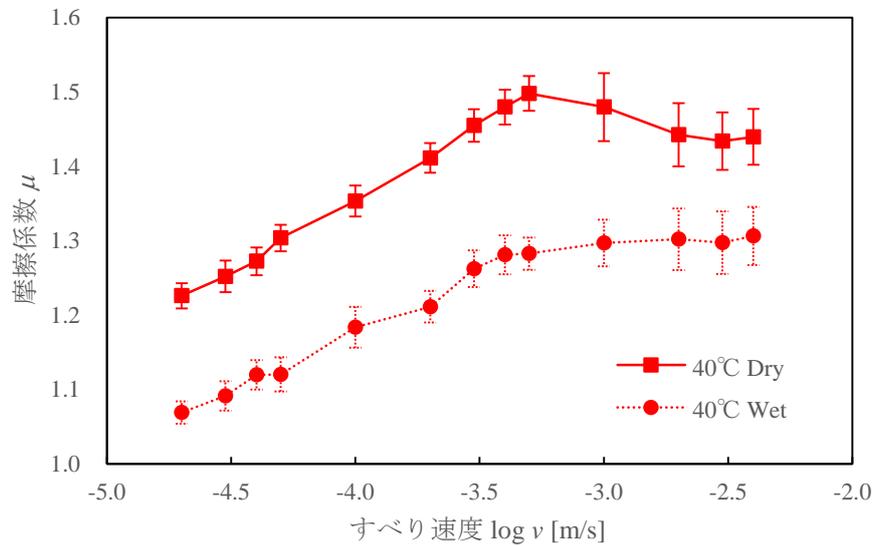


Fig. 5-21 Experimental results at rubber temperature of 40 °C.

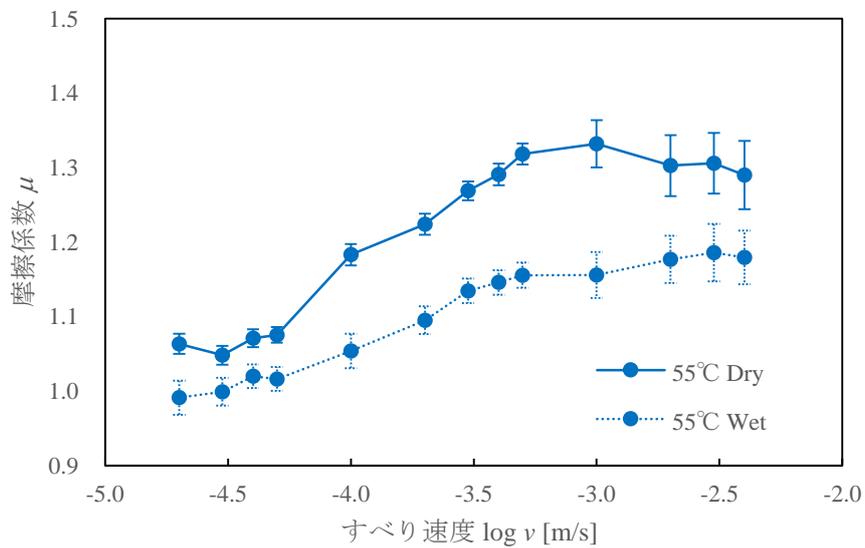


Fig. 5-22 Experimental results at rubber temperature of 55 °C.

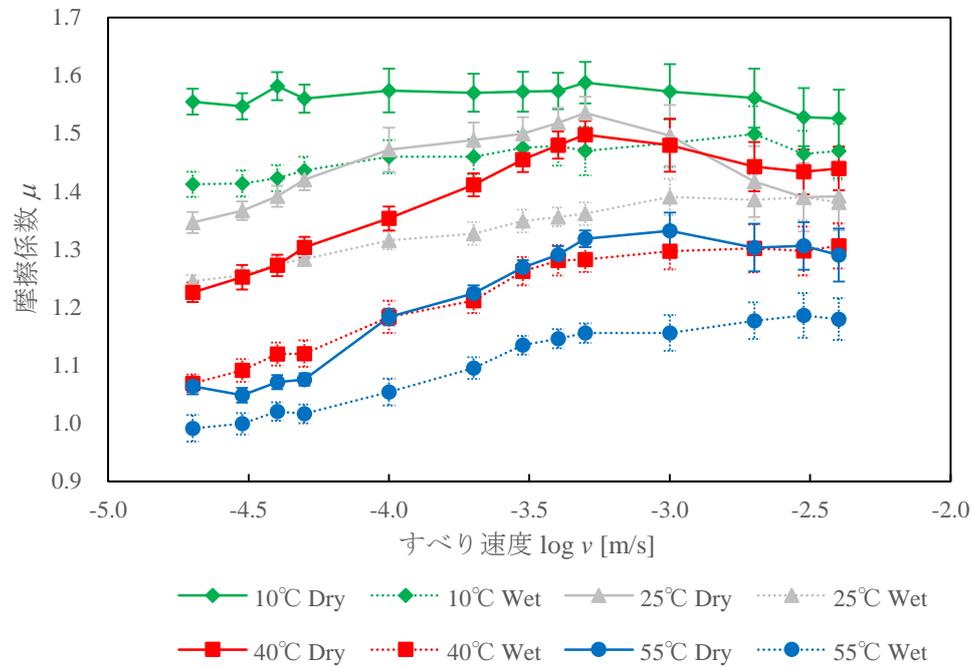


Fig. 5-23 Experimental results for all specified temperatures.

Table 5-10 Difference between friction coefficients under dry and wet surface conditions
for $v \leq 1.0$ mm/s.

Rubber Temperature [°C]	Average	Maximum	Minimum
10	0.118	0.158	0.089
25	0.138	0.173	0.101
40	0.181	0.215	0.153
55	0.111	0.176	0.049

5.5 WLF 式による試験結果のマスターカーブ作成

ゴムの摩擦係数は、ゴムの粘弾性と密接に関係しており、複数の温度におけるゴム-路面間の摩擦係数を WLF 式に基づくすべり速度の移動によって重ねあわせることで、摩擦係数のマスターカーブを作成できることが知られている[66]. そこで、5.4 節で得られた10~55℃における試験結果よりマスターカーブを作成する。

5.2.2 項で述べたように、WLF 式は粘弾性のマスターカーブを得る際に用いられ、以下の式で表される。

$$\log a_T = \frac{-C_1(T - T_s)}{C_2 + (T - T_s)} \quad (5-2)$$

この移動因子 a_T をすべり速度 v に対しシフト量として乗算することで、シフト後の速度は $\log a_T \times v$ と表現される。このとき、基準温度 T_s ならびに定数 C_1 および C_2 は、粘弾性測定時の WLF 式と同一とし、 $T_s = 25$ [°C]、 $C_1 = 10.36$ および $C_2 = 144.5$ と定めた。Fig. 5-24 に WLF 式により得られたマスターカーブを示す。 $0.02 \leq v \leq 1.0$ [mm/s]のすべり速度域に対応する摩擦係数のシフト結果は、良く一致したマスターカーブとなり、摩擦係数と粘弾性とは密接な関係にあることが示される。一方、 $v \geq 1.0$ [mm/s]でのシフト結果は摩擦係数の減少に起因してマスターカーブから外れていることがわかる。

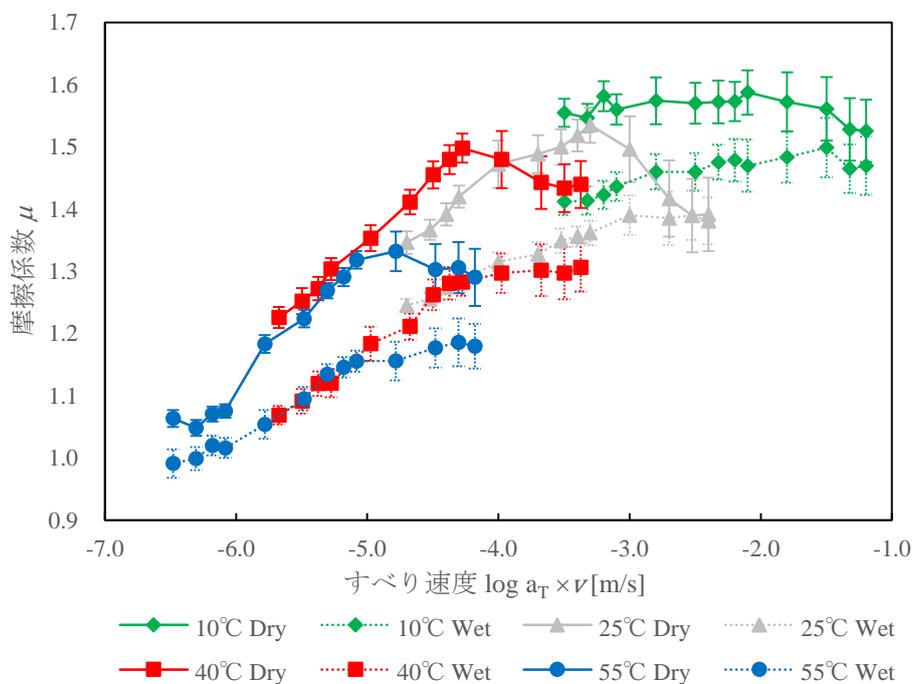


Fig. 5-24 Master curve of the measured friction coefficients under dry and wet conditions shifted by the WLF equation.

5.6 考察

本節では、実験結果の考察および摩擦モデルにより計算される摩擦係数との比較に用いる実験値の選定を行う。

まず、ウェット路面ではドライ路面と比較して摩擦係数が減少した点については、散布された純水がゴム-路面間の潤滑剤としての役割を果たし、凝着摩擦の影響を大きく抑えたためであると考えられる。

次に、すべり速度 $v > 1.0$ [mm/s] において摩擦係数が減少に転じる現象について考察する。ゴムが路面凹凸に追従した際、ミクロスケールで内部発熱が生じ、摩擦係数が低減されることが知られている。これは Flash Temperature と呼ばれており、すべり速度が増加するほど、Flash Temperature の影響が大きくなり、摩擦係数を減少させる働きをする[46]。また、すべり速度の増加に伴い摩擦係数が小さくなると、スティックスリップが発生しやすくなる[67]。したがって、高速度域で測定された摩擦係数が減少に転じたのは、内部発熱により摩擦係数の増加が抑えられ、スティックスリップによる摩擦振動が誘発されたためであるといえる。これは、実験で摩擦係数が減少に転じた際、標準偏差が大きくなっている事実とも一致する。

以上より、 $v > 1.0$ [mm/s] の速度域での試験結果は、ヒステリシス摩擦／凝着摩擦以外の影響を大きく受けていると考えられるため、本研究で摩擦モデルを評価する際には Fig. 5-25 に示す $0.02 \leq v \leq 1.0$ [mm/s] のウェット路面での試験結果から作成されるマスターカーブを用いることとする。このマスターカーブは、上述したようなスティックスリップなどの因子を排除し、よりヒステリシス摩擦の評価に適したデータであるといえる。よって、Fig. 5-25 より、本研究で考慮するヒステリシス摩擦は、すべり速度が大きくなるにつれ、摩擦係数が増加していくがその増加率は小さくなっていき、 $\log v = -2$ [m/s] 前後で約 1.5 の摩擦係数を示す。

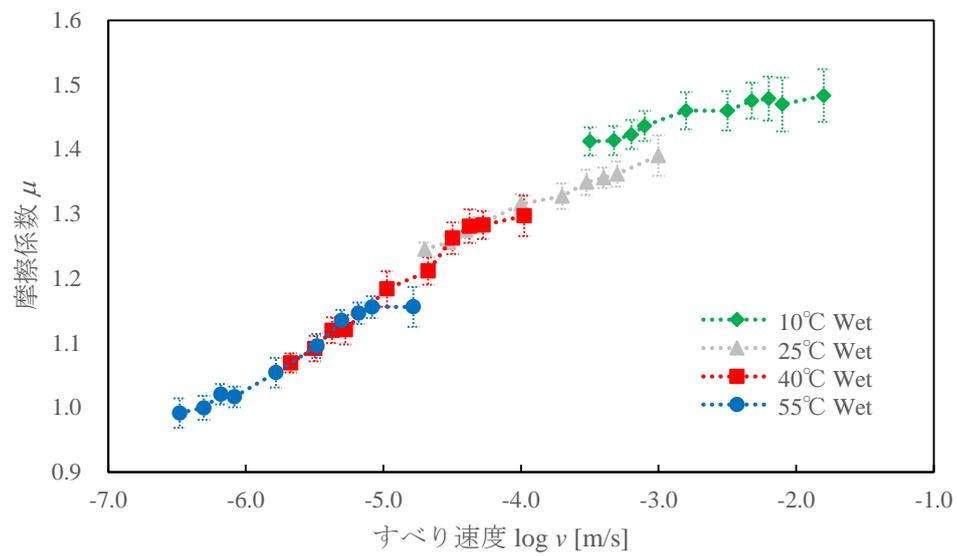


Fig. 5-25 Experimental results for comparison with friction model.

6 Persson の摩擦理論に基づく摩擦係数予測

6.1 緒言

本章では、4章で説明した Persson の摩擦理論により計算される摩擦係数 μ について論ずる。当該モデルによる摩擦係数 μ の計算式を以下にまとめる。

$$\mu = \frac{1}{2} \int dq q^3 C(q) P(q) \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{(1 - v^2)\sigma_0}. \quad (6-1)$$

ここで、 $C(q)$ は路面の表面粗さパワースペクトルであり、 $P(q)$ は真実接触領域の割合である。 $P(q)$ は次式で表される。

$$P(q) = \left(1 + [\pi G(q)]^{3/2}\right)^{-1/3}. \quad (6-2)$$

$$G(q) = \frac{1}{8} \int_{q_0}^q dq' q'^3 C(q') \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(q'v \cos \phi)}{(1 - v^2)\sigma_0} \right|^2 \quad (6-3)$$

Persson の摩擦理論においては、マイクロ領域での力学的取り扱いについての考察が不足しており、カットオフ波数 q_1 の理論的な決定手法が明示されていない。そこで、本章では、 $q_1 = \zeta_{\max} q_0$ で定義される倍率 ζ_{\max} による感度評価に基づき、摩擦係数への影響を議論する。

また、Persson の摩擦理論では、ゴムの力学的特性としてひずみ依存性は反映されておらず、周波数依データのみを用いる。そこで、複数の方法で複素弾性率を表現し、表現方法の違いの影響も同時に議論する。

6.2 計算条件

摩擦係数の計算は、5章に示された路面特性、ゴムの動的粘弾性、および摩擦試験条件に基づく。

計算に用いる複素弾性率 $E(\omega)$ は、次の3つの評価手法に従う。

(i) 補間モデル

ひずみ $\varepsilon_0 = 0.1\%$ で測定された周波数データに対し数値補間を行い、直接 $E(\omega)$ として用いる。このとき、5.2.2項で説明したとおり、対数スケールで内挿にスプライン補間を、外挿に線形補間を採用する。補間により表現される複素弾性率は、Fig. 5-4に示すとおりとなる。なお、計算の際には $E(-\omega)$ は $E(\omega)$ の複素共役となるように処理する（各手法に対して本章以降も同様である）。

(ii) 一般化 Maxwell モデル

5.2.2項で測定値をフィッティングした一般化 Maxwell モデルを用いる。一般化 Maxwell モデルにより、複素弾性率は次式で表される。

$$E(\omega) = E_0 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\frac{1}{E_i} + \frac{1}{i\omega\eta_i}} \quad (6-4)$$

Maxwell 要素の要素数は $n = 35$ とし、各材料パラメータは Table 5-4 に示される値に従う。一般化 Maxwell モデルによる $E(\omega)$ の挙動は、Fig. 5-5 に示される。

(iii) 拡張 Maxwell モデル

周波数依存性が測定された $\varepsilon_0 = 0.1\%$ における拡張 Maxwell モデルの複素弾性率を $E(\omega)$ とする。ここで、 $E(\omega)$ は、式(3-36)および式(3-37)に $\varepsilon = \varepsilon_0$ を代入して、

$$E'(\omega) = E_0 + \sum_{i=1}^n \frac{E_i z_i^2 \omega^2}{z_i^2 \omega^2 + \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon_0 \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\} \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon_0 \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\}} \quad (6-5)$$

$$E''(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{E_i z_i \omega \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon_0 \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\}}{z_i^2 \omega^2 + \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon_0 \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\} \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon_0 \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\}} \quad (6-6)$$

により表現される。5.2.4項でフィッティングしたように、 $n = 24$ とし Table 5-6 に示す材料パラメータを用いる。そのときの $E(\omega)$ は、Fig. 5-9 に示すとおりである。

また、見かけの応力 σ_o は、試験条件に合わせて、

$$\sigma_o = \frac{mg}{A_o} = \frac{0.2 \text{ [kg]} \times 9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}}{(28.3 \times 10^{-3})^2 \text{ [m}^2\text{]}} \approx 2450.0 \text{ [Pa]}$$

と設定した。

ゴム - 路面間の摩擦において凝着の効果が重要になる波長 λ のスケールは $\lambda < 0.1 \text{ [\mu m]}$ であるとされている[12]. そこで、本研究では、考慮する最大倍率については、最小波長が $0.1 \text{ }\mu\text{m}$ オーダーとなるように $\zeta_{\max} = 3000$ と定めた。このとき、最小波長 λ_1 は、

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{q_1} = \frac{2\pi}{q_0 \zeta_{\max}} = \frac{2\pi}{5070.0 \times 3000} \approx 0.41 \text{ [\mu m]}$$

となる。

計算条件の詳細を Table 6-1 に示す。

Table 6-1 Calculation conditions for Persson's theory.

Surface data	$q_0 \text{ [1/m]}$	5070.0
	$h_0 \text{ [\mu m]}$	82.8859
	H	0.63069
	Power spectra of surface roughness $C(q) \text{ [m}^4\text{]}$	$\frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1)}$
Rubber data	Viscoelastic property $E(\omega) \text{ [Pa]}$	<u>Method 1</u> Spline/linear interpolation <u>Method 2</u> Generalized Maxwell model <u>Method 3</u> Extended Maxwell model
	Poisson's ratio ν	0.49
Normal stress $\sigma_o \text{ [Pa]}$		2450
Sliding velocity $\log v \text{ [m/s]}$		-7.0, -6.5, -6.0, -5.5, -5.0, -4.5, -4.0, -3.5, -3.0, -2.5, -2.0, -1.5 -1.0, -0.5, 0, 0.5, 1.0
Maximum magnification ζ_{\max}		3000

6.3 計算結果

$\zeta = 500, 1000, 2000$, および 3000 の場合について, すべり速度に対して計算された摩擦係数の結果を Fig. 6-1 に示す. ゴムの弾性率を補間モデル, 一般化 Maxwell モデル, および拡張 Maxwell モデルを用いて計算した結果が, (a), (b), および(c)にそれぞれ対応する. 図示されるように, いずれの場合も, すべり速度全域において倍率 ζ の増加に伴い摩擦係数も増加する. ζ が大きいほどゴムはより小さな粗さまで追従していることを意味するので, 散逸するエネルギーも増え, 摩擦係数の増加に繋がることは自然な結果である.

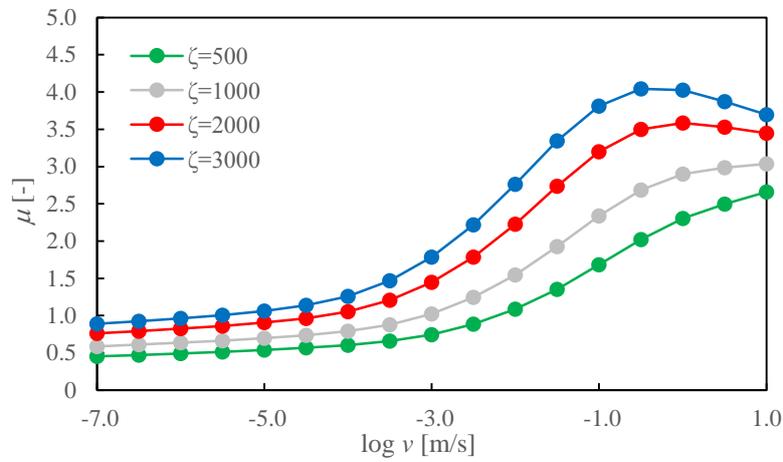
また, 倍率 ζ に対する真実接触面積率 P の計算結果を Fig. 6-2 に示す. 倍率が 1 を超えると真実接触面積率は急激に減少しており, すべり速度の増加に伴い $P(\zeta)$ が小さくなる. よって, ミクロ領域に生じる垂直応力は, 見かけの応力より急激に上昇しており, $10^4 \sim 10^6$ 倍のオーダーで高くなる.

加えて, Fig. 6-1 より, 摩擦係数がピークに達するすべり速度は, 倍率が高くなるほど低速度側にシフトしていることがわかる. 速度が増加すると, 同じ倍率で真実接触面積率は低く見積もられる (Fig. 6-2 参照). よって, 式(6-1)より明らかであるが, 速度に伴い摩擦係数が増加するには, 真実接触面積率の減少率を損失弾性率の積分項が上回る必要がある. ここで, 損失弾性率の周波数依存性に注目すると, $\omega \approx 10^7$ rad/s でピークに達し, それ以上の角周波数では減少に転じている. すなわち, $\omega \approx 10^7$ を境に損失弾性率に対する積分値の増加率は小さくなる. よって, $\omega = q_0 \zeta v \cos \phi$ であるから, 倍率 ζ が高くなるほど摩擦係数が減少に転じるすべり速度は低くなると考えられる. 以上より, 5.6 節で推察されたように摩擦係数のピークが $\log v = -2$ [m/s] の速度域に存在するならば, $\zeta \gg 3000$ の倍率が必要であるが, そのときの摩擦係数は実験値に対して顕著に大きくなるといえる.

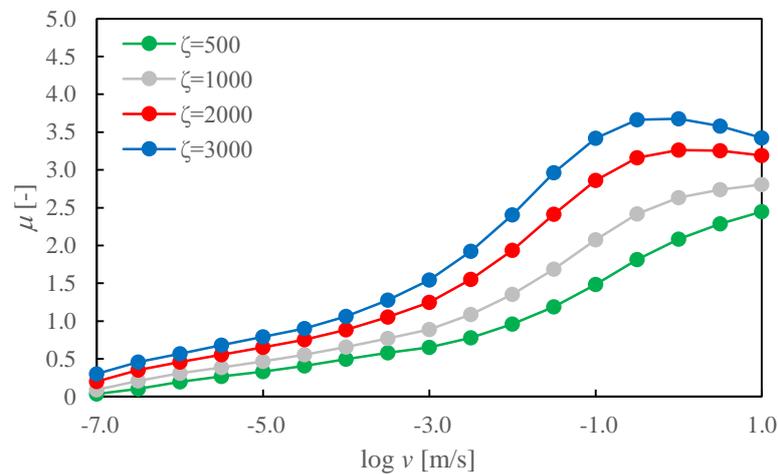
次に, 複素弾性率の評価方法による摩擦係数への影響に注目する. $\zeta = 3000$ の際のすべり速度に対する摩擦係数を Fig. 6-3 に示す. 図において, 点線, 破線, および実線が, それぞれ補間モデル, 一般化 Maxwell モデル, および拡張 Maxwell モデルに対応している. 低速度側では, 一般化 Maxwell モデルが他の 2 つの場合に比べ非常に摩擦係数が小さくなっている. これは, $\omega < 10^{-1}$ rad/s における複素弾性率の挙動の違いによるものだと考えられる. $\omega < 10^{-1}$ rad/s では, 一般化 Maxwell モデルの貯蔵弾性率は定数に収束しているが, 補間モデルおよび拡張 Maxwell モデルの貯蔵弾性率は角周波数が減少すると貯蔵弾性率も減少している. すなわち, すべり速度が低い場合の真実接触面積率を一般化 Maxwell モデルはより低く見積もることになる. また, 損失弾性率は, $\omega < 10^{-1}$ rad/s で急激な減少を示していることから, 摩擦係数を計算する際の損失弾性率の積分項も, 同様に他の評価方法に比べ小さく計算される. 以上より, 低速度域での摩擦係数は, 低周波数域の複素弾性率に大きな影響を受けることがわかる.

また、 $\log v > 10^{-4}$ m/s の速度域では、拡張 Maxwell モデルの方が補間モデルよりも高い摩擦係数を示している。この原因として考えられるのが、拡張 Maxwell モデルの測定値に対するフィッティング精度である。Fig. 6-4 に $\log v = 10^{-3}$ m/s の場合の倍率 ζ に対する真実接触面積率を示している。図より、真実接触面積率は、拡張 Maxwell モデル、補間モデル、一般化 Maxwell モデルの順に高くなっており、摩擦係数の大小関係とも一致する。このとき、Fig. 6-4 の拡大図が Fig. 6-5 であるが、 $\zeta < 20$ までは拡張 Maxwell モデルも補間モデルもほぼ同一の真実接触面積率を示している一方、それより大きな倍率で差が生まれ、拡張 Maxwell モデルのほうが高い値を示している。ここで、 $\omega = q_0 \zeta v \cos \phi$ より、 $\log v = 10^{-3}$ m/s および $\zeta = 20$ における考慮される最大の角周波数 ω_{\max} は $\omega_{\max} = 5070.0 \times 20 \times 10^{-3} \times 1 \approx 10$ rad/s である。このとき、周波数依存性の貯蔵弾性率に対する拡張 Maxwell モデルのフィッティング結果は、 $\omega > 10$ rad/s の領域で測定値より低く評価していることがわかる (Fig. 5-10 参照)。さらに、式(6-2)および式(6-3)より、貯蔵弾性率が小さくなると複素弾性率の絶対値も小さくなり、真実接触面積率は大きく計算されることがわかる。以上より、拡張 Maxwell モデルが測定値より貯蔵弾性率を低く見積もっている周波数領域が存在することから、測定値を補間した場合よりも高い摩擦係数を示すことに繋がると考えられる。

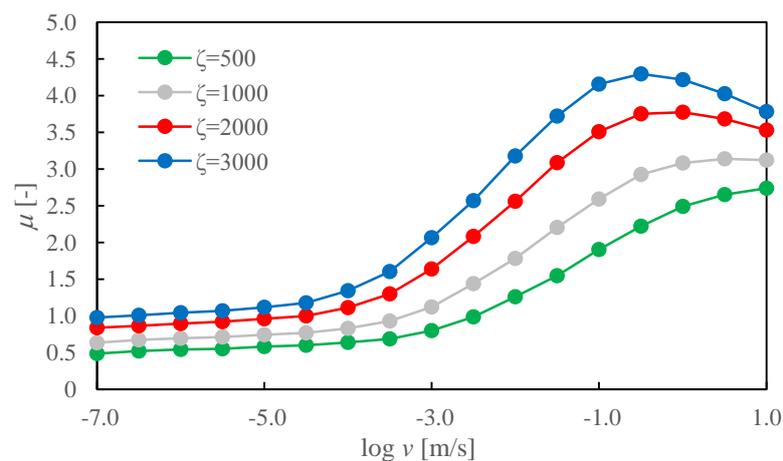
したがって、測定された複素弾性率を表現する手段により、計算される摩擦係数の傾向も変化することがわかる。



(a)



(b)



(c)

Fig. 6-1 μ - v curve calculated from Persson's theory;**(a) Interpolation, (b) Generalized Maxwell model, (c) Extended Maxwell model.**

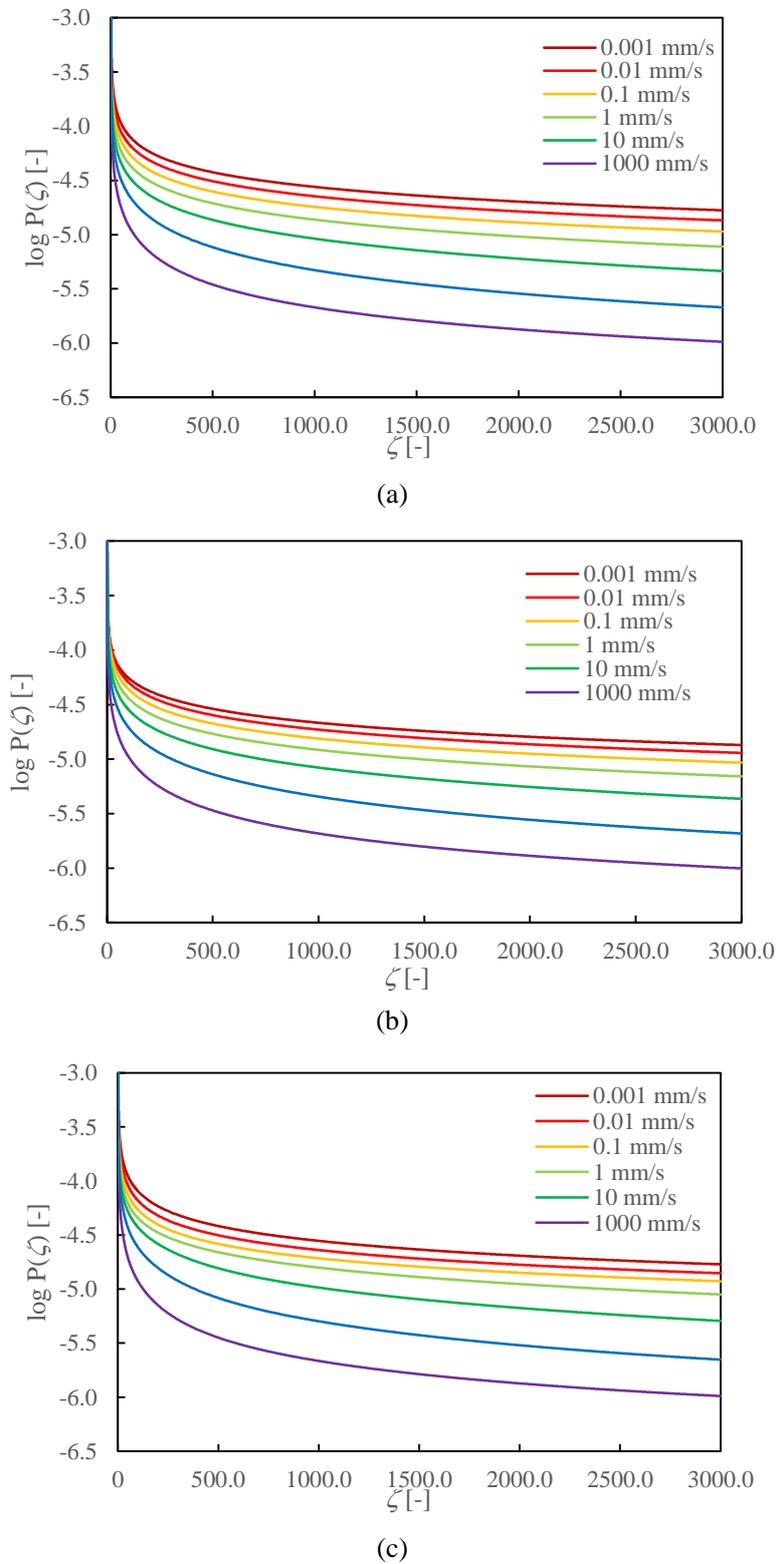


Fig. 6-2 The fraction of real contact area calculated from Persson's theory;
(a) Interpolation, (b) Generalized Maxwell model, (c) Extended Maxwell model.

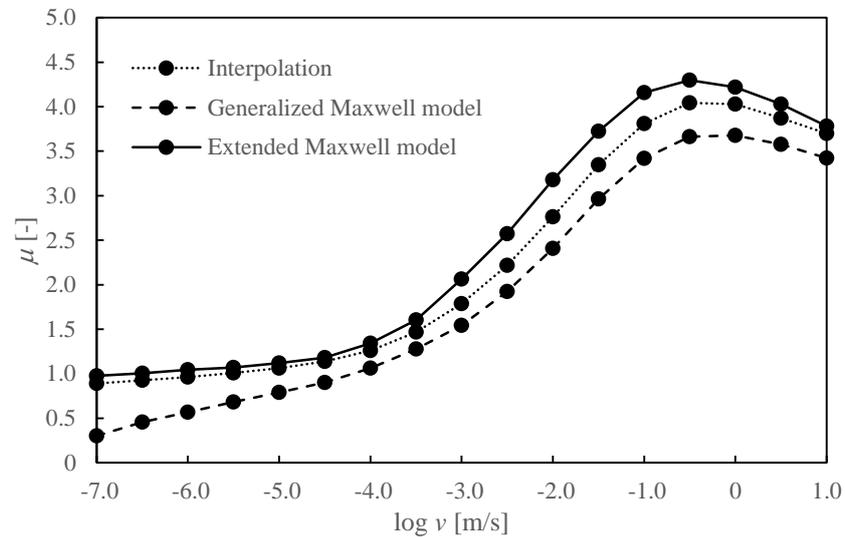


Fig. 6-3 μ - v curve calculated from Persson's theory with different representations of $E(\omega)$.

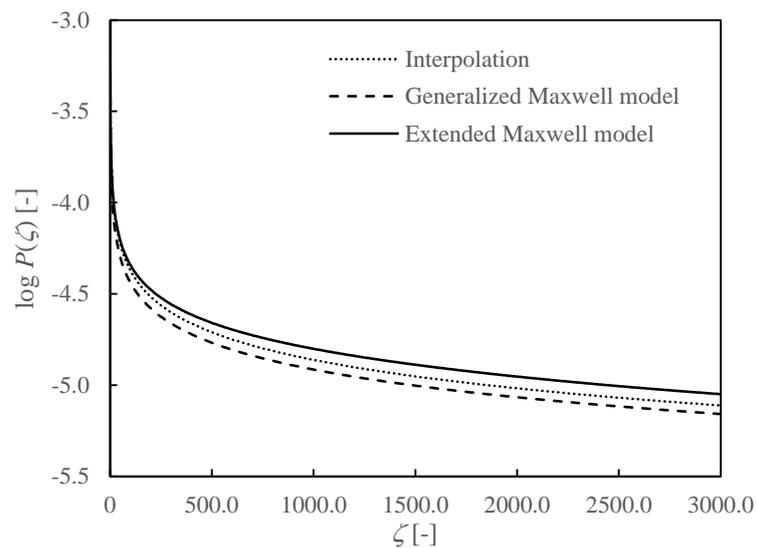


Fig. 6-4 The fraction of real contact area calculated from Persson's theory with different representations of $E(\omega)$.

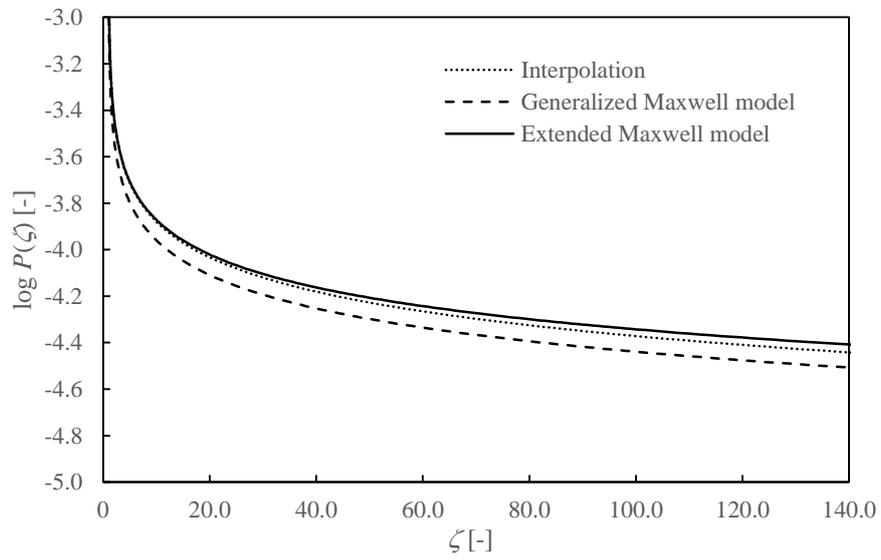


Fig. 6-5 Enlarged view of Fig. 6-4.

7 部分接触を考慮した摩擦係数予測

7.1 理論

Persson の摩擦理論では、ゴムは路面に完全に追従していると仮定し摩擦係数の導出を行っている。しかし、実際、路面の底部までゴムが路面と接触していることは少なく、マクロスケールに見てもゴムと路面は「部分接触」していると考えられるべきである。そこで、本章では部分接触を考慮した接触モデル・摩擦モデルを提案し、その効果について論ずる。

ゴム - 路面間の部分接触状態の概略図を Fig. 7-1 に示す。このとき、路面高さを $h(\mathbf{x})$ で表すと、ゴムが接触しているのは高さ $h(\mathbf{x}) \geq d$ に対応する表面高さプロファイルである。また、路面高さ h の確率密度関数を $f(h)$ すると、 $h(\mathbf{x}) \geq d$ に存在する高さの割合 $F(d)$ は、 $f(h \geq d)$ の累積分布に従うことから、

$$F(d) = \int_d^{\infty} dh f(h) \quad (7-1)$$

と書ける。このとき、ゴム - 路面間の見かけの応力 σ_0 は、

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{F(d)} \quad (7-2)$$

と更新される。さらに、高さ d を基準位置とし、 $h(\mathbf{x}) \geq d$ の高さプロファイルのみを残した修正路面高さを $\hat{h}(\mathbf{x})$ とすると、以下のように定義することができる (Fig. 7-2 参照)。

$$\hat{h}(\mathbf{x}) = \begin{cases} h(\mathbf{x}) - d & (h(\mathbf{x}) \geq d) \\ 0 & (h(\mathbf{x}) < d) \end{cases} \quad (7-3)$$

この $\hat{h}(\mathbf{x})$ を部分接触状態における新たな被摺動面であると考え、その表面粗さパワースペクトルを $\hat{C}(q)$ と定義する。

以上を考慮すると、Persson の摩擦理論に基づき部分接触における摩擦係数 μ は次式より計算される。

$$\mu = \frac{1}{2} \int_{q_0}^{q_1} dq q^3 \hat{C}(q) \hat{P}(q) \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(qv \cos \phi)}{(1 - \nu^2) \hat{\sigma}_0}. \quad (7-4)$$

ここで、 $\hat{C}(q)$ は修正表面粗さパワースペクトルであり、 $\hat{P}(q)$ は $\hat{h}(\mathbf{x})$ における真実接触面積の割合である。 $\hat{P}(q)$ は次式で表される。

$$\hat{P}(q) = \left(1 + [\pi \hat{G}(q)]^{3/2} \right)^{-1/3} \quad (7-5)$$

$$\hat{G}(q) = \frac{1}{8} \int_{q_0}^q dq' q'^3 \hat{C}(q') \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(q'v \cos \phi)}{(1 - \nu^2) \hat{\sigma}_0} \right|^2 \quad (7-6)$$

高さ d 以上の路面高さのみに接触している場合、 $\hat{\sigma}_0$ および $\hat{C}(q)$ が表現できれば $\hat{P}(q)$ が求められ、Persson の摩擦理論と同様に摩擦係数が計算できる。

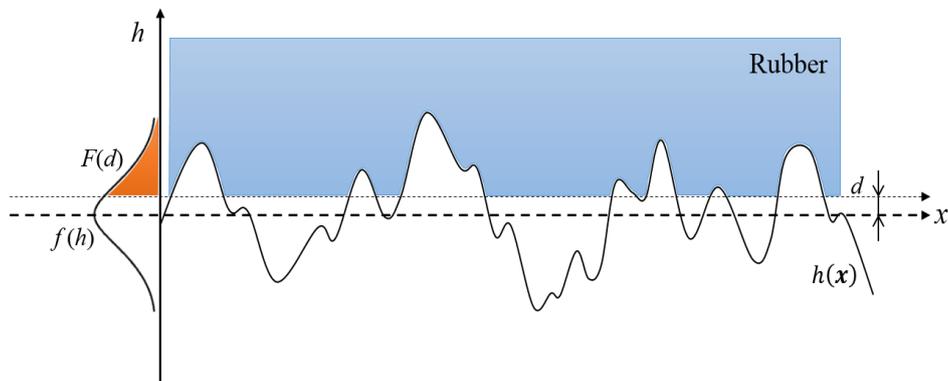


Fig. 7-1 Partial contact state between rubber and surface.

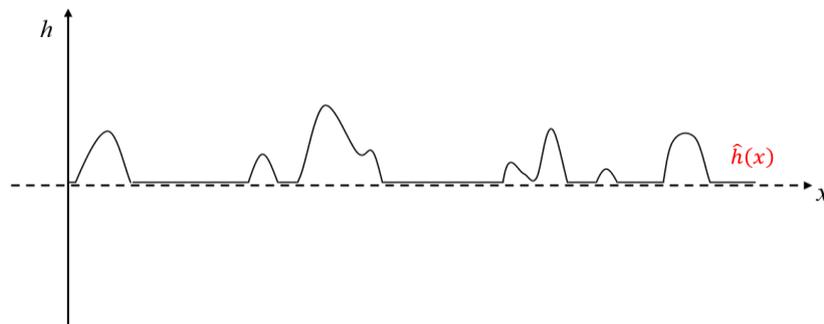


Fig. 7-2 Effective surface profile according to Fig. 7-1.

本摩擦モデルでは、路面高さプロファイルを、分布が正規分布に従うセルフアフィンフラクタル表面であると仮定する。このとき、路面高さの基準面を $\langle h(\mathbf{x}) \rangle = 0$ となる位置にとると、定義より路面高さの標準偏差 S は二乗平均平方根粗さ R_q と等しくなる。よって、路面高さ h の確率密度関数 $f(h)$ は、

$$\begin{aligned} f(h) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}S} \exp\left(-\frac{h^2}{2S^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}R_q} \exp\left(-\frac{h^2}{2R_q^2}\right) \end{aligned} \quad (7-7)$$

である。また、セルフアフィンフラクタル表面の R_q は、式(2-14)より、

$$R_q = \frac{h_0}{\sqrt{2}} \quad (7-8)$$

と書けることがわかっている。さらに、 $f(h)$ が正規分布であるから、 $F(d)$ は、

$$\begin{aligned} F(d) &= \int_d^\infty dh \frac{1}{\sqrt{2\pi}R_q} \exp\left(-\frac{h^2}{2R_q^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}R_q}\right) \end{aligned} \quad (7-9)$$

である。ただし、 $\operatorname{erfc}(x)$ は相補誤差関数であり、

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty dt \exp(-t^2)$$

で定義される。したがって、まず部分接触で生じる見かけの応力 $\hat{\sigma}_0$ は、次式で計算することができる。

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{2\sigma_0}{\operatorname{erfc}(d/\sqrt{2}R_q)} \quad (7-10)$$

次に、新たに定義される路面 $\hat{h}(\mathbf{x})$ の表面粗さパワースペクトル $\hat{C}(q)$ をモデル化する。修正路面高さ $\hat{h}(\mathbf{x})$ は、元の表面データを高さ d 以下でカットしたものであるから、任意の周波数の強度は弱まるといえる。すなわち、修正パワースペクトル $\hat{C}(q)$ は、全波数領域で $C(q)$ より低下すると考えられる。本研究においては、Fig. 7-3に示すような3つの領域に分けて議論を進める。領域Iは、ロールオフ波数 q_0 より小さい波数により構成されるマクロ領域である。次に、領域IIIは、 $C(q)$ より小さいパワースペクトルを示すものの、その傾きは $C(q)$ 同様に対数スケールで $-2(H+1)$ に従う領域である。ここで、領域IIIの最小波数を q_c とする。最後に、領域Iと領域IIIとの間の波数帯を中間領域である領域IIとして扱う。以下、各領域について $\hat{C}(q)$ の導出を行う。

(i) 領域 I

領域 I は、マクロスケールの粗さに対応する領域である。 $\hat{h}(\mathbf{x})$ は、 $h(\mathbf{x})$ の路面高さがカットされたものであり、水平方向の尺度には如何なる補正も掛けられていない。 よって、マクロな路面粗さを支配する最小波数は不変である。 すなわち、領域 I の最大波数は、元の路面高さ $h(\mathbf{x})$ と同様に q_0 により規定される。

ここで、パワースペクトル $C(q)$ の定義を示す式(2-1)を再掲する。

$$C(q) = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \langle h(\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau})h(\boldsymbol{\tau}) \rangle e^{-iq\mathbf{x}} \quad (7-11)$$

$q < q_0$ の波数域における $C(q)$ はおよそ一定となり平坦な形状を示すことから、マクロな粗さのみが寄与している。 このとき、パワースペクトルへの寄与の大きさは平面の任意の場所で不変であると考えられる。 よって、 $h(\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau})$ および $h(\boldsymbol{\tau})$ は、それらの影響を独立して扱えることができ、路面修正後もそれぞれ $F(d)$ の確率で非ゼロの値を有するから、領域 I における修正パワースペクトル $\hat{C}(q)$ は、

$$\hat{C}(q) = \{F(d)\}^2 \times C(q) \quad (7-12)$$

に従う。 詳細には、 $q \leq q_0$ における $C(q)$ は一定の値を示すから、式(2-13)より、

$$\hat{C}(q) = \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0} \right)^2 \{F(d)\}^2 \quad (7-13)$$

となり、波数に依存しない定数として表現できる。

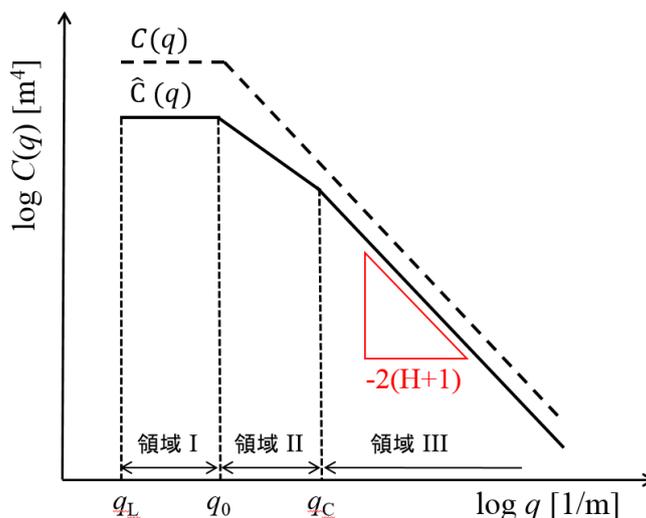


Fig. 7-3 Schematic view of modified power spectrum of surface roughness.

(ii) 領域 III

領域 III は、そのパワースペクトル $\hat{C}(q)$ が $\hat{C}(q) \propto q^{-2(H+1)}$ に従う領域であり、セルフアフィンフラクタル表面と同様の性質を示す。よって、式(7-11)における $h(\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau})$ および $h(\boldsymbol{\tau})$ が、共にセルフアフィンフラクタルな関係となる領域内に存在する必要がある。そこで、考慮すべきは、 $h(\mathbf{x}) \geq d$ を示す高さの平面における分布である。Fig. 7-4 は、 $h(\mathbf{x}) \geq d$ となる平面分布の例示的な図である。このとき、 $h(\mathbf{x}) \geq d$ を示す領域の和（図中、青枠の総面積）の全体面積に対する割合は、定義より $F(d)$ である。また、図に示されるように、 $h(\mathbf{x}) \geq d$ を示す平面位置は、集合体として表すことのできる幾つかの「群」として存在するといえる。領域 III におけるパワースペクトルの議論には、このような群の分布（以降、分布群と称する）の把握が必要不可欠である。

そこで、微小量 Δd に対して $h(\mathbf{x}) \geq d - \Delta d$ となる高さの平面分布を考える。すると、Fig. 7-5 に示すように、既に $h(\mathbf{x}) \geq d$ が存在していた分布群の裾野が広がるだけでなく、 $h(\mathbf{x}) = d$ で突起頂点となるような点が新たな分布群として出現する。したがって、このような高さ分布の集合体は、路面高さの突起頂点の密度に関連付けられるといえる。

Whitehouse と Archard は、路面高さ分布が正規分布に従う場合、高さ z が突起頂点となる確率密度 $f^*(z)$ を導出した[68]。このとき、突起頂点の確率密度関数 $f^*(z)$ は、

$$f^*(z) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\frac{z}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right) \right]^2 \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) \quad (7-14)$$

で表される。ここで、 z は $z = h/R_q$ と標準化された高さであり、 ρ は路面データを測定した際の平面位置のサンプリング間隔により決まる相関係数である。サンプリング間隔が大きい場合 $\rho \rightarrow 0$ となり、サンプリング間隔が小さい場合 $\rho \rightarrow 1$ となる。よって、本摩擦モデルのように連続した表面粗さを検討する場合、 $\rho \rightarrow 1$ による近似が適当である。式(7-14)の $\rho \rightarrow 1$ を取ると、

$$f^*(z) \simeq \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) \quad (7-15)$$

が得られる。このとき、 $h(\mathbf{x}) \geq d$ となる分布群の密度 $F^*(z)$ は $f^*(z \geq d/R_q)$ の累積分布より、

$$\begin{aligned} F^*(d) &= \int_{d/R_q}^{\infty} dz f^*(z) \\ &= \int_{d/R_q}^{\infty} dz \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{\sqrt{2}R_q} \right) \end{aligned} \quad (7-16)$$

と表される。以上より、 $h(\mathbf{x}) \geq d$ となる分布群 1 つの面積割合は、 $F(d) \times F^*(d)$ により計算できる。

ここで、領域 III の最小波数 q_c に対応する波長を $\lambda_c (= 2\pi/q_c)$ とする。すると、マクロな粗さを支配する波数の特徴量はロールオフ波数 q_0 であることから、この波長 λ_0 と λ_c との間の関係は、長さと同面積の相似則に従い、

$$\begin{aligned}\lambda_c &= \lambda_0 \sqrt{F(d)F^*(d)} \\ &= \lambda_0 \sqrt{\frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}R_q}\right) \frac{1}{8} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}R_q}\right)} \\ &= \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}R_q}\right) \lambda_0\end{aligned}\quad (7-17)$$

となる。よって、波数 q_c は、次式のとおり得られる。

$$\begin{aligned}q_c &= \frac{2\pi}{\lambda_c} \\ &= \frac{4}{\operatorname{erfc}(d/\sqrt{2}R_q)} \frac{2\pi}{\lambda_0} \\ &= \frac{4}{\operatorname{erfc}(d/\sqrt{2}R_q)} q_0\end{aligned}\quad (7-18)$$

したがって、 $q \geq q_c$ の波数領域では、式(7-11)における $h(\mathbf{x} + \boldsymbol{\tau})$ または $h(\boldsymbol{\tau})$ のどちらか一方が、路面修正後も非ゼロの値を有すれば良いから、領域 III における修正パワースペクトル $\hat{C}(q)$ は、

$$\begin{aligned}\hat{C}(q) &= F(d) \times C(q) \\ &= \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 F(d) \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1)}\end{aligned}\quad (7-19)$$

で表される。

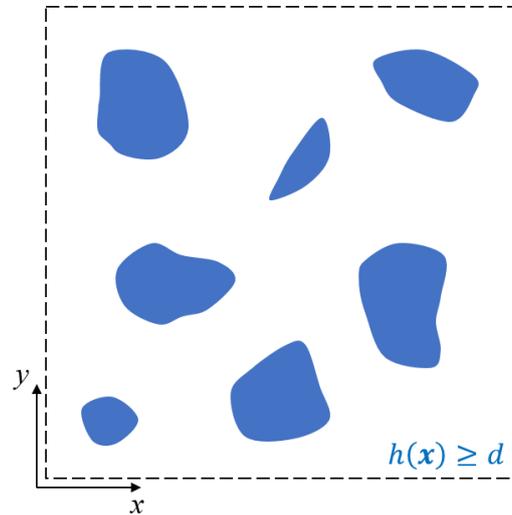


Fig. 7-4 Exemplary distribution of surface height equal to or more than d over $x - y$ plane.

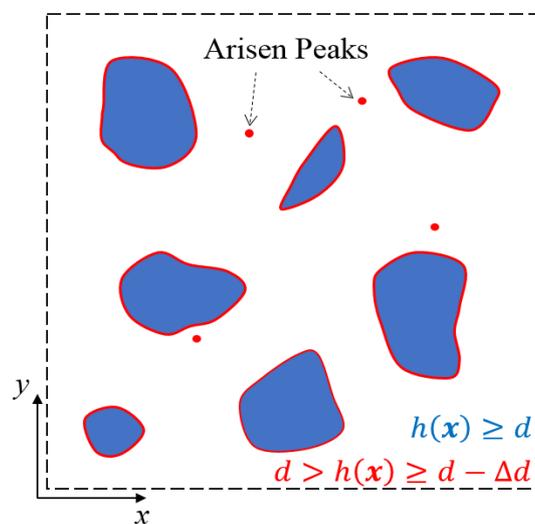


Fig. 7-5 Exemplary distribution of surface height equal to or more than $d - \Delta d$ over $x - y$ plane.

(iii) 領域 II

マクロスケールに従う領域 I およびセルフアフィンフラクタル表面と同様の特徴を示す領域 III の間に存在する領域 II は、中間波数帯として取り扱う。本理論では、領域 II の修正パワースペクトル $\hat{C}(q)$ は、領域 I と領域 III のパワースペクトルを対数スケールで線形補間することで表現する。すなわち、

$$\begin{aligned} \log \hat{C}(q) - \log \hat{C}(q_0) &= \frac{\log \hat{C}(q_c) - \log \hat{C}(q_0)}{\log q_c - \log q_0} (\log q - \log q_0) \\ \Leftrightarrow \log \frac{\hat{C}(q)}{\hat{C}(q_0)} &= \frac{\log\{\hat{C}(q_c)/\hat{C}(q_0)\}}{\log(q_c/q_0)} \log \frac{q}{q_0} \end{aligned} \quad (7-20)$$

で表す。

このとき、式(7-13)および式(7-19)より、

$$\hat{C}(q_0) = \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 \{F(d)\}^2 \quad (7-21)$$

$$\hat{C}(q_c) = \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 F(d) \left(\frac{q_c}{q_0}\right)^{-2(H+1)} \quad (7-22)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\hat{C}(q_c)}{\hat{C}(q_0)} &= \{F(d)\}^{-1} \left(\frac{q_c}{q_0}\right)^{-2(H+1)} \\ \Leftrightarrow \log \frac{\hat{C}(q_c)}{\hat{C}(q_0)} &= -\log F(d) - 2(H+1) \log \frac{q_c}{q_0} \end{aligned} \quad (7-23)$$

が求まる。よって、式(7-23)を式(7-20)に代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \hat{C}(q) &= \hat{C}(q_0) \left(\frac{q_c}{q_0}\right)^{-2(H+1) - \frac{\log F(d)}{\log(q_c/q_0)}} \\ &= \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 \{F(d)\}^2 \left(\frac{q_c}{q_0}\right)^{-2(H+1) - \frac{\log F(d)}{\log(q_c/q_0)}} \end{aligned} \quad (7-24)$$

以上より、各領域における修正パワースペクトル $\hat{C}(q)$ が表現され、次のとおりまとめることができる。

$$\hat{C}(q) = \begin{cases} \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 \{F(d)\}^2 & (\text{for } q \leq q_0) \\ \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 \{F(d)\}^2 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1) - \frac{\log F(d)}{\log(q_c/q_0)}} & (\text{for } q_0 < q \leq q_c) \\ \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 F(d) \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1)} & (\text{for } q_c < q) \end{cases} \quad (7-25)$$

ただし, $F(d)$ および q_c は, それぞれ式(7-9)および式(7-18)より計算される.

ここで, $d \rightarrow -\infty$ の場合, すなわち路面高さ $h(\mathbf{x})$ が一切カットされない場合を考える. 式(7-18)の q_c については,

$$\lim_{d \rightarrow -\infty} q_c = 2q_0 \quad (7-26)$$

となりロールオフ波数 q_0 の2倍の値に収束する. これは, 自己相関を計算する際に用いる2点と同じ分布群内に存在するという観点から q_c が求められているためであり, $d \rightarrow -\infty$ において分布群はすべて連続するようになるので, $\hat{C}(q)$ は $C(q)$ と一致するはずである. 実際に,

$$\lim_{d \rightarrow -\infty} F(d) = 1 \quad (7-27)$$

となることから, 領域IIの $\hat{C}(q)$ は $q^{-2(H+1)}$ に比例するようになり, $\hat{C}(q)$ は $C(q)$ へと収束することがわかる.

また, 波数 q_c に対する高さ d の影響は式(7-18)より計算することができ, Fig. 7-6のとおりである. 図中, それぞれ q_c/q_0 および d/R_q で無次元化している. 示されるように, d の増加に伴い q_c は急激に増加する傾向にある.

以上をまとめると, 路面高さ d 以上における部分接触を考慮した場合, 式(7-10)による $\hat{\sigma}_0$ および式(7-25)による $\hat{C}(q)$ を用いることで摩擦係数がPerssonの摩擦理論同様に計算され, 部分接触を考慮した摩擦モデルとすることができる.

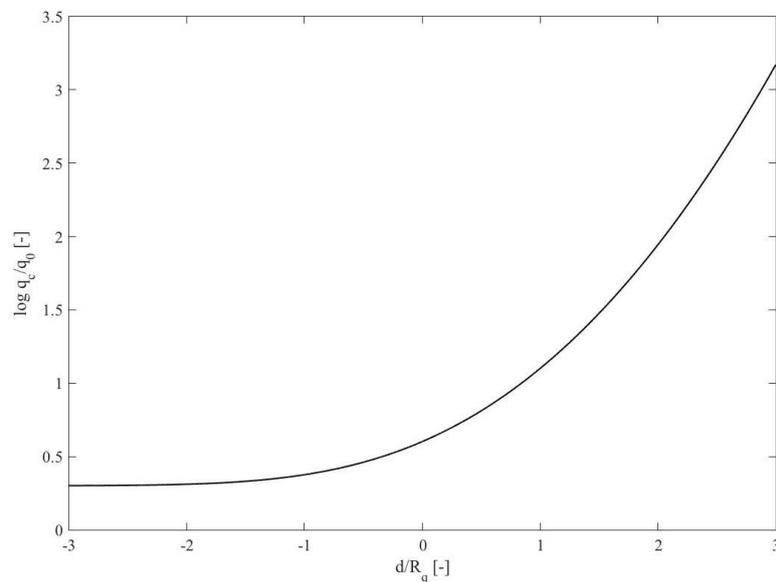


Fig. 7-6 Relationship between d and q_c .

ただし、本摩擦モデルは、路面粗さをカットする高さ d の値に大きく依存する。特に、ゴムが路面をすべる場合、釣り合う高さ d はすべり速度によって変化すると考えられる。しかし、本研究では、静的接触時の釣り合い位置 d_S を求め、この d_S を代表値として使うこととする。以下、 d_S の導出方法を付す。

修正後の路面高さ $\hat{h}(\mathbf{x})$ に従うゴムの変形量の期待値 $D(d)$ は、 $\hat{h}(\mathbf{x})$ の定義より次のとおりである。

$$\begin{aligned}
 D(d) &= \int_d^{\infty} dh (h-d)f(h) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}R_q} \left\{ \int_d^{\infty} dh h \exp\left(-\frac{h^2}{2R_q^2}\right) - d \int_d^{\infty} dh \exp\left(-\frac{h^2}{2R_q^2}\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}R_q} \left[-R_q^2 \exp\left(-\frac{h^2}{2R_q^2}\right) \right]_d^{\infty} - \frac{d}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}R_q}\right) \\
 &= \frac{R_q}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d^2}{2R_q^2}\right) - \frac{d}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}R_q}\right)
 \end{aligned} \tag{7-28}$$

また、このときゴムの厚さを W とすると、ひずみの期待値 $\varepsilon(d)$ は、

$$\varepsilon(d) = \frac{D(d)}{W} \tag{7-29}$$

で表される。よって、ゴムの静的な弾性率を E_S とすることで、部分接触の際に発生する応力 $\hat{\sigma}_0$ は、

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_0 &= E_S \varepsilon(d) \\
 &= \frac{E_S}{W} \left\{ \frac{R_q}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d^2}{2R_q^2}\right) - \frac{d}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}R_q}\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{7-30}$$

で表される。さらに、ゴムにかかる見かけの応力 σ_0 （負荷荷重をゴム面積で除算した値）と $h(\mathbf{x}) \geq d$ となる高さの割合 $F(d)$ より、 $\hat{\sigma}_0$ は式(7-10)と同じく、

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{2\sigma_0}{\operatorname{erfc}(d/\sqrt{2}R_q)} \tag{7-31}$$

で表現できる。したがって、静的に接触している場合は、式(7-30)および式(7-31)は等しくなるべきであるから、次の関係式が求まる。

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}R_q}\right) \left\{ \frac{R_q}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d^2}{2R_q^2}\right) - \frac{d}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d}{\sqrt{2}R_q}\right) \right\} - \frac{2\sigma_0 W}{E_S} = 0 \tag{7-32}$$

よって、 $d = d_S$ は式(7-32)を満たす解であり、数値解析的に求めることができる。

7.2 表面モデルに基づく表面粗さパワースペクトルの検討

7.2.1 概要

本節では、前節で導出した修正パワースペクトル $\hat{C}(q)$ の妥当性の検討を行う。このとき、部分接触モデルによるマクロな粗さからマイクロな粗さまでの詳細な影響を調査するには、路面高さを広範囲かつ非常に細かく精度よく測定する必要がある。しかし、実際の測定では、観察倍率を高くしつつ十分広い領域データを得ることは難しく、またデータにノイズが生じるなどの問題もある。本研究においても、路面サンプルのパワースペクトルを計算するにあたり、3つの異なる倍率を用いることで対応している (Fig. 5-3 参照)。そこで、本節では、数値的に作成された表面モデルを用いることで、広範囲かつ細い路面データの取得を可能にし、提案した修正パワースペクトルの検証を行うこととする。

7.2.2 表面粗さパワースペクトルからの表面モデルの作成

本項では、任意の表面粗さパワースペクトル $C(q)$ から表面モデル $h(\mathbf{x})$ を作成する方法をまず説明する。式(2-6)より、作成する路面データのサイズを $L \times L$ とすると、

$$|h(\mathbf{q})| = \frac{L}{2\pi} \sqrt{C(\mathbf{q})} \quad (7-33)$$

と表される。よって、 $h(\mathbf{q})$ は、ランダムな独立変数 $\phi(\mathbf{q})$ を用いて、

$$h(\mathbf{q}) = \frac{L}{2\pi} \sqrt{C(\mathbf{q})} e^{i\phi(\mathbf{q})} \quad (7-34)$$

となる。ここで、 $0 \leq \phi(\mathbf{q}) \leq 2\pi$ である。したがって、式(7-34)の逆フーリエ変換を取ることによって、数値的に作成された路面高さ $h(\mathbf{x})$ を、任意の $C(q)$ に対して次式のように得ることができる。

$$h(\mathbf{x}) = \int d^2q \frac{L}{2\pi} \sqrt{C(\mathbf{q})} e^{i\{\mathbf{q}\cdot\mathbf{x} + \phi(\mathbf{q})\}} \quad (7-35)$$

ただし、実際の計算においては逆離散フーリエ変換が用いられ、 $h(\mathbf{x})$ を実数空間で得るために逆フーリエ変換される行列は共役対称となるように修正される。

本論文で作成する表面モデルは、路面サンプルより得られた表面粗さパワースペクトルに従い計算される。すなわち、 $C(q)$ は Table 5-2 と同一のパラメータを用いて次式で表される。

$$C(q) = \begin{cases} \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 & (\text{for } q \leq q_0) \\ \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1)} & (\text{for } q_0 < q) \end{cases} \quad (7-36)$$

また、モデルサイズ $L \times L$ は $L = 0.1$ [m]とし、データのグリッド数 $N \times N$ に対しては $N = 16384$ を与えた。

以上の条件に従い作成された表面モデルの断面図の一例を Fig. 7-7 に示す。図より、様々な粗さを有する路面高さが得られていることがわかる。また、作成された表面モデルに対して再び表面粗さパワースペクトルを計算したところ、Fig. 7-8 に示す結果が得られた。図中、破線が路面を作成する際に入力されたパワースペクトルであり、赤字のプロットが表面モデルより計算されたパワースペクトルである。図から明らかなように、得られた表面モデルは指定のパワースペクトルを再現することが確認される。

さらに、作成された表面モデルにおいて $h \geq 50$ [μm]となる高さの平面分布を Fig. 7-9 に示す。なお、明確にするために、図は表面モデルを 1.0×1.0 cmの領域に拡大している。理論で導入したように、平面上には数多くの群が存在していることも確認することができる。

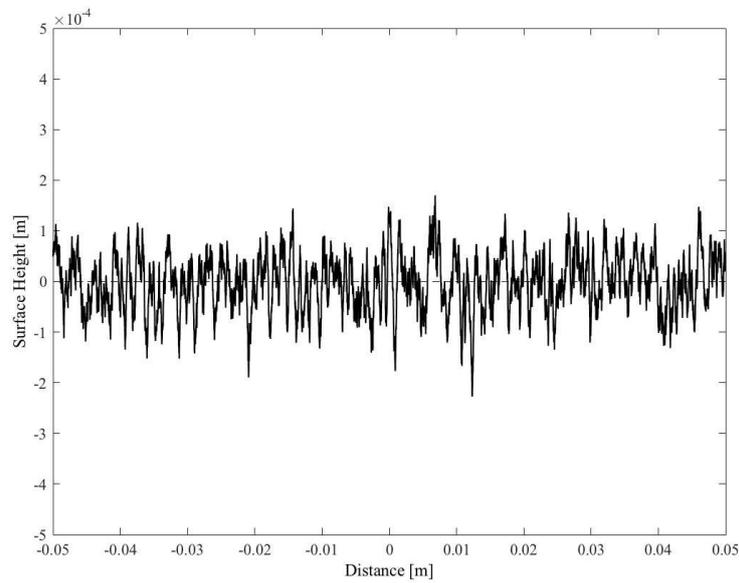


Fig. 7-7 Cross sectional view of numerically produced surface.

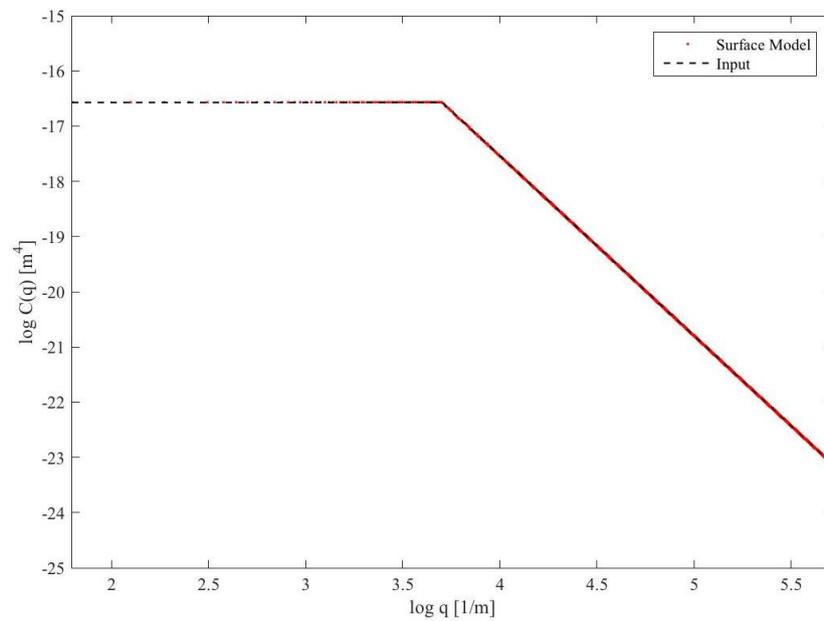


Fig. 7-8 The surface roughness power spectrum of the surface model.

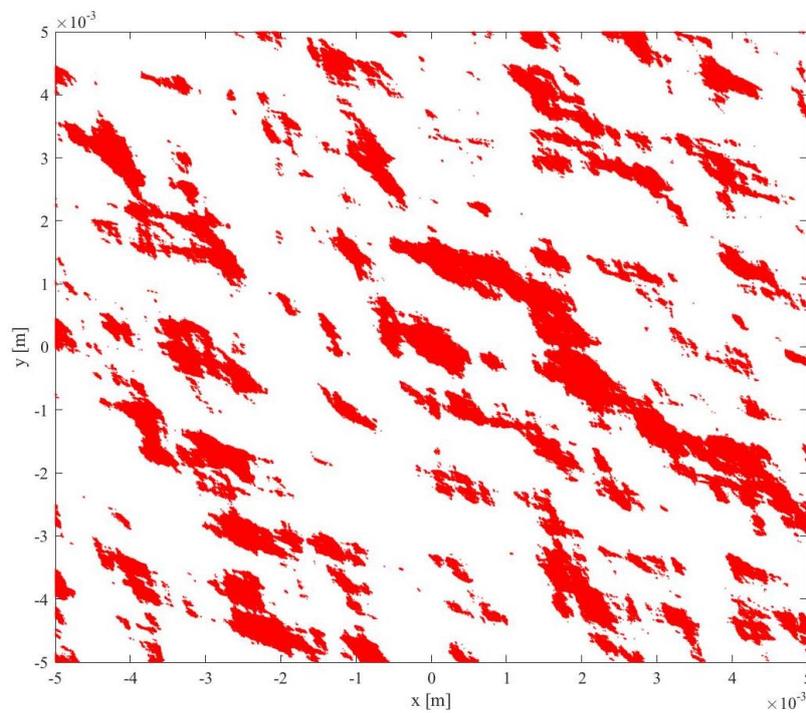


Fig. 7-9 Calculated distribution of surface height greater than or equal to $50 \mu\text{m}$ over $x - y$ plane.

7.2.3 各種表面パラメータ比較

部分接触を考慮した摩擦モデルを提案するにあたり、対象路面の仮定として「路面高さが正規分布に従うセルフアフィンフラクタル表面」であるとした。そこで、この仮定が路面サンプルおよび表面モデルに適用できるか本項で議論する。

まず、路面のセルフアフィンフラクタル性についてであるが、路面サンプルは 5.1.3 項より、表面モデルは 7.2.2 項より、それぞれセルフアフィンフラクタル表面といえる。

次に、路面高さが正規分布に従うかを検証する。路面サンプルの観察倍率 40 倍における測定データおよび 7.2.2 項で作成された表面モデルの確率密度を、それぞれ Fig. 7-10 および Fig. 7-11 に示す。Fig. 7-10 より、路面サンプルの分布のピークは負に位置しており、また分布の裾野の形状は非対称であってマイナス側が急激に落ち込んでいるのがわかる。一方、表面モデルは、Fig. 7-11 に示すように、 $h = 0$ [μm]を中心に対称的である。

ここで、2つの粗さパラメータを用いて定量的に理論との検証を実施する。粗さパラメータとして、路面高さのスキューネス R_{sk} およびクルトシス R_{ku} を用いる。スキューネス R_{sk} は、高さ分布の対称性を表す指標であり、

$$R_{sk} = \frac{1}{R_q^3} \frac{1}{A} \iint_A d^2x h^3(\mathbf{x}) \quad (7-37)$$

で定義される。正規分布に従うならば、 $R_{sk} = 0$ を示す。一方、クルトシス R_{ku} は、高さ分布の鋭さを表す指標であり、

$$R_{ku} = \frac{1}{R_q^4} \frac{1}{A} \iint_A d^2x h^4(\mathbf{x}) \quad (7-38)$$

で定義される。正規分布に従うならば、 $R_{ku} = 3$ を示す。

路面サンプル、表面モデル、および 7.1 節で提案した理論に対し、 R_q 、 R_{sk} 、および R_{ku} を計算し、Table 7-1 に結果をまとめる。二乗平均平方根粗さ R_q の理論値は、路面サンプルおよび表面モデルの結果と同じオーダーを有しており、理論により良く表現されているといえる。また、表面モデルは、 R_{sk} と R_{ku} とが共に理論値とほぼ同一の値を示していることから、正規分布に従っていることがわかる。しかし、路面サンプルは、 $R_{sk} > 0$ であるから高さ分布が平均値 $h = 0$ より下側に偏っており、 $R_{ku} > 3$ であるから正規分布よりも尖った分布を有していることが示されている。よって、測定された路面サンプルのデータは正規分布に従っているとはいえない。この結果が欠損点などの測定ノイズの影響によるものであるかなど、更なる議論をする必要がある。しかしながら、本節の目的である修正パワースペクトル検証という観点からは、正規分布に従うセルフアフィンフラクタル表面であることが確認された表面モデルを用いることで十分であると結論付けることができる。

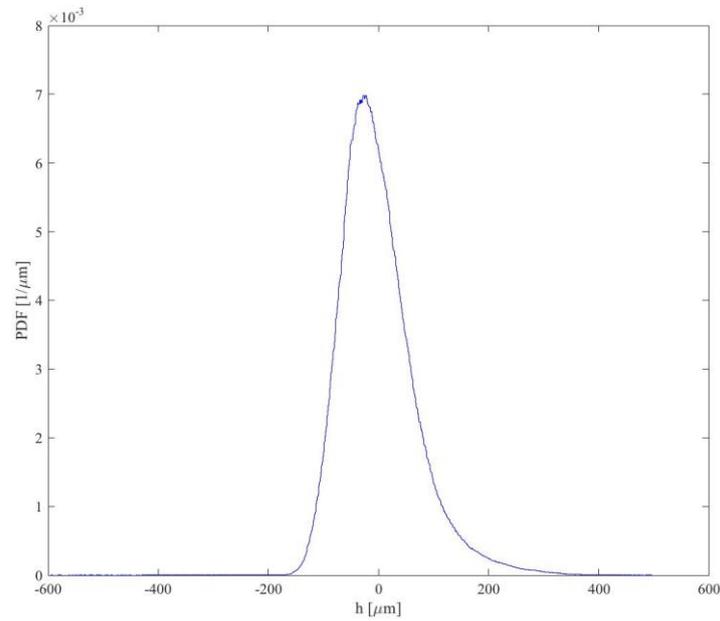


Fig. 7-10 Probability density function of the surface height of the surface sample observed at magnification $\times 40$.

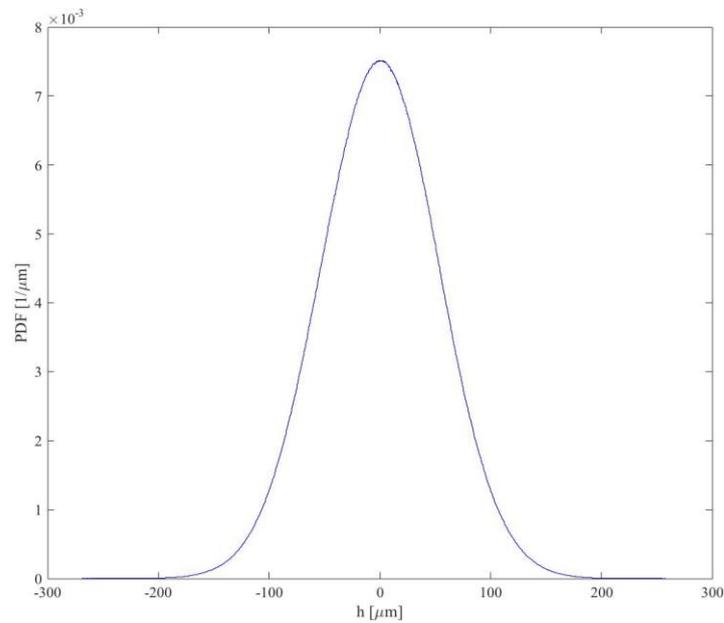


Fig. 7-11 Probability density function of the surface height of the calculated surface model.

Table 7-1 Comparison of surface properties.

	Surface Sample ($\times 40$)	Surface Model	Theory
R_q [μm]	68.0713	53.1248	58.6092
R_{sk} [-]	1.06527	0.00177	0
R_{ku} [-]	5.16006	2.98745	3

7.2.4 表面モデルによる理論検証

作成された表面モデルを高さ d で修正した場合のパワースペクトルを実際に計算し、理論と比較した。

カット高さ d は、理論より導出される R_q の相対値として設定した。すなわち、本章の以降の部分においては、 $R_q = h_0/\sqrt{2} = 58.6092 [\mu\text{m}]$ として与え、表面モデルより計算される $R_q = 53.1248 [\mu\text{m}]$ は用いていないことに留意されたい (Table 7-1 参照)。

本節では、 $d = -R_q, -R_q/2, 0, R_q/2$, および R_q の5つの値を採用し、計算された修正パワースペクトルを Fig. 7-12 から Fig. 7-16 にそれぞれ示す。なお、数値的に計算された表面モデルにおいてもパワースペクトルを計算する際には、路面サンプルの $C(q)$ を求める場合と同様に平均化処理を実施した (付録 C 参照)。図中、赤字のプロットが表面モデルより計算されたパワースペクトル $\hat{C}(q)$ であり、破線が表面モデル作成時に設定したパワースペクトル $C(q)$ を、実線が式(7-25)の理論式より計算される修正パワースペクトル $\hat{C}(q)$ を表す。

$d = -R_q, -R_q/2$, および 0 の3つの場合については、理論による $\hat{C}(q)$ が表面モデルの $\hat{C}(q)$ を精度よく表現できている。しかし、 $d = R_q/2$ および $d = R_q$ においては、領域 I のパワースペクトルは良く一致しているが、領域 II と領域 III では値が乖離している。領域 III では、表面モデルが理論よりも低いパワースペクトルを示している。データのメッシュを細かくしても、データが離散的であるが故に、路面をカットする高さ d が大きくなるにつれ再現できる情報量が減少し、路面高さの自己相関の度合いが低く見積もられるに至ったためだと考えられる。一方、領域 II は、表面モデルの $\hat{C}(q)$ は上に凸な曲線を示し、理論で導入した直線近似よりも大きなパワースペクトルを示している。これは、異なる分布群に属する表面高さ同士の自己相関が寄与している影響と考えられ、本理論では考慮していない分布群同士の相関も厳密には考慮する必要があると示唆される。しかしながら、 $d > 0$ の場合においても理論式は修正パワースペクトルの特性および傾向を十分に表現できているといえ、引き続き式(7-25)より求められる $\hat{C}(q)$ を採用することとする。

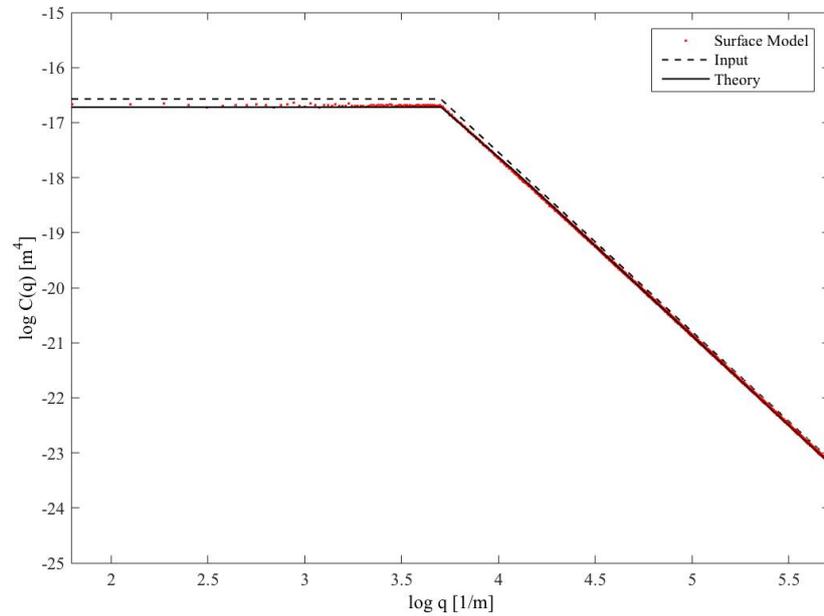


Fig. 7-12 Modified surface roughness power spectrum of the surface model where $d=-R_q$.

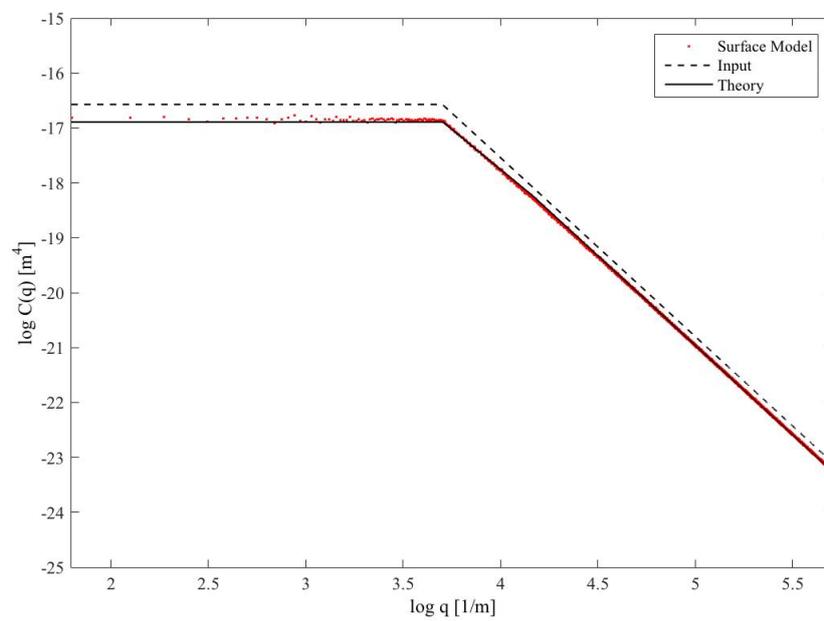


Fig. 7-13 Modified surface roughness power spectrum of the surface model where $d=-R_q/2$.

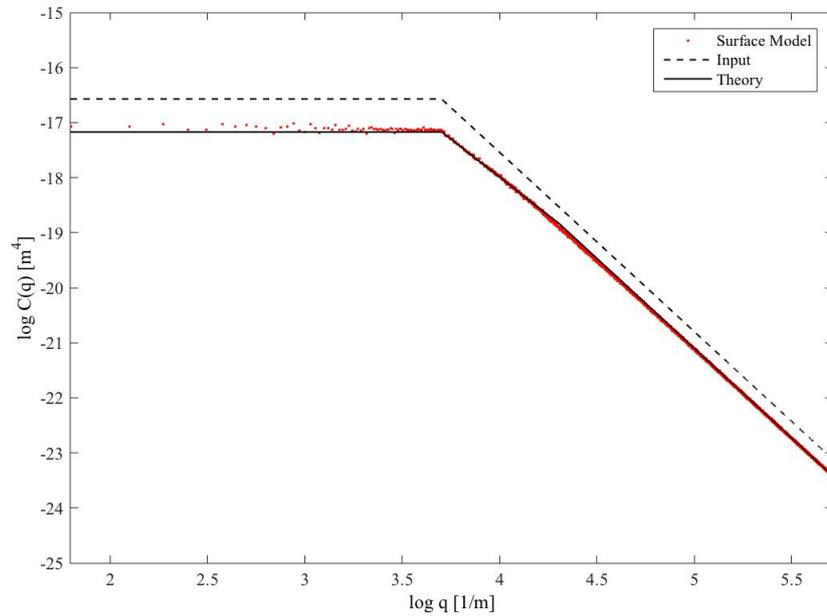


Fig. 7-14 Modified surface roughness power spectrum of the surface model where $d=0$.

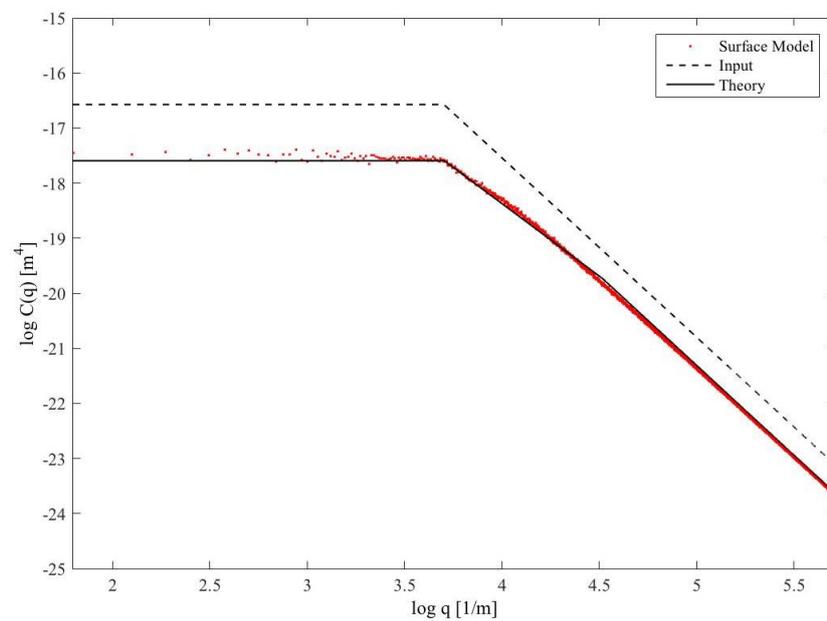


Fig. 7-15 Modified surface roughness power spectrum of the surface model where $d=R_q/2$.

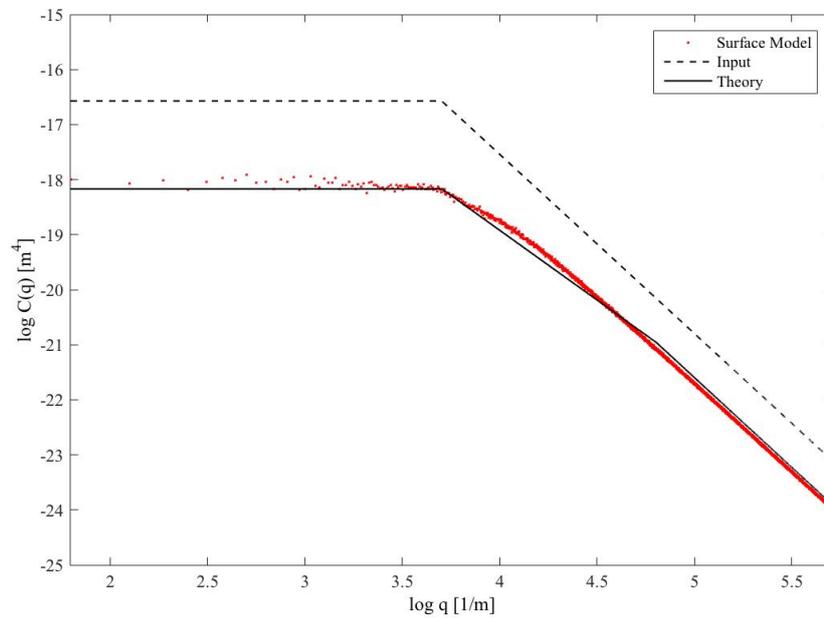


Fig. 7-16 Modified surface roughness power spectrum of the surface model where $d=R_q$.

7.3 特性値の挙動

本節では、提案した摩擦モデルにおける特性値、特に修正パワースペクトル $\hat{C}(q)$ および静的接触時の釣り合い位置 d_s について、その挙動を述べる。

修正パワースペクトルについて、7.2.4 項で計算した $d = -R_q, -R_q/2, 0, R_q/2$ 、および R_q における $\hat{C}(q)$ を同一図にまとめ、Fig. 7-17 に示す。設定したパワースペクトル $C(q)$ (図中破線) に対し、 d が増加するほど $\hat{C}(q)$ の減少が顕著になっている。同様に、Fig. 7-6 で示したように、波数 q_c も d に伴い増加することが修正パワースペクトルより確認できる。

次に、釣り合い位置 d_s を求める。式(7-32)を解くにあたり、見かけの応力 σ_0 およびゴム厚さ W は、摩擦試験で用いた条件に合わせた。また、静的な弾性率 E_s は、動の入力の周波数およびひずみがゼロにおける弾性率に等しいため、5.2.4 項で得られた拡張 Maxwell モデルの E_0 を用いることとした。具体的な数値に関しては、Table 7-2 に示すとおりである。以上の条件より、式(7-32)を解くことで $d_s = 60.1595$ [μm]が得られた。このとき、 $F(d_s) = 15.2339$ [%]となり、本研究の条件においては、ゴムサンプル全面が路面と接するとした Persson の理論は接触状態を過剰評価していることがわかる。また、 $d = d_s$ における修正パワースペクトル $\hat{C}(q)$ を Fig. 7-18 に示す。本条件では、 d_s は R_q と近い値となったので、 $\hat{C}(q)$ の傾向は Fig. 7-17 中の $d = R_q$ (赤線) とほぼ同様であり、本来のパワースペクトル $C(q)$ より非常に小さく評価すべきであることが示される。

また、この釣り合い位置 d_s と見かけの応力 σ_0 との関係は、式(7-32)を変換することで、

$$\sigma_0 = \frac{E_s}{2W} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_s}{\sqrt{2}R_q}\right) \left\{ \frac{R_q}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{d_s^2}{2R_q^2}\right) - \frac{d_s}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{d_s}{\sqrt{2}R_q}\right) \right\} \quad (7-39)$$

と表すことができる。よって、 $-3R_q \leq d_s \leq 3R_q$ の範囲において、必要となる σ_0 を計算し、Fig. 7-19 に示す。 $F(-3R_q) = 99.865$ [%]であり、 $d_s = -3R_q$ のとき $\sigma_0 = 0.6084$ [MPa]であるから、ゴムが路面と完全に接触するには MPa オーダーの応力を負荷する必要がある。これは、摩擦試験における負荷荷重を 80 kg 程度にしなければならないことを意味する。

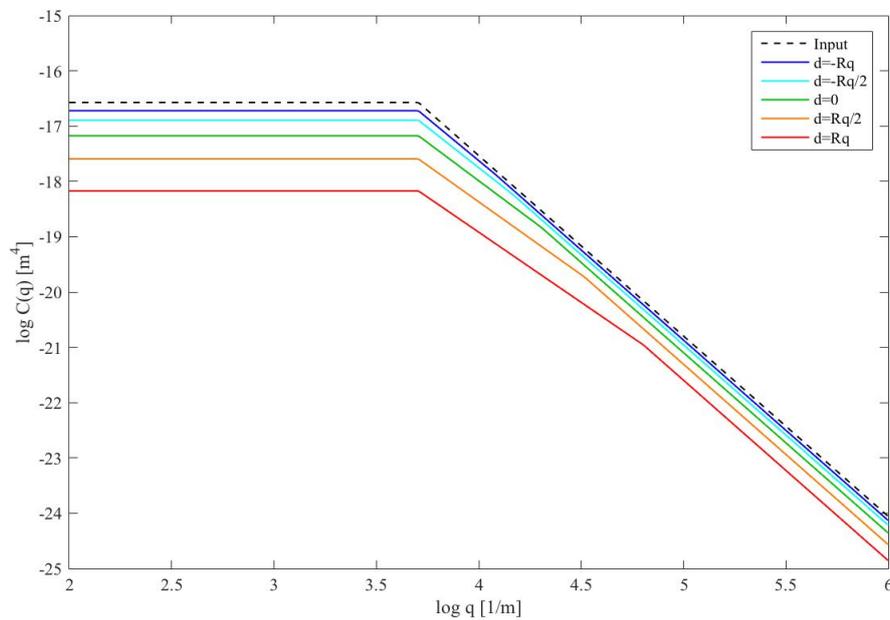


Fig. 7-17 Modified surface roughness power spectrum of the surface model for five different cutting height.

Table 7-2 Input parameters for calculating static contact surface height.

R_q [μm]	58.6092
σ_0 [Pa]	2450.0
W [mm]	2.0
E_S [MPa]	6.9291

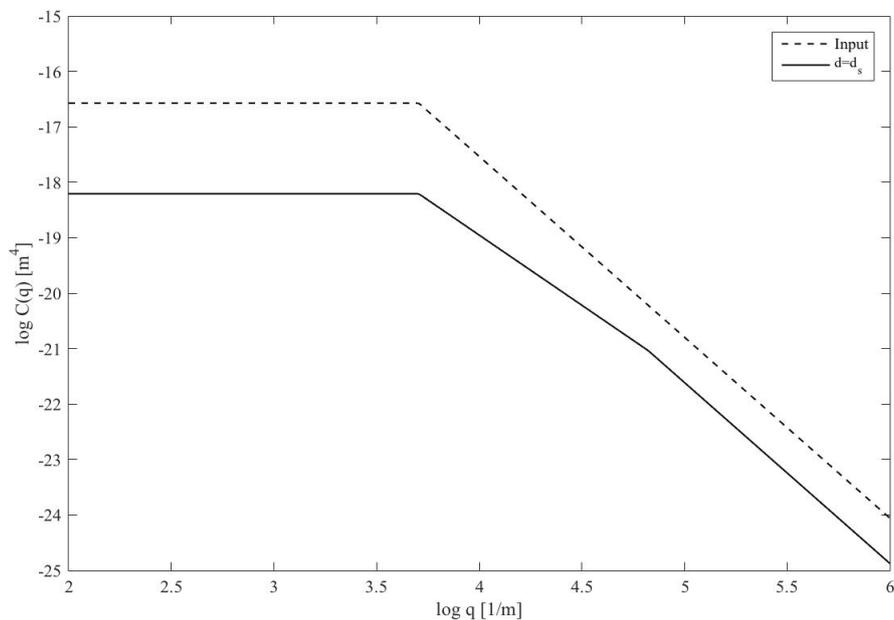


Fig. 7-18 Modified surface roughness power spectrum of the surface model where $d=d_s$.

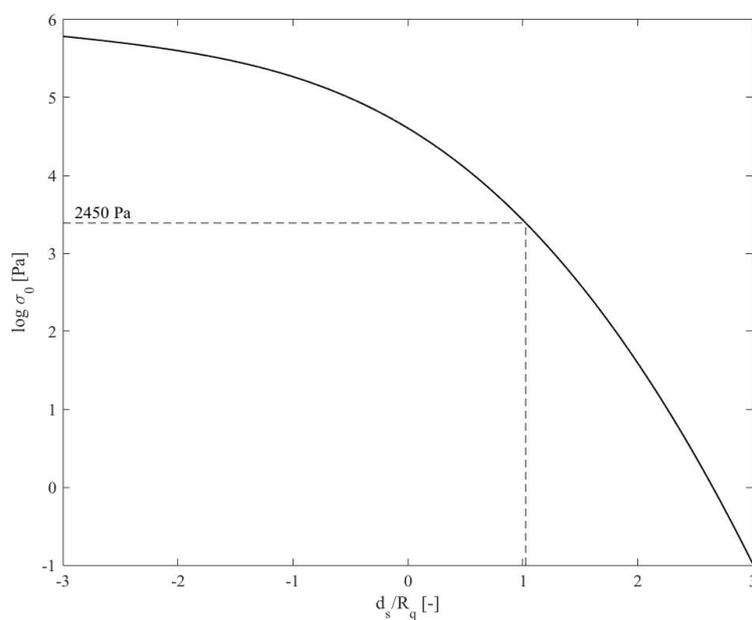


Fig. 7-19 Calculated nominal stress as a function of d_s under static contact condition.

7.4 計算条件

7.1 節で提案した部分接触を考慮することによる摩擦係数への影響を評価する．摩擦係数を計算するために必要な諸式をここに再掲する．

$$\mu = \frac{1}{2} \int_{q_0}^{q_1} dq q^3 \hat{C}(q) \hat{P}(q) \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(q\nu \cos \phi)}{(1-\nu^2)\hat{\sigma}_0}$$

ただし、 $\hat{C}(q)$ は修正表面粗さパワースペクトル、 $\hat{P}(q)$ は修正路面における真実接触面積の割合、 $\hat{\sigma}_0$ は修正路面上に生じる見かけの応力である．それぞれ次式で表される．

$$\hat{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{F(d)}$$

$$\hat{C}(q) = \begin{cases} \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 \{F(d)\}^2 & (\text{for } q \leq q_0) \\ \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 \{F(d)\}^2 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1) - \frac{\log F(d)}{\log(q_c/q_0)}} & (\text{for } q_0 < q \leq q_c) \\ \frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 F(d) \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1)} & (\text{for } q_c < q) \end{cases}$$

$$\hat{P}(q) = \left(1 + [\pi \hat{G}(q)]^{3/2}\right)^{-1/3}$$

$$\hat{G}(q) = \frac{1}{8} \int_{q_0}^q dq q^3 \hat{C}(q) \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(q\nu \cos \phi)}{(1-\nu^2)\hat{\sigma}_0} \right|^2$$

さらに上式において、二乗平均平方根粗さの理論解 $R_q = h_0/\sqrt{2}$ を用いて、

$$F(d) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{d}{\sqrt{2}R_q} \right)$$

$$q_c = \frac{4}{\operatorname{erfc}(d/\sqrt{2}R_q)} q_0$$

が計算される．計算条件は表面粗さパワースペクトルおよび見かけの応力を除き Table 6-1と同様である．ゴムの複素弾性率は、補間モデル、一般化Maxwellモデル、および拡張Maxwellモデルの3手法を用いて求められる．このとき、 $d = -R_q, -R_q/2, 0, R_q/2, R_q$ 、および d_5 の6つの異なる値を用いることで摩擦係数に対する効果を論ずる．

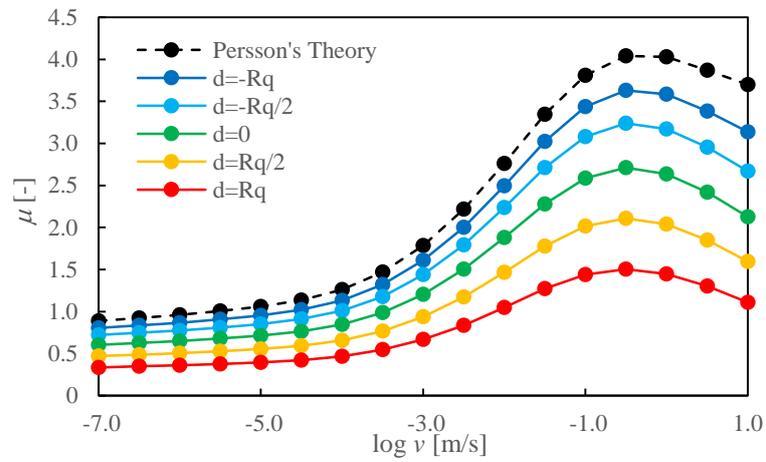
7.5 計算結果

$d = -R_q, -R_q/2, 0, R_q/2, R_q$ の 5 つの場合について、 $\zeta = 3000$ におけるすべり速度に対する部分接触を考慮した摩擦係数の計算結果を Fig. 7-20 に示す。6.3 節と同様、ゴムの弾性率を補間モデル、一般化 Maxwell モデル、および拡張 Maxwell モデルにより表現した際の結果について、それぞれ(a), (b), および(c)を付している。各図において、破線で示されているのは、6 章で計算した Persson の摩擦理論による摩擦係数である。部分接触を取り入れることで摩擦係数が減少し、その減少幅は d の増加に伴い大きくなる。基準高さ d の影響は低速度側よりも高速度側でより大きくなっていることがわかる。しかしながら、部分接触を考慮しても、Persson の理論と比較して、摩擦係数がピークを示すすべり速度に対しては大きな影響を与えてはいない。

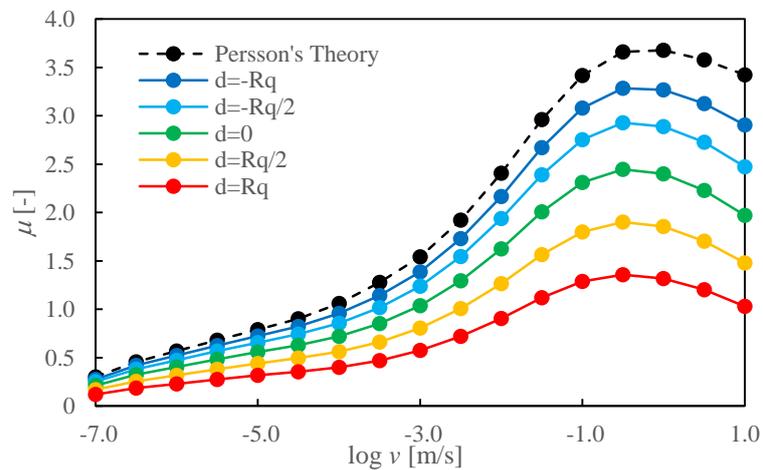
また、 $v = 1.0$ [mm/s]における、倍率 ζ に対する真実接触面積率 P の計算結果を Fig. 7-21 に示す。本図に示しているのは Persson の接触理論に基づき計算される接触面積率であり、部分接触モデルにおいてもゴムは修正路面に沿っていると考え、 $\hat{P}(q_0) = 1$ となる点に留意されたい。倍率が 1 を超えると真実接触面積率は急激に減少する傾向は変わらないが、部分接触を考慮した場合、マイクロ領域での接触率は d の増加に伴い大きくなる。

次に、複素弾性率の評価方法による影響について議論する。 $d = d_s$ における、 $\zeta = 3000$ の際のすべり速度と摩擦係数の関係を Fig. 7-22 に示す。同様に、 $d = d_s$ とした際の $v = 1.0$ [mm/s]における倍率と真実接触面積率の関係を Fig. 7-23 に示す。両図における点線、破線、および実線が、それぞれ補間モデル、一般化 Maxwell モデル、および拡張 Maxwell モデルに対応している。摩擦係数および真実接触面積率は、部分接触を考慮しても複素弾性率の表現方法により大小関係が変化しないことがわかる。補間モデル、一般化 Maxwell モデル、および拡張 Maxwell モデルについて、 $\zeta = 3000$ における摩擦係数の最大値は、Persson の摩擦理論ではそれぞれ 4.04, 3.68, および 4.30 となったが、部分接触モデルでは 1.47, 1.33, および 1.57 となった。部分接触を考慮することで、摩擦試験で得られた摩擦係数と同程度の大きさの結果が得られた。また、複素弾性率の表現方法に依らず、 $d = d_s$ においては、 $\zeta > 100$ の領域で接触面積率 $\hat{P}(q)$ は Persson の理論よりも約 16~17 倍大きく見積もられている。すなわち、部分接触によって見かけ上の接触面積が小さくなるが、マイクロ領域側では比較して接触領域が増加することを意味する。

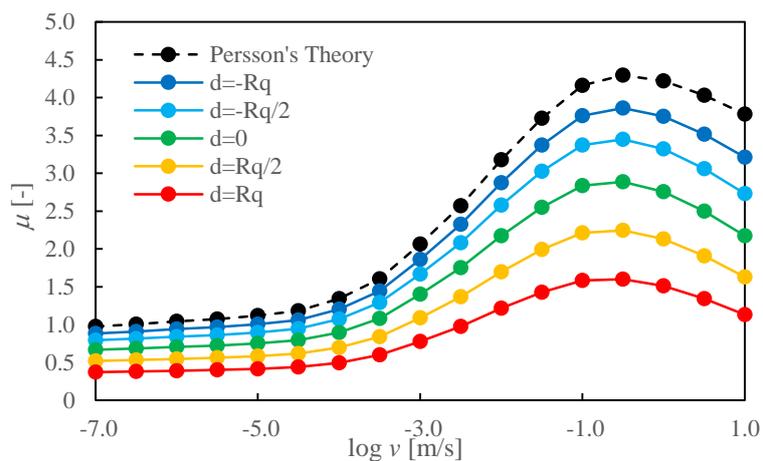
以上より、複素弾性率の評価手段に依らず、部分接触モデルを摩擦理論に取り入れることで、従来の摩擦理論よりも摩擦係数を低く見積もることができ、本研究で実施した摩擦試験結果と同じオーダーの摩擦係数が得られることが確認された。



(a)

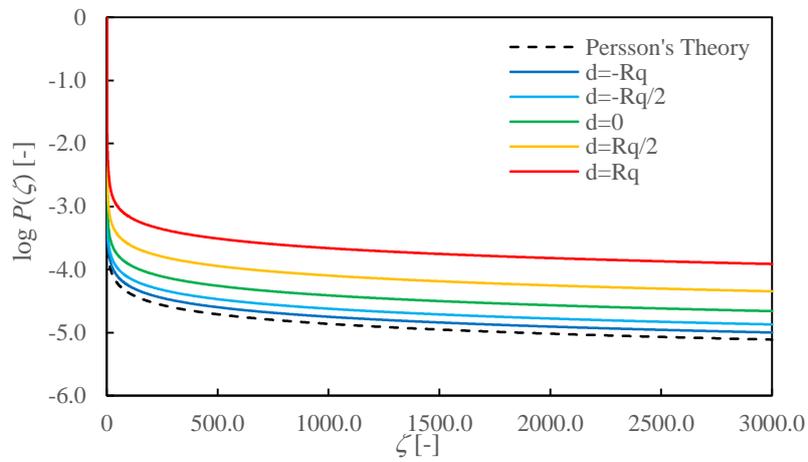


(b)

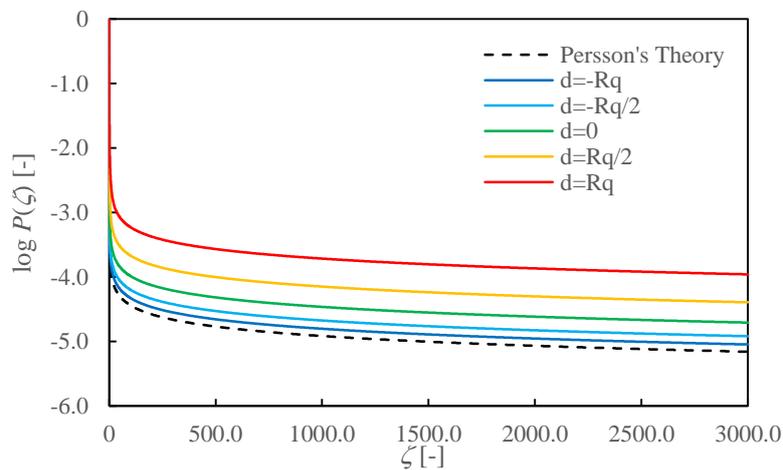


(c)

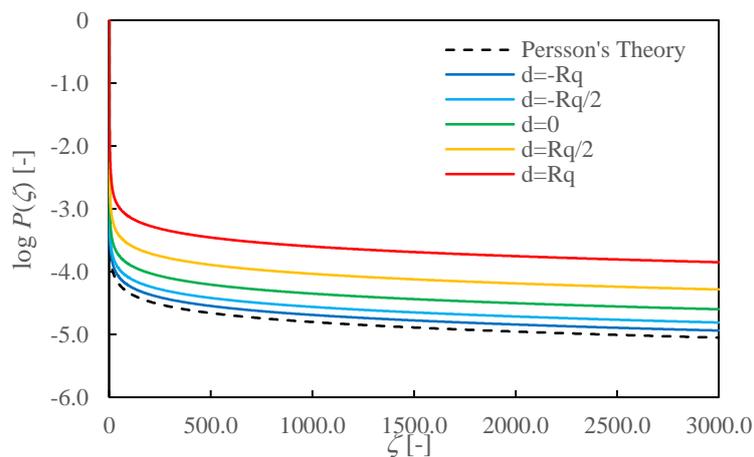
Fig. 7-20 μ - v curve based on partial contact theory;
(a) Interpolation, (b) Generalized Maxwell model, (c) Extended Maxwell model.



(a)



(b)



(c)

Fig. 7-21 The fraction of real contact area based on partial contact theory;
(a) Interpolation, (b) Generalized Maxwell model, (c) Extended Maxwell model.

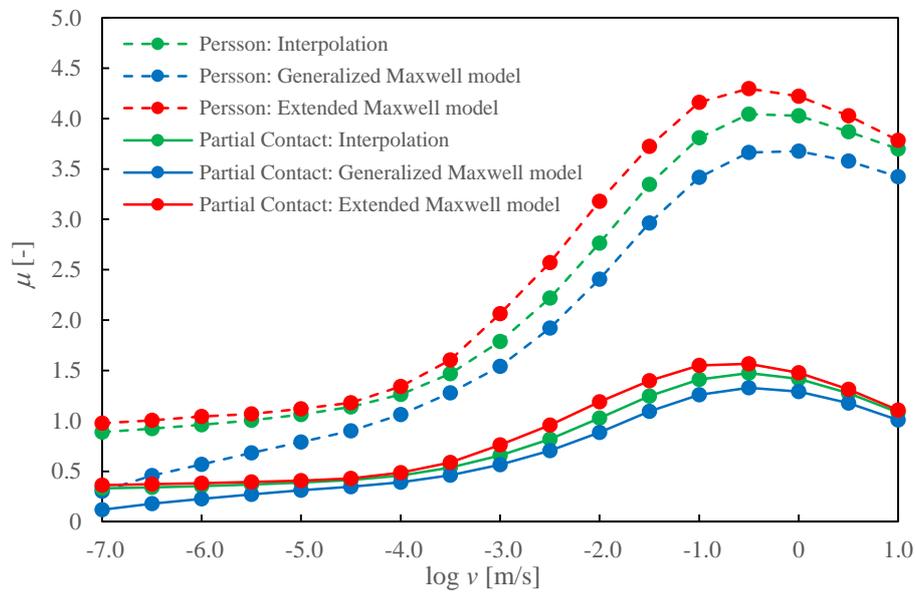


Fig. 7-22 Comparison between friction coefficients with Persson's and partial contact theories for $d=d_s$ and $\zeta=3000$.

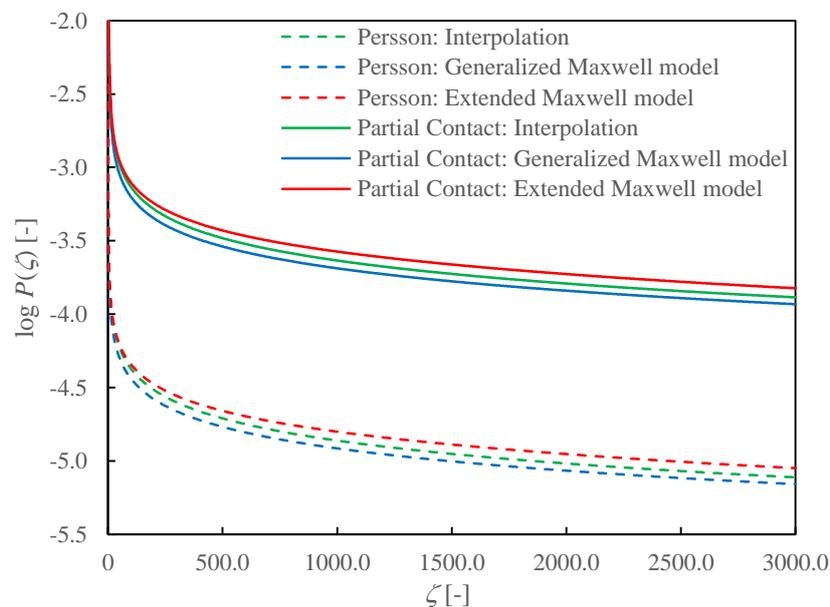


Fig. 7-23 Comparison between the fraction of real contact areas with Persson's and partial contact theories for $d=d_s$ and $\zeta=3000$.

8 非線形粘弾性を考慮した摩擦係数予測

8.1 ひずみ依存性を考慮した摩擦モデルの定式化

前節までの摩擦理論においては、ゴムの変形による損失エネルギーを実空間からフーリエ変換し周波数空間で論じることで、摩擦係数を導出した。当該理論では、ゴムの変位量を路面高さで与え、路面高さの表面粗さパワースペクトルを用いることで周波数ごとの強度を表現しており、ゴムの弾性率は対応する周波数の複素弾性率として与えている。すなわち、ゴムの弾性率は、周波数のみに依存する値として計算されている。しかしながら、3.4節および5.2.4項で説明したように、ゴムの複素弾性率はひずみに依存し、その影響を無視することはできない。したがって、本章では、周波数依存性だけでなくひずみ依存性も考慮した非線形粘弾性に基づく摩擦モデルについて説明する。

はじめに、複素弾性率による動的性質を整理する。ひずみの強制振動を $\varepsilon = \varepsilon_D e^{i\omega t}$ で与えた場合の応力 $\sigma = \sigma_D e^{i(\omega t + \delta)}$ は、次のとおり表される[7]。

$$\sigma = \sqrt{E'^2 + E''^2} \varepsilon_D e^{i(\omega t + \delta)} \quad (8-1)$$

ここで、 δ は応力とひずみとの間の位相差を表し、損失正接を用いて、

$$\tan \delta = \frac{E''}{E'} \quad (8-2)$$

の関係を示す。よって、応力振幅 σ_D は、

$$\sigma_D = \sqrt{E'^2 + E''^2} \varepsilon_D \quad (8-3)$$

と書ける。以上より、複素弾性率とひずみによる応力関係式が導かれる。

本研究では、波数ごとに成立する垂直応力の陰関数を表現し、陰関数を満たす複素弾性率を用いて摩擦係数を計算することで、非線形粘弾性を反映させた摩擦モデルとする。ここで、角周波数 ω およびひずみ ε を変数として、複素弾性率を $E'(\omega, \varepsilon)$ および $E''(\omega, \varepsilon)$ と表現する。また、波数 q における応力とひずみをそれぞれ σ_q および ε_q と表す。このとき、4.2.1項で導出した接触理論より、 σ_q は次式で計算される。

$$\sigma_q = \sigma(q, \varepsilon_q) = \frac{\sigma_0}{P(q, \varepsilon_q)} \quad (8-4)$$

ただし、 σ_0 は見かけの応力であり、 $P(q, \varepsilon_q)$ は真実接触面積率である。このとき、 $P(q, \varepsilon_q)$ は、式(4-22)および式(4-24)より、次式のとおりである。

$$P(q, \varepsilon_q) = \left(1 + [\pi G(q, \varepsilon_q)]^{3/2}\right)^{-1/3} \quad (8-5)$$

$$G(q, \varepsilon_q) = \frac{1}{8} \int_{q_0}^q dq' q'^3 C(q') \int_0^{2\pi} d\phi \left| \frac{E(\omega, \varepsilon_q)}{(1 - \nu^2)\sigma_0} \right|^2 \quad (8-6)$$

また、式(8-3)より、 σ_q は次式を満たす。

$$\sigma_q = \sqrt{E'(\omega, \varepsilon_q)^2 + E''(\omega, \varepsilon_q)^2} \varepsilon_q \quad (8-7)$$

このとき、式(8-4)および式(8-7)は一致すべきであり、 ε_q による陰関数として表される。よって、上記陰関数を満たす ε_q を波数領域で求め、 ε_q に基づく複素弾性率を用いることで、非線形粘弾性を表現することができる。ここで、 $q_0 \leq q \leq q_1$ において陰関数を満たす ε_q の分布が求められれば、Perssonの摩擦理論に基づき、摩擦係数は以下のとおり計算される。

$$\mu = \frac{1}{2} \int_{q_0}^{q_1} dq q^3 C(q) P(q, \varepsilon_q) \int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(\omega, \varepsilon_q)}{(1 - \nu^2) \sigma_0} \quad (8-8)$$

以上より、波数ごとに釣り合う ε_q を求めることで、非線形粘弾性を考慮した摩擦モデルを定式化できた。

Lorenzらは、同様に波数ごとに釣り合う応力を求めることで、ひずみ依存性も考慮した摩擦モデルを提案しているが、応力の陰関数に近似を施し単純化している[13]。しかし、本研究では、同様の近似は行わず、Perssonの接触理論を直接考慮した陰関数表現を用いることとする。

8.2 非線形粘弾性挙動の表現手法

8.1 節で説明した非線形粘弾性を考慮した摩擦モデルにおいては、任意の角周波数 ω およびひずみ ε に対して複素弾性率 $E(\omega, \varepsilon)$ が表現可能でなければならない。よって、本研究では、周波数依存性を表す手法とひずみ依存性を表す手法との組み合わせ、および周波数依存性とひずみ依存性との両方を同時に表現する拡張 Maxwell モデルを用いる。

はじめに、それぞれ角周波数とひずみを変数とする 2 つの表現を組み合わせ $E(\omega, \varepsilon)$ を計算する方法について説明する。周波数依存性を表現する手段は、次の 2 つである。

(i) 周波数依存データ補間モデル (IFF : Interpolation For Frequency dependency)

周波数依存データを内挿および外挿を行い、任意の角周波数 ω に対し弾性率を計算する。具体的には、内挿に対しスプライン補間、外挿に対し線形補間を採用する。このときの複素弾性率を $E'_{\text{IFF}}(\omega)$ および $E''_{\text{IFF}}(\omega)$ と表し、それぞれの挙動は Fig. 5-4 に示すとおりである。

(ii) 一般化 Maxwell モデル (GMM : Generalized Maxwell Model)

一般化 Maxwell モデルは、高分子材料の周波数依存性をよく表現できることが知られているが、角周波数のみを変数とし、ひずみに依存しない手法である。ここで、一般化 Maxwell モデルによる複素弾性率をそれぞれ、 $E'_{\text{GMM}}(\omega)$ および $E''_{\text{GMM}}(\omega)$ と表す。 $E'_{\text{GMM}}(\omega)$ および $E''_{\text{GMM}}(\omega)$ は、293.2.2 項で導出したように、以下の式に従う。

$$E'_{\text{GMM}}(\omega) = E_0 + \sum_{i=1}^n \frac{E_i z_i^2 \omega^2}{z_i^2 \omega^2 + 1} \quad (8-9)$$

$$E''_{\text{GMM}}(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{E_i z_i \omega}{z_i^2 \omega^2 + 1} \quad (8-10)$$

本章で用いる一般化 Maxwell モデルのパラメータは、5.2.2 項でフィッティングした結果を変更せず使い、詳細な値は Table 5-4 に示される。このとき、複素弾性率の挙動は Fig. 5-5 に示されるとおりである。

次に、ひずみ依存性を表現する手段について述べる。ここで、 $E(\omega, \varepsilon)$ を表現するにあたり、周波数依存を表現する手法をひずみ依存性を表現する手法に組み込むことで対応する。詳細を以下に説明する。

(i) ひずみ依存データ補間モデル (IFS : Interpolation For Strain dependency)

周波数依存データと同様、ひずみ依存データに対しても内挿および外挿を行い、複素弾性率を表現する。本手法においても、内挿に対しスプライン補間、外挿に対し線形補間を採用する。このときの複素弾性率を $E'_{\text{IFS}}(\varepsilon)$ および $E''_{\text{IFS}}(\varepsilon)$ と表し、それぞれの挙動は Fig. 5-7 に示したとおりである。

ここで、ひずみ依存データはひずみ振幅 $\varepsilon_0 = 0.1\%$ で測定されたものであるから、 $E'_{\text{IFS}}(\varepsilon_0)$ および $E''_{\text{IFS}}(\varepsilon_0)$ との相対値を周波数依存表現 $E'(\omega)$ および $E''(\omega)$ に乘算することで複素弾性率 $E(\omega, \varepsilon)$ を求める。すなわち、 $E(\omega, \varepsilon)$ は、次の式で表される。

$$E'(\omega, \varepsilon) = E'(\omega) \times \frac{E'_{\text{IFS}}(\varepsilon)}{E'_{\text{IFS}}(\varepsilon_0)} \quad (8-11)$$

$$E''(\omega, \varepsilon) = E''(\omega) \times \frac{E''_{\text{IFS}}(\varepsilon)}{E''_{\text{IFS}}(\varepsilon_0)} \quad (8-12)$$

(ii) Kraus モデル (KRM : KRaus Model)

Kraus モデルは、Payne 効果と呼ばれるひずみ依存性を表現するが、周波数依存性を取り入れるには Kraus モデルの特性値を周波数ごとに設定する必要がある。

最初に、Kraus モデルによる複素弾性率を再掲すると、以下の式で表される。

$$E'(\varepsilon) = E'_{\infty} + \frac{E'_0 - E'_{\infty}}{1 + (\varepsilon/\varepsilon_c)^{2m}} \quad (8-13)$$

$$E''(\varepsilon) = E''_{\infty} + \frac{2(E''_m - E''_{\infty})(\varepsilon/\varepsilon_c)^m}{1 + (\varepsilon/\varepsilon_c)^{2m}} \quad (8-14)$$

ここで、 ε_c は損失弾性率がピークを示すひずみ量であり、そのときの損失弾性率が E''_m である。また、 $\varepsilon \rightarrow 0$ をとしたときの貯蔵弾性率が E'_0 であり、 $\varepsilon \rightarrow \infty$ をとしたときの貯蔵弾性率および損失弾性率がそれぞれ E'_{∞} および E''_{∞} である。また、 m は独立変数である。

上述した Kraus モデルのパラメータは、厳密には周波数ごとに調査し確定する必要がある。本研究では、 E'_0 および E''_m のみを周波数に依存する変数として扱い、 ε_c 、 E'_{∞} 、および E''_{∞} は周波数に依存しない定数として扱う。すなわち、周波数が変化しても、損失弾性率が最大となるひずみ位置は変化せず、 $\varepsilon \rightarrow \infty$ において貯蔵弾性率および損失弾性率が漸近していく値は変化しない。また、 E'_0 は通常 $\varepsilon < 0.01\%$ における値を用いるべきであり[57]、 E''_m は1%前後での値となる。しかし、本研究で用いるゴムサンプルに対しては周波数データを $\varepsilon_0 = 0.1\%$ で測定しているため、 E'_0 および E''_m は周波数データの相対値として表現する。 E'_0 および E''_m は、定数 α と β とを用いて、

$$E'_0 = \alpha E'(\omega) \quad (8-15)$$

$$E''_m = \beta E''(\omega) \quad (8-16)$$

と表現される。

以上より、Kraus モデルの材料パラメータの一部を周波数に依存する変数として取り扱うことで、 ω および ε に対応する複素弾性率を次式で求めることができる。

$$E'(\omega, \varepsilon) = E'_{\infty} + \frac{\alpha E'(\omega) - E'_{\infty}}{1 + (\varepsilon/\varepsilon_c)^{2m}} \quad (8-17)$$

$$E''(\omega, \varepsilon) = E''_{\infty} + \frac{2\{\beta E''(\omega) - E''_{\infty}\}(\varepsilon/\varepsilon_c)^m}{1 + (\varepsilon/\varepsilon_c)^{2m}} \quad (8-18)$$

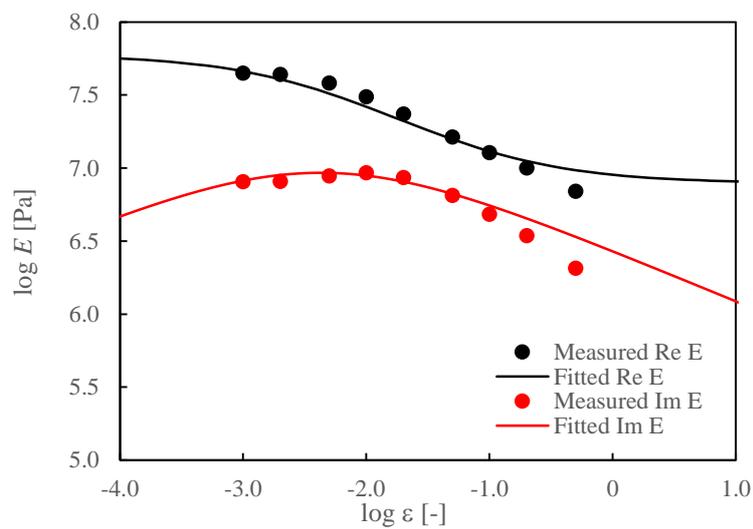
このとき、Kraus モデルの材料パラメータをひずみ依存データに対し再フィッティングを行い、各パラメータを求めた。得られた材料パラメータを Table 8-1 に示す。ここで、周波数依存データが測定されたひずみ量 $\varepsilon_0 = 0.1\%$ とひずみ依存データが測定された $\omega_0 = 10$ Hz に対し、 $E(\omega_0, \varepsilon_0)$ で測定値と一致するようにパラメータをフィッティングした。そのため、Kraus モデルのみをひずみ依存データにフィッティングした場合(5.2.3 項の Table 5-5 参照)と比較して、 ε_c はより微小ひずみ側に、 m もより小さい値に見積もられている。Kraus モデルにおける変数 m は、温度や周波数などに依らず一定とされており、 $m \approx 0.5$ または $m \approx 0.6$ を取るべきとされているが[61][63][69]、本研究では実験値へのフィッティングを優先し $m = 0.350$ としている。

上述したパラメータによる Kraus モデルの複素弾性率を Fig. 8-1 に示す。有限ひずみで、貯蔵弾性率は、 $E'_{\infty} = 7.89$ MPaに収束していく。一方、損失弾性率は測定値と同様の傾向を示してはいるが、 ε_c がさらに小さく設定されたことに起因し、大ひずみ側では測定値を過大評価している。

したがって、上述した周波数依存性およびひずみ依存性を表現できるそれぞれ 2 つの手法を組み合わせることで、合計 4 つの異なる特性を有する $E(\omega, \varepsilon)$ が得られる。

Table 8-1 Fitted material parameters with a Kraus model in combination with $E(\omega)$.

E'_∞ [MPa]	7.89
E''_∞ [MPa]	0
ε_c [%]	0.426
m	0.350
α	1.30
β	1.01

Fig. 8-1 Fitting results of Kraus model for strain dependence in combination with $E(\omega)$.

最後に、角周波数およびひずみに依存する複素弾性率を表現するにあたり、3.4.2 項で導出した拡張 Maxwell モデルの適用が考えられる。拡張 Maxwell モデルは、変形履歴および変形速度に基づく粘弾性を表現する非線形モデルであり、以下の式で表される。

$$E'(\omega, \varepsilon) = E_0 + \sum_{i=1}^n \frac{E_i z_i^2 \omega^2}{z_i^2 \omega^2 + \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\} \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\}} \quad (8-19)$$

$$E''(\omega, \varepsilon) = \sum_{i=1}^n \frac{E_i z_i \omega \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\}}{z_i^2 \omega^2 + \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\} \left\{1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i\right)\right\}} \quad (8-20)$$

本研究では、測定されたゴムサンプルの周波数依存性とひずみ依存性とにフィッティングが実施され、24 要素を用いて複素弾性率を表現した。詳細な材料パラメータは、Table 5-6 を参照されたい。また、その非線形粘弾性の挙動は 5.2.4 項で説明したとおりである。

以上より、本研究において、周波数依存性とひずみ依存性とを同時に満たす表現手法として、周波数のみを変数とする関数およびひずみのみを変数とする関数との組み合わせ 4 通り、および拡張 Maxwell モデルを用いる。計 5 つの手法については、Table 8-2 のとおり整理することができる。

Table 8-2 Method list for calculating $E(\omega, \varepsilon)$.

Method	Frequency dependence function	Strain dependence function
1	Interpolation	Interpolation
2	Interpolation	Kraus model
3	Generalized Maxwell model	Interpolation
4	Generalized Maxwell model	Kraus model
5	Extended Maxwell model	

8.3 計算条件

本章で用いる解析の計算条件を Table 8-3 にまとめる。複素弾性率の計算方法を除き、設定条件は Table 6-1 と同一である。複素弾性率の計算方法を Table 8-2 の参照番号を用いて表し、「方法 1」から「方法 5」と称して、各計算結果を整理する。

Table 8-3 Calculation conditions for friction coefficients including nonlinear viscoelastic effect.

Surface data	q_0 [1/m]	5070.0
	h_0 [μm]	82.8859
	H	0.63069
	Power spectra of surface roughness $C(q)$ [m^4]	$\frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1)}$
Rubber data	Complex modulus $E(\omega, \varepsilon)$ [Pa]	5 different methods as shown in Table 8-2
	Poisson's ratio ν	0.49
Normal stress σ_0 [Pa]		2450
Sliding velocity $\log v$ [m/s]		-7.0, -6.5, -6.0, -5.5, -5.0, -4.5, -4.0, -3.5, -3.0, -2.5, -2.0, -1.5 -1.0, -0.5, 0, 0.5, 1.0
Maximum magnification ζ_{\max}		3000

8.4 計算結果

複素弾性率の計算方法ごとに得られた試験結果を Fig. 8-2 から Fig. 8-6 に示し、それぞれ方法 1 から方法 5 の結果に対応している。ここで、各図において、(a), (b), および(c)は、すべり速度 v に対する摩擦係数 μ の関係、倍率 ζ に対する真実接触面積率 P の関係、および倍率 ζ に対する 8.1 節で示した陰関数を満たす波数ごとのひずみ ε_q の関係をそれぞれ表す。各方法とも、倍率 ζ が大きいほど摩擦係数も増加し、摩擦係数が最大となるすべり速度は低くなる。また、真実接触面積率も ζ の増加に伴い、およびすべり速度の増加に伴い、小さくなっている。これらの傾向は、前章までの摩擦係数予測と同一である。一方、波数ごとに計算されるひずみは、すべり速度によってその大小関係が変化し、 ζ の感度にも差がある。これは、同じ倍率 ζ においてもすべり速度が異なれば考慮する角周波数も異なるためである。特にすべり速度による影響に注目すると、方法 1 から方法 4 までは ζ の増加によりひずみも単調に増加することがわかる。しかし、方法 5、すなわち拡張 Maxwell モデルでは、1 mm/s および10 mm/sにおいて、 $\zeta = 1$ からある倍率まではひずみは急激に上昇し、その後同程度のひずみを示し、再度ひずみの増加に転じている。これは同一のすべり速度であっても ζ の増加により対応する角周波数が異なることに起因するが、拡張 Maxwell モデルは他の方法と比較して、複素弾性率の非線形性が強いことを示しているといえる。

次に、複素弾性率の表現手法による影響を整理する。速度 v に対する摩擦係数 μ の関係、倍率 ζ に対する真実接触面積率 P の関係、および倍率 ζ に対する波数ごとのひずみ ε_q の関係について、方法 1 から 5 の結果を同一の図にまとめ、それぞれ Fig. 8-7, Fig. 8-8, および Fig. 8-9 に示す。図示されるように、各結果の傾向から、方法 1 から 5 は、方法 1 と方法 3、方法 2 と方法 4、および方法 5 という 3 つのグループに分類することができる。ここで、方法 1 および方法 3 のグループと方法 2 および方法 4 のグループとを分けているのはひずみ依存性の表現手法であり、それぞれ補間モデルと Kraus モデルによりひずみ依存性が表現されている。

Fig. 8-7 に示すすべり速度と摩擦係数の関係では、拡張 Maxwell モデルの場合のみが、方法 1 から方法 4 と比べ、摩擦係数のピークが低速側に移動している。また、Kraus モデルでひずみ依存性を表現した場合も補間モデルで表現した場合も、摩擦係数のピーク位置は変わらないが、Kraus モデルの場合の方がすべり速度に対する摩擦係数の増加率が低く、示す摩擦係数の最大値も小さくなっている。

また、Fig. 8-8 および Fig. 8-9 では、全倍率 ζ において、Kraus モデルによりひずみ依存性を表現した方が、補間モデルの場合に比べ、低い真実接触面積率および大きいひずみを示している。一方、拡張 Maxwell モデルは、他のモデルと比べてすべり速度が高い領域で各挙動が大きく異なっている。

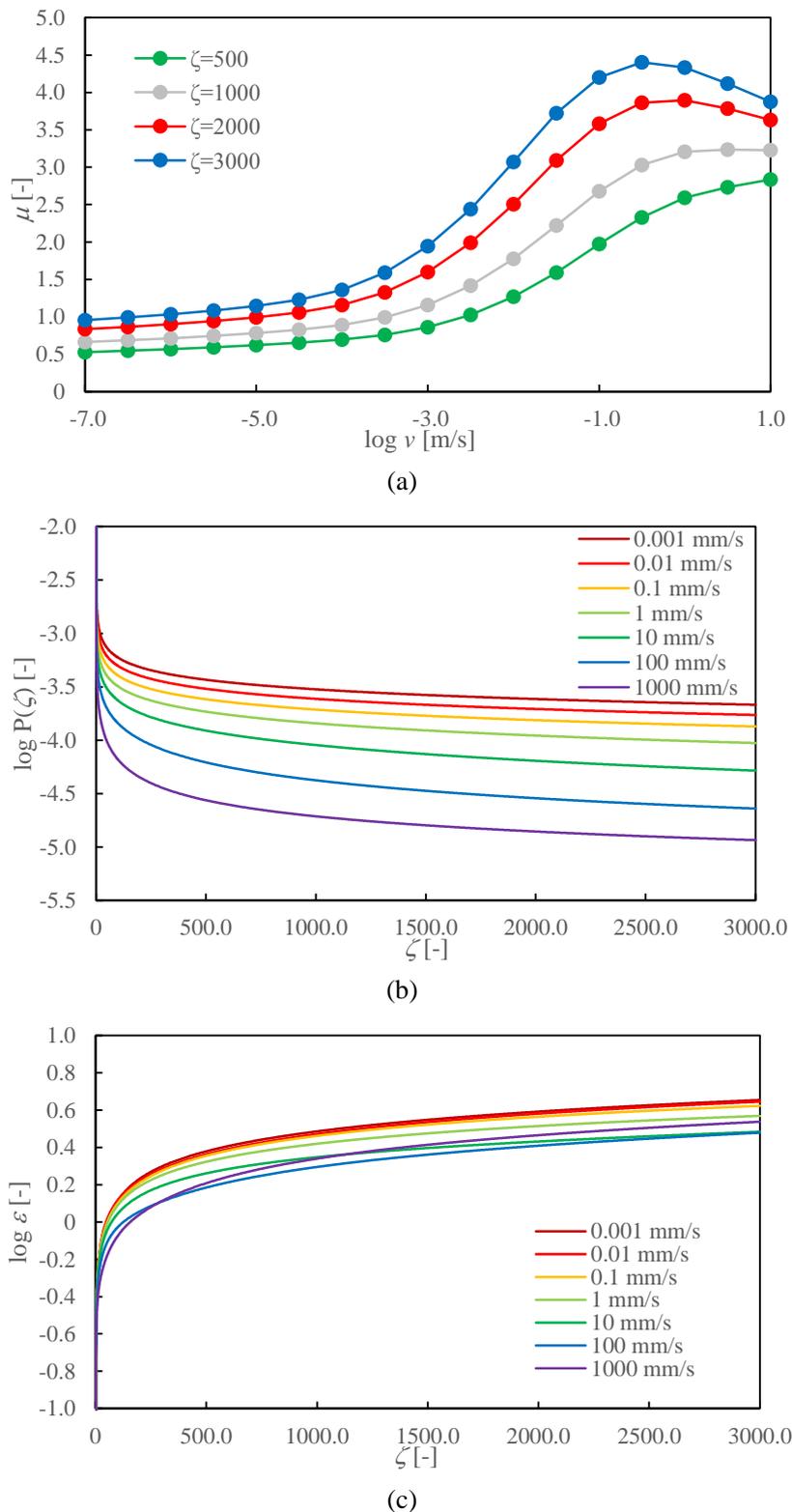
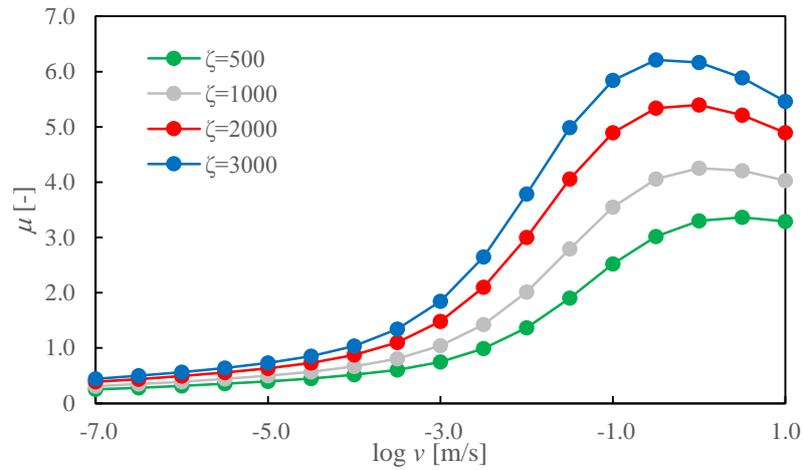
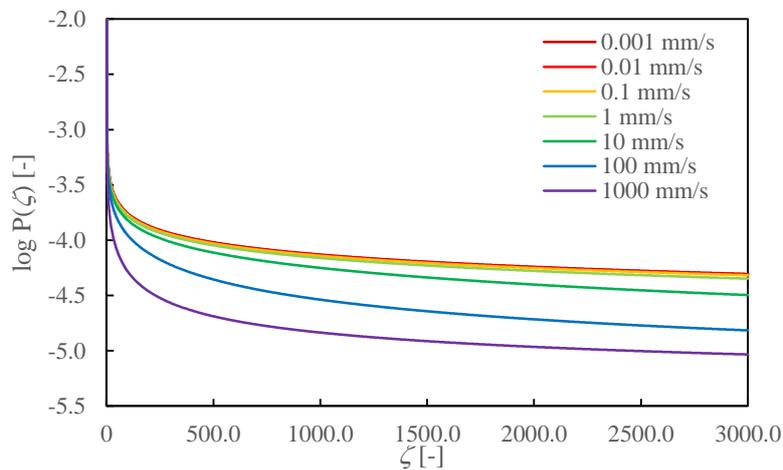


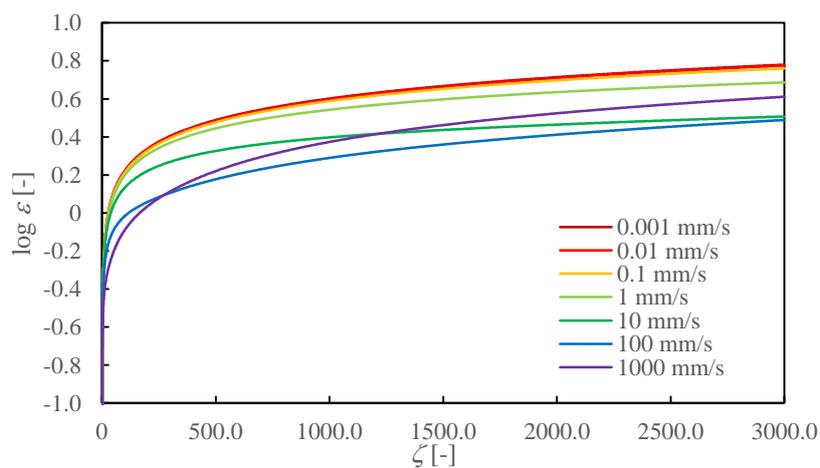
Fig. 8-2 Calculation results according to method 1; (a) μ - v curve, (b) P - ζ curve, (c) ε - ζ curve.



(a)

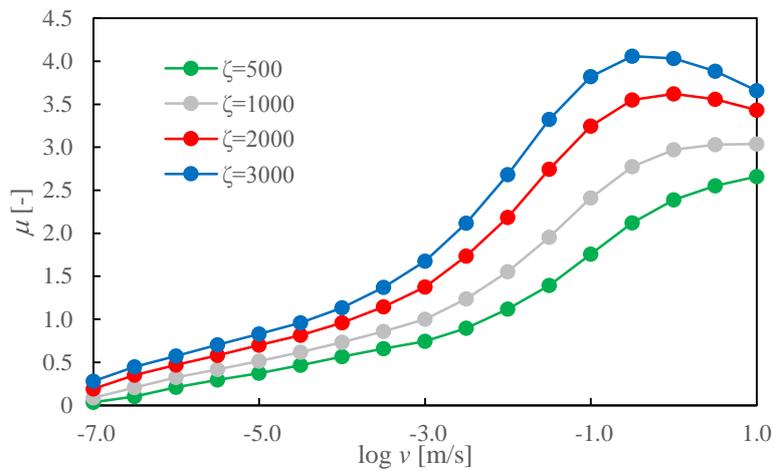


(b)

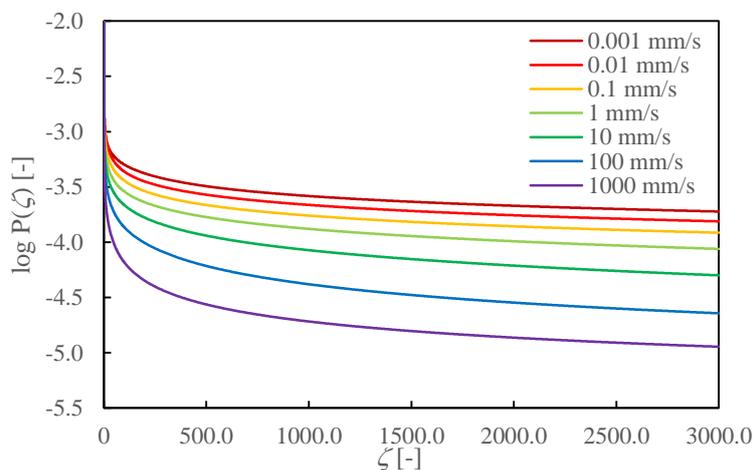


(c)

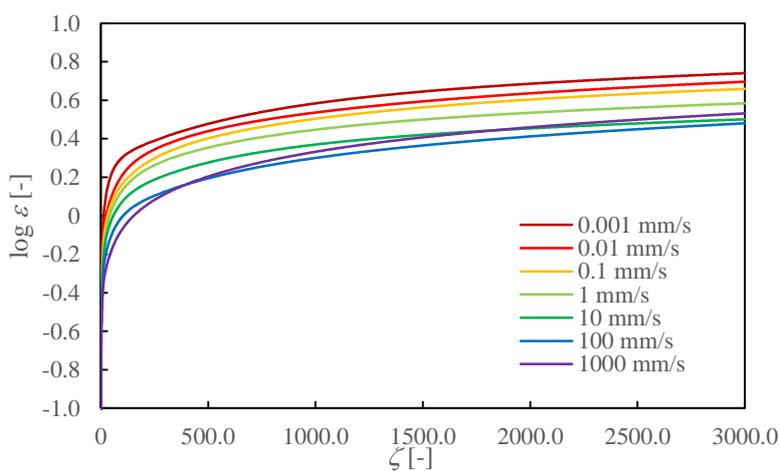
Fig. 8-3 Calculation results according to method 2; (a) μ - v curve, (b) P - ζ curve, (c) ε - ζ curve.



(a)



(b)



(c)

Fig. 8-4 Calculation results according to method 3; (a) μ - v curve, (b) P - ζ curve, (c) ε - ζ curve.

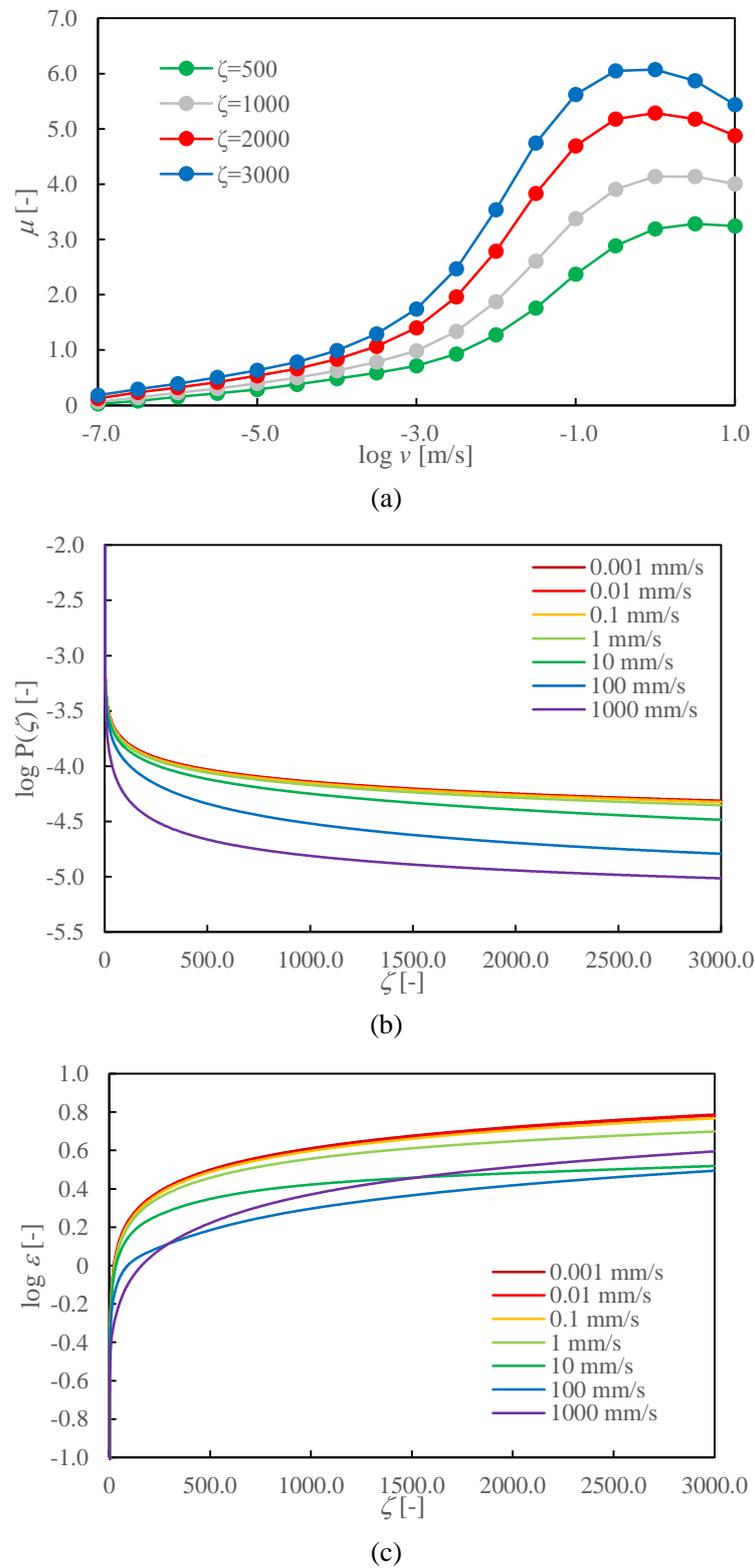


Fig. 8-5 Calculation results according to method 4; (a) μ - v curve, (b) P - ζ curve, (c) ε - ζ curve.

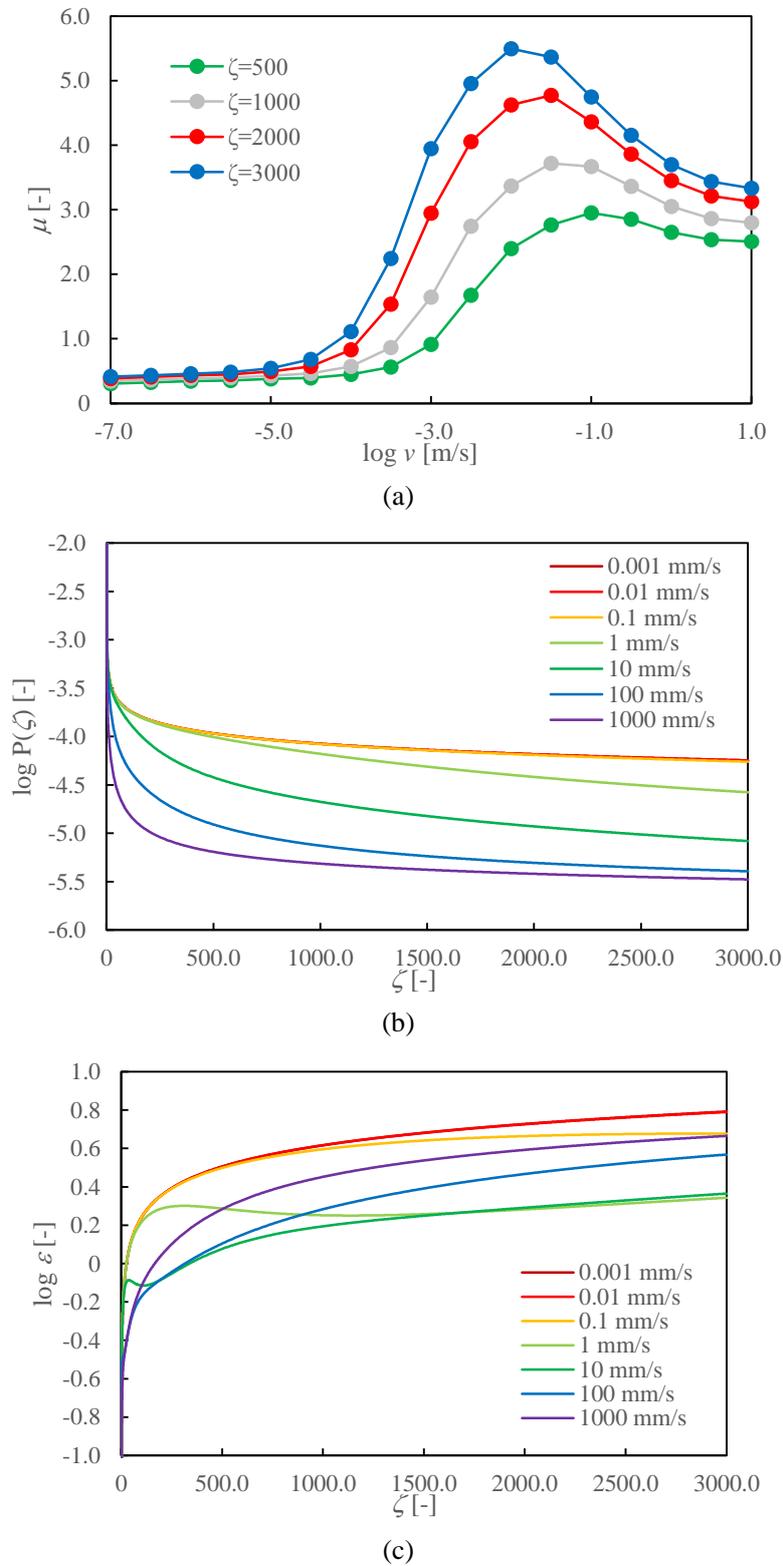
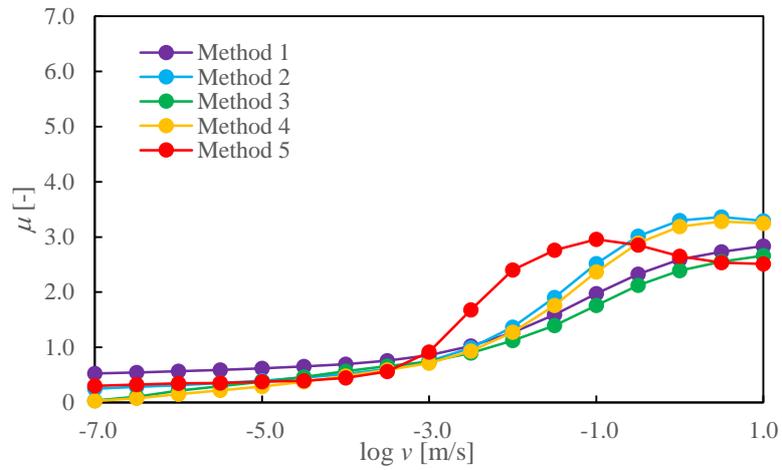
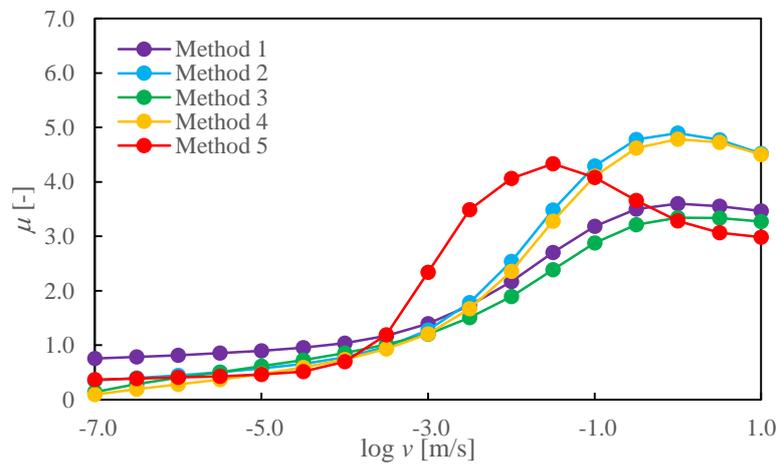


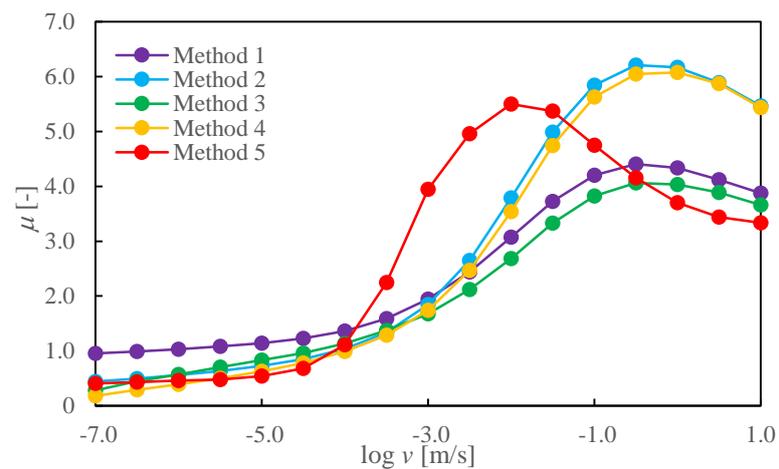
Fig. 8-6 Calculation results according to method 5; (a) μ - v curve, (b) P - ζ curve, (c) ε - ζ curve.



(a)

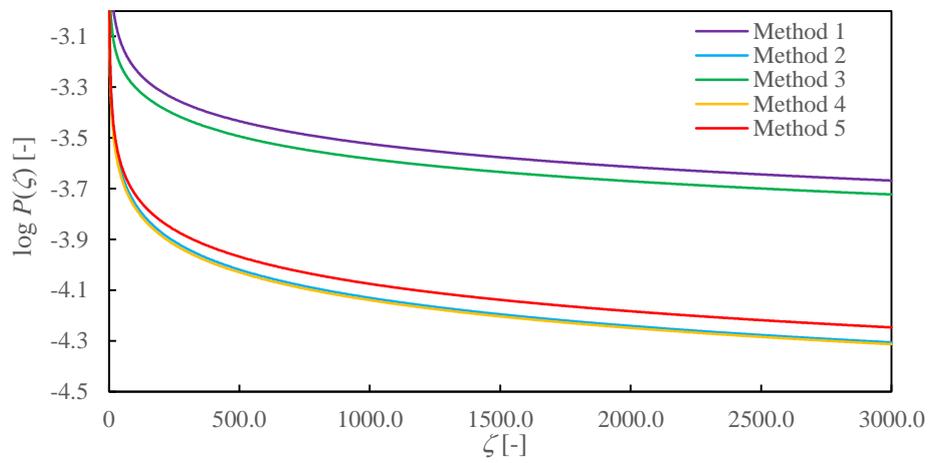


(b)

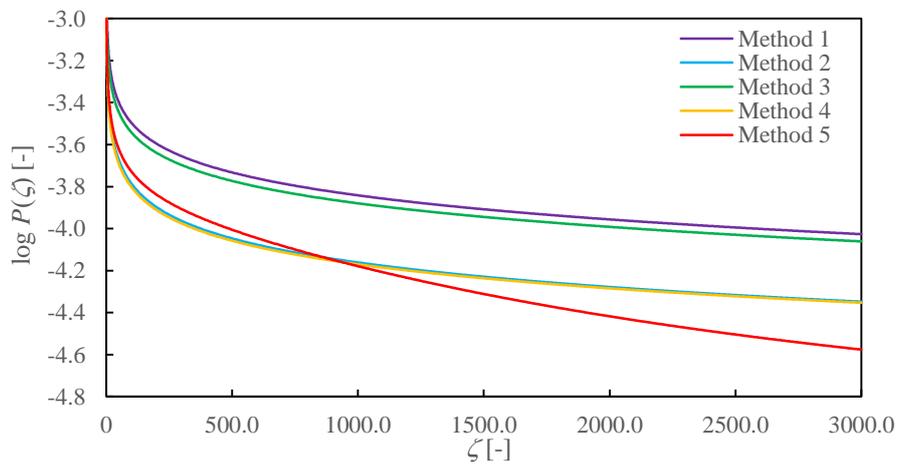


(c)

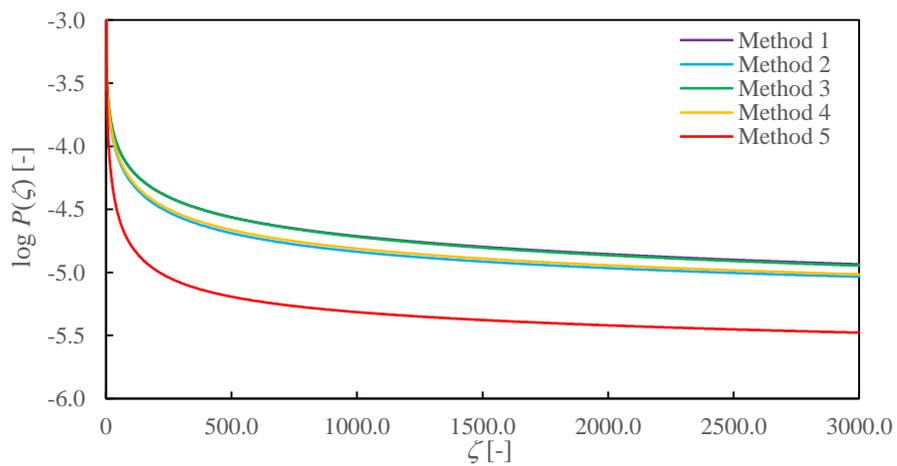
Fig. 8-7 Comparison of μ - v curves with five different methods;**(a) $\zeta=500$, (b) $\zeta=1500$, (c) $\zeta=3000$.**



(a)

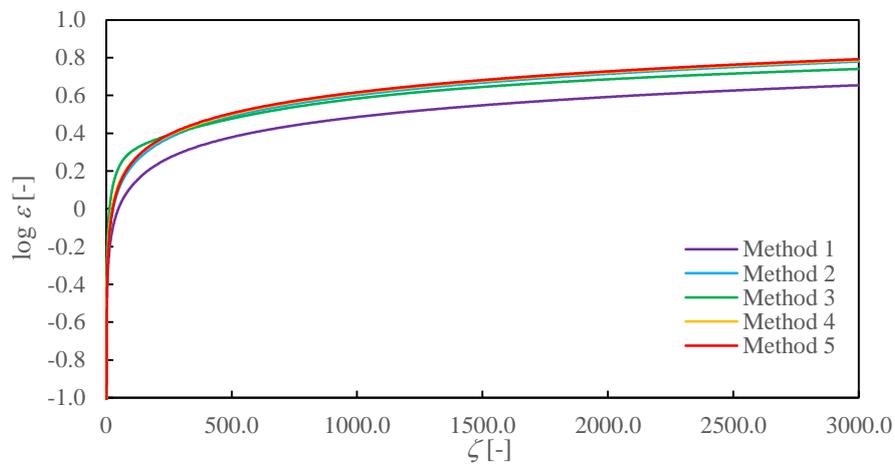


(b)

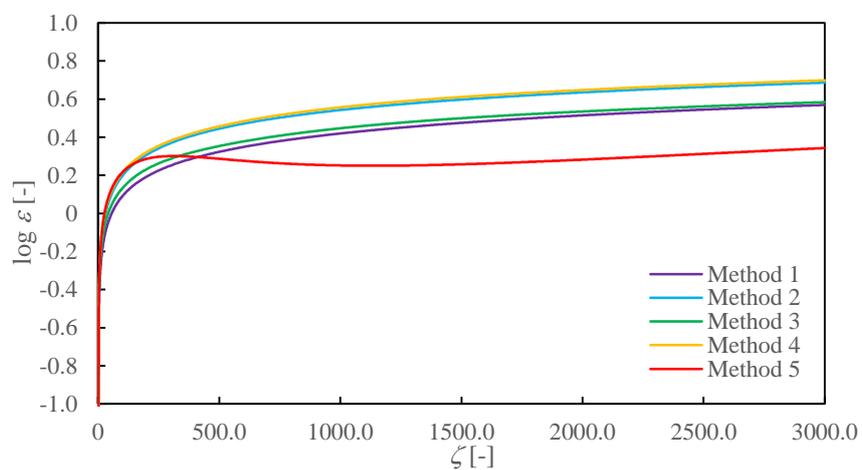


(c)

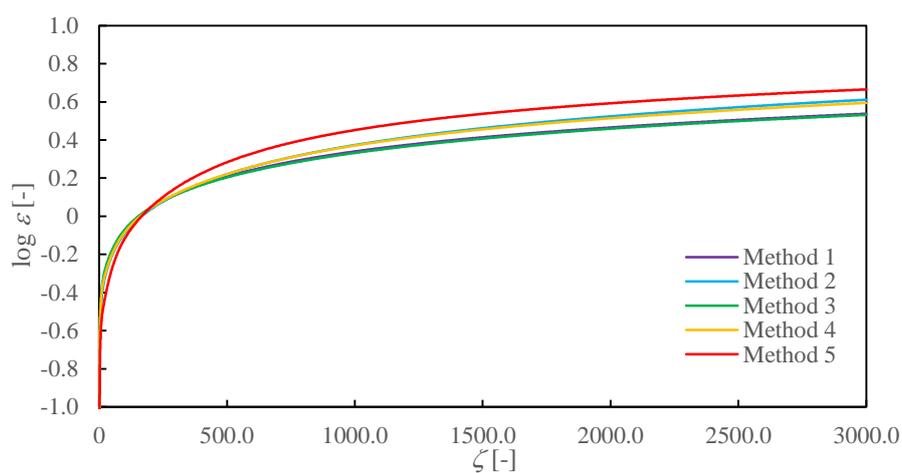
Fig. 8-8 Comparison of P- ζ curves with five different methods;**(a) $\log v = -6$ m/s, (b) $\log v = -3$ m/s, (c) $\log v = 0$ m/s.**



(a)



(b)



(c)

Fig. 8-9 Comparison of ε - ζ curves with five different methods;**(a) $\log v = -6$ m/s, (b) $\log v = -3$ m/s, (c) $\log v = 0$ m/s.**

8.5 考察

本節では、前節の計算結果に対し、以下の点について考察を与える。

- (i) ひずみ依存性を補間モデルで表現した場合と Kraus モデルで表現した場合の挙動の差
- (ii) 拡張 Maxwell モデルが示す特異的な挙動

Kraus モデルでひずみ依存性を表現した場合、補間モデルの場合と顕著に異なる挙動を示す物性値は、貯蔵弾性率である。補間モデルによる表現では、貯蔵弾性率はひずみに比例して減少していくが、Kraus モデルでは、有限ひずみで一定の値に収束する。一方、損失弾性率は、どちらの表現方法においても、ひずみが増加するにつれ減少していく。非線形粘弾性を考慮することで、 $q > q_0$ の波数域で釣り合うひずみは、Fig. 8-2 から Fig. 8-5 の各図(c)に示されているように、有限ひずみに位置するようになる。このとき、Kraus モデルは補間モデルより大ひずみ域で高い貯蔵弾性率を示すので、真実接触面積率は小さく評価される。Fig. 8-8 に示されるように、Kraus モデルを用いた方法 2 および 4 が、補間モデルにより表現される方法 1 および 3 よりも小さい真実接触面積率を見積もっている。それに伴い、垂直応力は Kraus モデルのほうが小さく見積もるので、釣り合うひずみは補間モデルの場合より大きく計算される (Fig. 8-9 参照)。また、同じ補間モデルを用いてひずみ依存性が表される方法 1 および方法 3 であっても、Fig. 8-7 より方法 3 のほうが低速側で摩擦係数を低く評価している。これは、6.3 節で議論されたように、低周波数域 ($\omega < 10^{-1}$ rad/s) における複素弾性率の評価の差に起因している。

次に、拡張 Maxwell モデルの挙動に注目する。Fig. 8-7 に示したように、拡張 Maxwell モデルのみが摩擦係数が最大となるすべり速度が低速側に移る。この特徴を議論するためには、摩擦係数と損失正接の関係が重要であり、以下に詳述する。

摩擦係数 μ は損失正接 $\tan \delta (= E''/E')$ と密接に関係しており、その関係を導出する。ここで、波数空間において $|\cos \phi| = 1$ における弾性率のみを考慮する。すると、真実接触面積率 $P(q)$ の積分項である $G(q)$ は、式(8-6)より、

$$G(q, \varepsilon_q) = \frac{\pi}{4} \int_{q_0}^q dq' q'^3 C(q') \left| \frac{E(q'v, \varepsilon_q)}{(1-v^2)\sigma_0} \right|^2 \quad (8-21)$$

となる。このとき、複素弾性率の絶対値 $|E(\omega, \varepsilon_q)|$ は $q_0 \leq q' \leq q$ において $q' \approx q$ が支配的となるから、

$$G(q, \varepsilon_q) \approx \frac{\pi}{4} \left| \frac{E(qv, \varepsilon_q)}{(1-v^2)\sigma_0} \right|^2 \int_{q_0}^q dq' q'^3 C(q') \quad (8-22)$$

と書ける。よって、式(4-23)より、真実接触面積率は、

$$P(q) \simeq \frac{2}{\pi} \left| \frac{(1-\nu^2)\sigma_0}{E(q\nu, \varepsilon_q)} \right| \frac{1}{\sqrt{\int_{q_0}^q dq' q'^3 C(q')}} \quad (8-23)$$

に従う。式(8-23)を式(8-8)に代入すると、摩擦係数は以下のとおり整理される。

$$\begin{aligned} \mu &\simeq \frac{1}{2} \int_{q_0}^{q_1} dq q^3 C(q) \frac{2}{\pi} \left| \frac{(1-\nu^2)\sigma_0}{E(q\nu, \varepsilon_q)} \right| \frac{1}{\sqrt{\int_{q_0}^q dq' q'^3 C(q')}} 4 \operatorname{Im} \frac{E(q\nu, \varepsilon_q)}{(1-\nu^2)\sigma_0} \\ &= \frac{4}{\pi} \int_{q_0}^{q_1} dq \frac{\operatorname{Im} E(q\nu, \varepsilon_q)}{|E(q\nu, \varepsilon_q)|} \frac{q^3 C(q)}{\sqrt{\int_{q_0}^q dq' q'^3 C(q')}} \end{aligned} \quad (8-24)$$

ただし、式(8-24)の一段落目の導出には以下の関係を用いた。

$$\int_0^{2\pi} d\phi \cos \phi \operatorname{Im} \frac{E(q\nu \cos \phi, \varepsilon_q)}{(1-\nu^2)\sigma_0} = 2 \int_0^\pi d\phi |\cos \phi| \operatorname{Im} \frac{E(q\nu |\cos \phi|, \varepsilon_q)}{(1-\nu^2)\sigma_0}$$

以上より、摩擦係数に対する複素弾性率の影響のみを考慮すると、

$$\begin{aligned} \mu &\propto \int_{q_0}^{q_1} dq \frac{\operatorname{Im} E(q\nu, \varepsilon_q)}{|E(q\nu, \varepsilon_q)|} \\ &= \int \frac{\operatorname{Im} E(\omega, \varepsilon_q)}{\sqrt{\operatorname{Re} E(\omega, \varepsilon_q)^2 + \operatorname{Im} E(\omega, \varepsilon_q)^2}} \\ &= \int \frac{\tan \delta}{\sqrt{\tan^2 \delta + 1}} \left(= \int \sin \delta \right) \end{aligned} \quad (8-25)$$

によって表すことができる。ここで、式(8-25)の積分経路は角周波数 ω およびひずみ ε がそれぞれ $q_0\nu \rightarrow q_1\nu$ および $\varepsilon_{q_0} \rightarrow \varepsilon_{q_1}$ に沿う経路である。厳密には、 $|\cos \phi| \neq 1$ における複素弾性率も摩擦係数には反映されるが、ここではその影響を無視し、単純化した摩擦係数と複素弾性率の関係を代表的に用いる。加えて、式(8-25)の $\tan \delta$ 関数は詳細には $\sin \delta$ と等しくなるが、損失正接は粘弾性の度合いを表す重要な指標であり、本研究では $\tan \delta$ を用いて表す。また、Fig. 8-2 から Fig. 8-6 における各図(c)を参照すると、波数ごとのひずみ ε_q は微小ひずみからスタートし、 $q > q_0$ で有限ひずみに存在することがわかる。したがって、摩擦係数は、低周波数かつ微小ひずみの領域から高周波数かつ有限ひずみの領域にわたる $\tan \delta$ 関数の挙動を把握することが有用となる。

拡張 Maxwell モデルの特性を比較するために、方法 1 (線形表現の見合わせ) および方法 5 (拡張 Maxwell モデル) における $\tan \delta$ 関数の角周波数 - ひずみ平面分布をそれぞれ Fig. 8-10 および Fig. 8-11 に示す。図中、破線で示されるのが $\tan \delta$ 関数の最大値の変遷である。Fig. 8-10 において、最大値の位置はひずみに依らず一定の角周波数に位置する。これは、周波数依存性の表現手法とひずみ依存性の表現手法とが組み合わせることによって $E(\omega, \varepsilon)$ が表現されているため、最大値の位置は周波数依存性の表現手法によって決定されるからである。よって、方法 2 から方法 4 についても同様であり、非線形粘弾性を考慮して摩擦係数を求めると、その最大となるすべり速度は Persson の理論と大きく変わらない。一方、拡張 Maxwell モデルは、有限ひずみにおいて最大値となる角周波数が微小ひずみよりも低周波数側に移動している。この低周波数側への最大値位置のシフトにより、より低いすべり速度で摩擦係数が最大値を示すようになる。以上より、摩擦係数の速度依存性は、非線形粘弾性領域に対応する損失正接により支配されることがわかる。

ここで、拡張 Maxwell モデルは、5.2.4 項で説明したように、一組ずつの周波数依存性データおよびひずみ依存性データに対しフィッティングされた。したがって、有限ひずみかつ高周波数の非線形粘弾性領域の複素弾性率は、「推定」されているに過ぎない点に留意する必要がある。しかしながら、ゴムのような高分子材料が示す弾性率の非線形性を表現するという観点からは、本研究の拡張 Maxwell モデルは摩擦係数を考慮する上で有用な知見である。よって、次章で実施する摩擦試験との比較においても拡張 Maxwell モデルを用いることとする。

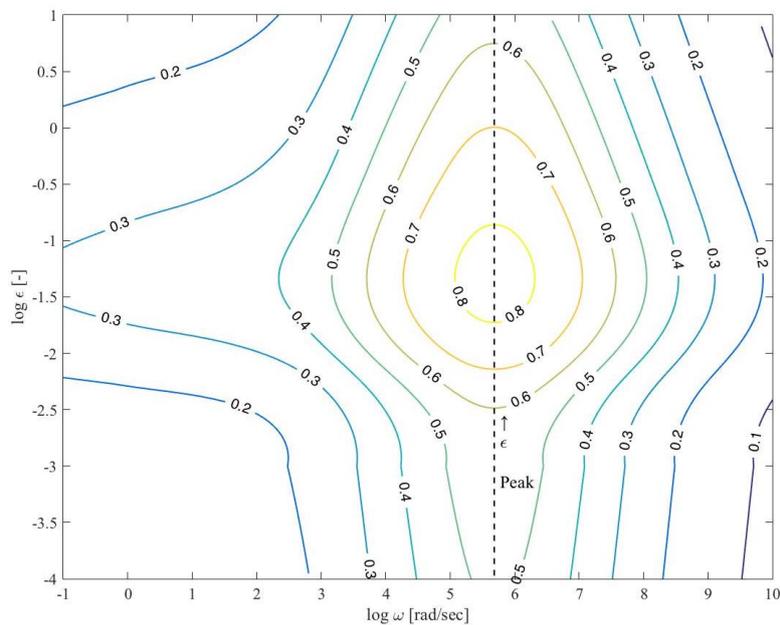


Fig. 8-10 Contour drawing of $\tan \delta$ function over $\omega - \epsilon$ plane according to method 1.

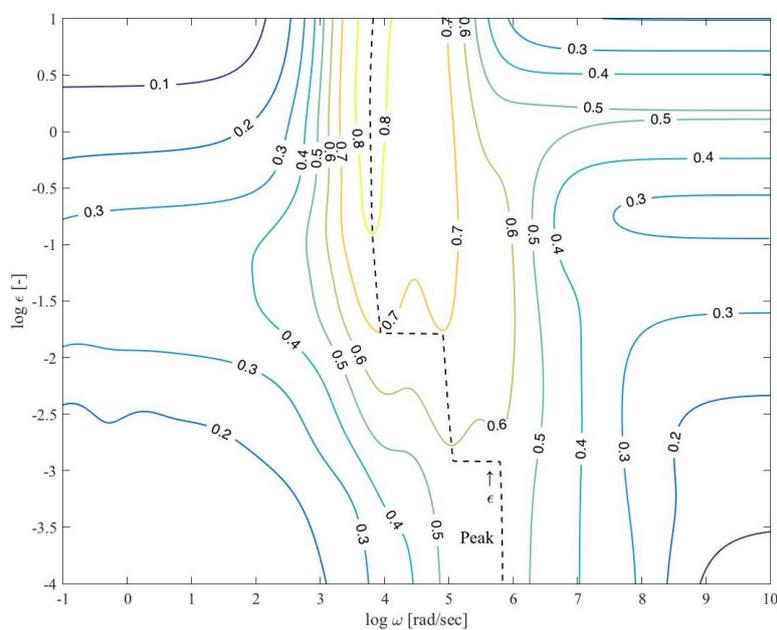


Fig. 8-11 Contour drawing of $\tan \delta$ function over $\omega - \epsilon$ plane according to method 5.

9 摩擦試験と摩擦モデルとの比較・検証

9.1 計算条件

本章では、上述した摩擦モデルにより予測される摩擦係数値と 5 章で示した摩擦試験により測定された摩擦係数とを比較する。そして、摩擦モデルの有用性を検討し、摩擦メカニズムにおけるゴムのヒステリシスロスの影響を議論する。

摩擦係数予測には、Persson の摩擦理論、部分接触を考慮した摩擦モデル、および非線形粘弾性を考慮した摩擦モデルを用い、複素弾性率は拡張 Maxwell モデルより計算される。ただし、Persson の摩擦理論に基づく際は、任意の周波数のみで複素弾性率が得られれば良いので、基準ひずみ ε_0 は測定値に合わせて $\varepsilon_0 = 0.1\%$ としている。計算条件の詳細を Table 9-1 に示す。

Table 9-1 Calculation conditions for friction coefficients in comparison with experiment.

Surface data	q_0 [1/m]	5070.0
	h_0 [μm]	82.8859
	H	0.63069
	Original power spectra of surface roughness $C(q)$ [m^4]	$\frac{H}{2\pi} \left(\frac{h_0}{q_0}\right)^2 \left(\frac{q}{q_0}\right)^{-2(H+1)}$
Rubber data	Viscoelastic property $E(\omega, \varepsilon)$ [Pa]	<u>Extended Maxwell model</u> $E'(\omega, \varepsilon) + iE''(\omega, \varepsilon)$ *see 5.2.4 for details
	Poisson's ratio ν	0.49
	Thickness [mm]	2.0
	Reference strain ε_0 [%]	0.1
	Static elastic modulus E_S [MPa]	6.93
Normal stress σ_0 [Pa]		2450
Static partial contact height d_S [μm]		60.16
Sliding velocity $\log v$ [m/s]		-7.0, -6.5, -6.0, -5.5, -5.0, -4.0, -3.5, -3.0, -2.5, -2.0, -1.0, -0.5, 0, 0.5, 1.0
Maximum magnification ζ_{\max}		3000

9.2 計算結果

Fig. 9-1 は Persson の摩擦理論を用いた場合の実験値との比較, Fig. 9-2 は非線形粘弾性を考慮した場合の実験値との比較, Fig. 9-4 は非線形粘弾性および部分接触を考慮した場合の実験値との比較を示している. 各図とも $\zeta = 3000$ における結果であり, このときカットオフ波数 q_1 は $q_1 = 1.521 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ である.

Fig. 9-1 に示されるように, Persson の摩擦理論は $-7.0 < \log v < -4.0 \text{ m/s}$ の低速側では試験結果と良い一致を示すが, $\log v > -4.0 \text{ m/s}$ のすべり速度域では摩擦係数の増加率は大きくなり, $\log v = -0.5 \text{ m/s}$ で最大値 4.30 を示す. よって, 摩擦理論は高速側で試験結果を過大評価しており, 絶対値と速度依存性が一致していないことがわかる.

ここで, 非線形粘弾性を考慮した場合の摩擦係数 (Fig. 9-2 参照) は, 摩擦係数のピーク位置が $\log v = -2.0 \text{ m/s}$ となり, Persson の摩擦理論よりも低速側に位置する. Fig. 9-3 は Fig. 9-2 の実験値を第 2 軸に配置した図である. 摩擦試験は速度が増加するに伴い摩擦係数の増加率が小さくなり $\log v \approx -2.0 \text{ m/s}$ で最大値を示しており, 拡張 Maxwell モデルを用いて非線形粘弾性を考慮することでピーク位置が一致することがわかる. しかしながら, すべり速度に対する摩擦係数の増加率は実験値と比べて未だに大きく, 予測された摩擦係数の最大値は 5.50 となる.

Fig. 9-4 に, 非線形粘弾性に加え, 部分接触も考慮した摩擦係数予測と試験結果との比較を示す. 静的な接触状態に基づく接触高さ d_s を用いることとで計算される摩擦係数の最大値は 2.10 となり, 摩擦試験と同程度のオーダーの値が得られる. しかし, 本研究で提案した摩擦モデルは, 低速側で摩擦試験より小さな摩擦係数を示し, すべり速度に対する摩擦係数の増加率を大きく見積もっている. このような摩擦試験との差異については, 次節にて詳しく考察を行う. さらに, このときの倍率 ζ に対する真実接触面積率 P の関係を Fig. 9-5 に示す. 部分接触を考慮しない場合と比較すると (Fig. 8-6 (c) 参照), 各速度でひずみは小さくなっているが, 100% ひずみを超えているすべり速度もあり, 慎重な議論が必要である.

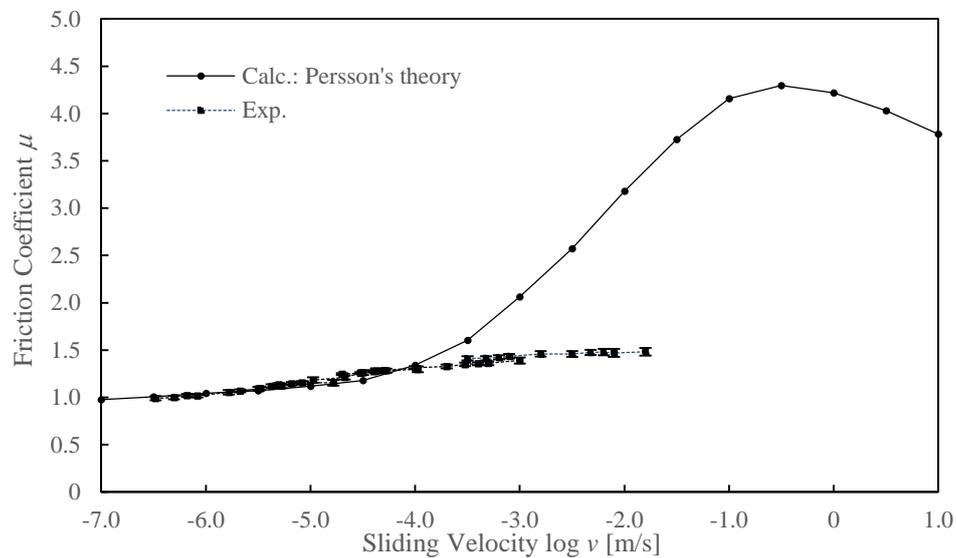


Fig. 9-1 μ - v curve comparing the calculation from Persson's theory with experiment.

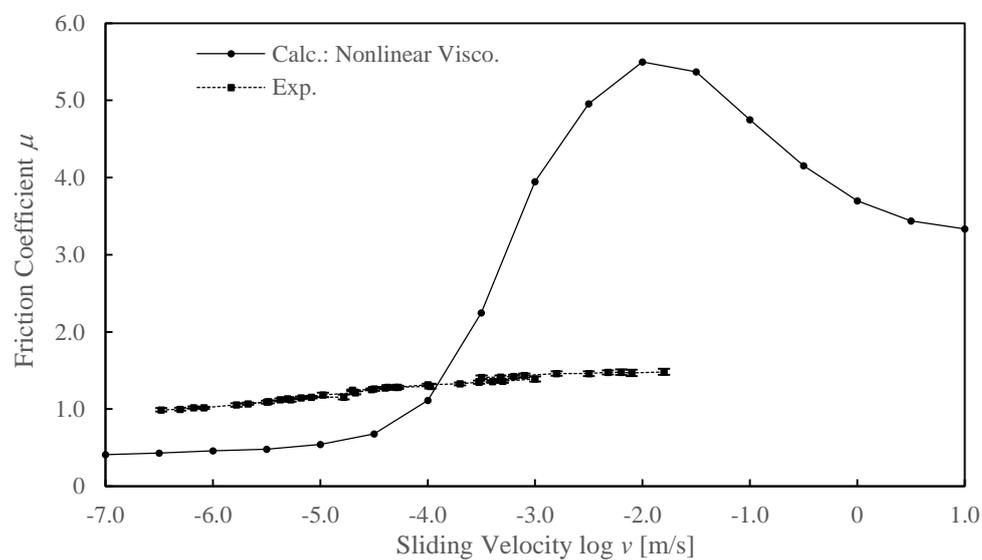


Fig. 9-2 μ - v curve comparing the calculation from the friction theory considering nonlinear viscoelasticity with experiment.

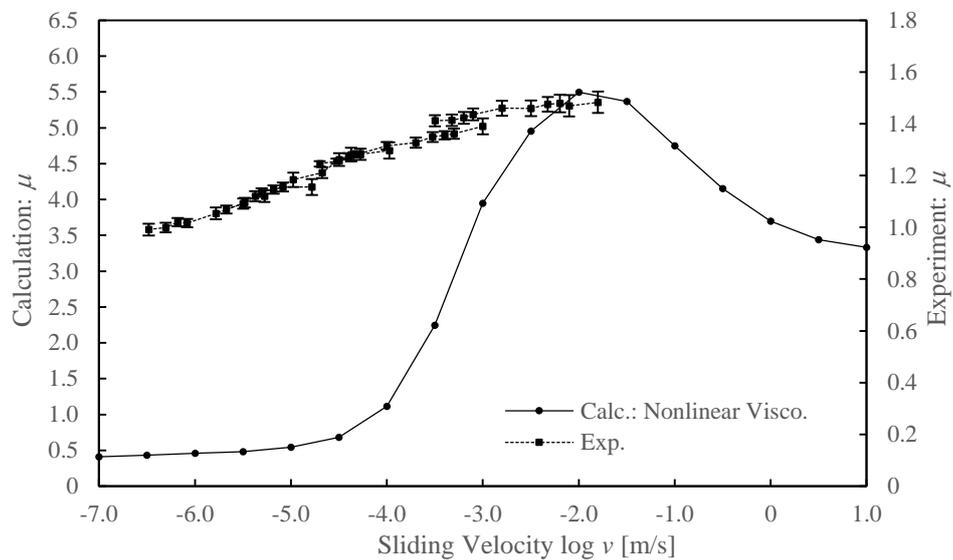


Fig. 9-3 μ - v curve modified from Fig. 9-2 with the experimental result on the second axis.

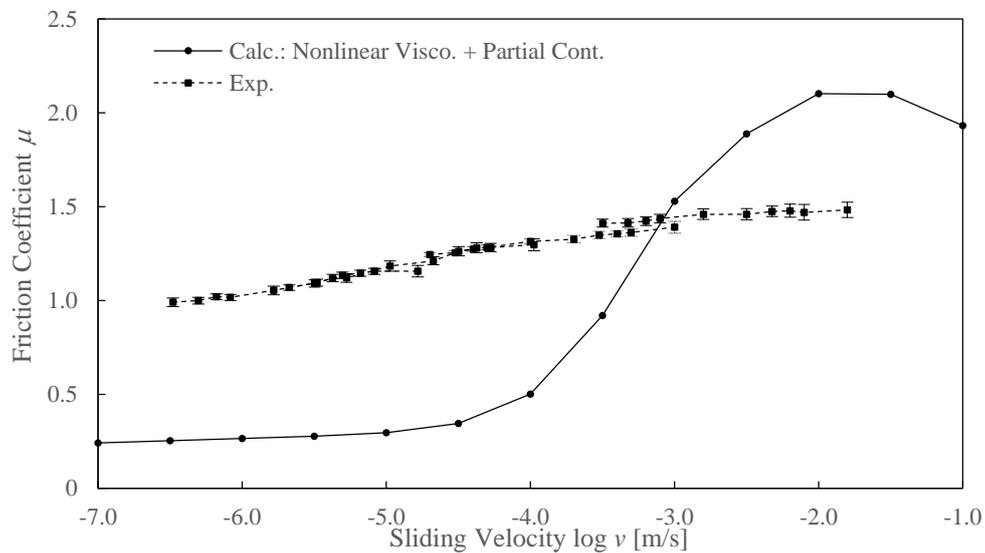


Fig. 9-4 μ - v curve comparing the calculation from the friction theory considering nonlinear viscoelasticity and partial contact with experiment.

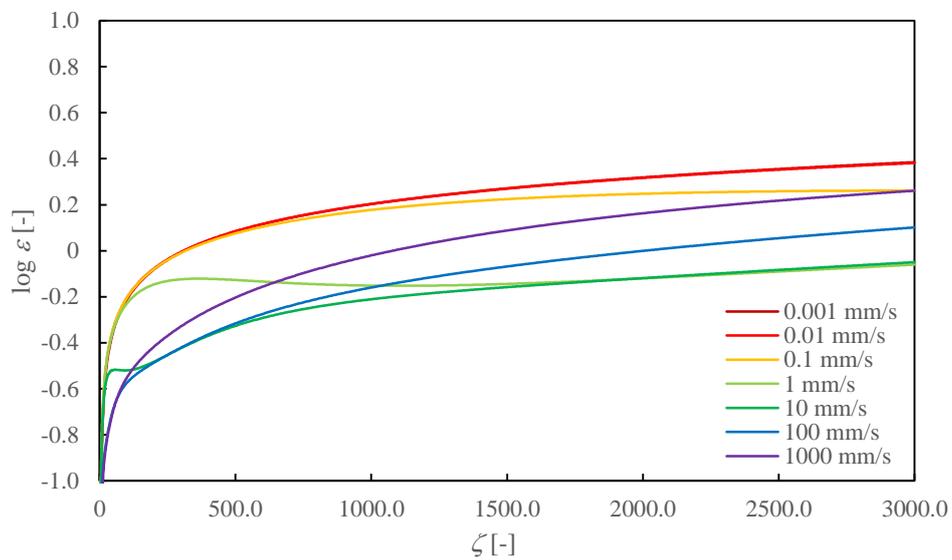


Fig. 9-5 The fraction of real contact area calculated from the friction theory considering nonlinear viscoelasticity and partial contact with experiment.

9.3 考察

9.3.1 緒言

提案した摩擦モデルにより計算された摩擦係数は、摩擦試験と比較し、低速側で摩擦係数を低く見積もり、速度依存性は大きく評価している。その要因として考えられるのが、測定に対する誤差／精度に起因する要素および現象に対する評価の正確さに起因する要素である。

測定値に対する誤差／精度の問題は、次の2つの事象について考察すべきである。

- (i) 拡張 Maxwell モデルのフィッティング精度の検討 (9.3.2 項)
- (ii) 複素弾性率の測定精度の検討 (9.3.3 項)

現象に対する評価の正確さに関しては、次の3つの事象について考察すべきである。

- (i) ヒステリシスロス過大評価の可能性に関する検討 (9.3.4 項)
- (ii) 部分接触高さに関する検討 (9.3.5 項)
- (iii) 非線形粘弾性領域に関する検討 (9.3.6 項)

本節では、以上の考えられる原因についてそれぞれ考察を与える。

9.3.2 拡張 Maxwell モデルのフィッティング精度の検討

Persson の摩擦理論において、フィッティングの精度が摩擦係数に大きな影響を与え得るのは、6 章でも述べたとおりである。非線形粘弾性を考慮した場合には、 $q \gg q_0$ で生じるひずみは有限ひずみ域に存在するので、ひずみ依存性へのフィッティング、特に有限ひずみに対するフィッティングが重要となる。ここで、拡張 Maxwell モデルとひずみ依存性を示す測定値との比較を示す Fig. 5-11 を参照すると、測定されたひずみの最大値 $\varepsilon = 50\%$ より大きいひずみ領域で拡張 Maxwell モデルは測定値の貯蔵弾性率を過大評価していることがわかる。貯蔵弾性率を過大評価すると、真実接触面積率の過小評価へ繋がり、摩擦係数も低く計算される。したがって、有限ひずみでのフィッティング精度を鑑みるに、摩擦モデルによる摩擦係数の予測値はより大きく評価されるべきであると考えられる。

そこで、 $\varepsilon = 50\%$ における測定値と拡張 Maxwell モデルが一致するように、貯蔵弾性率を修正した場合の摩擦係数を計算した。このとき、拡張 Maxwell モデルの貯蔵弾性率を一律 0.795 倍した。損失弾性率に対しては補正を与えていない。修正の有無による拡張 Maxwell モデルの挙動とひずみ依存性の測定値とを Fig. 9-6 に示す。修正された拡張 Maxwell モデルに基づき計算された摩擦係数は、Fig. 9-7 に示されるように、すべり速度全域で修正前の計算結果より大きく評価されている。摩擦係数は、0.06~0.238 増加しており、各すべり速度で約 2 割の摩擦係数増加に繋がっている。

以上より、摩擦モデルが低速側で測定値よりも低い摩擦係数を計算した一因として、フィッティング精度が挙げられ、測定される複素弾性率に対して正確なフィッティングが必要であることがわかる。

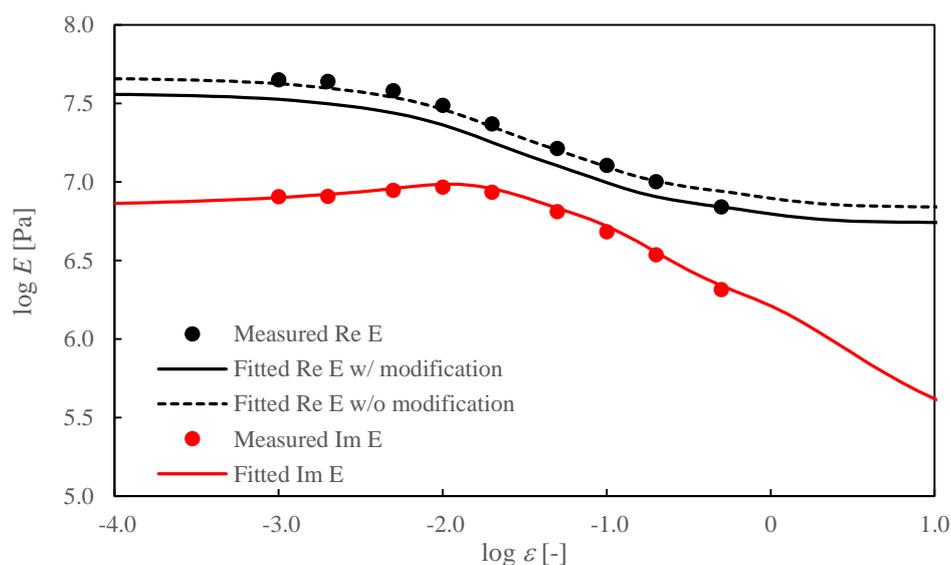


Fig. 9-6 Fitting results of the extended Maxwell model for strain dependence with modification.

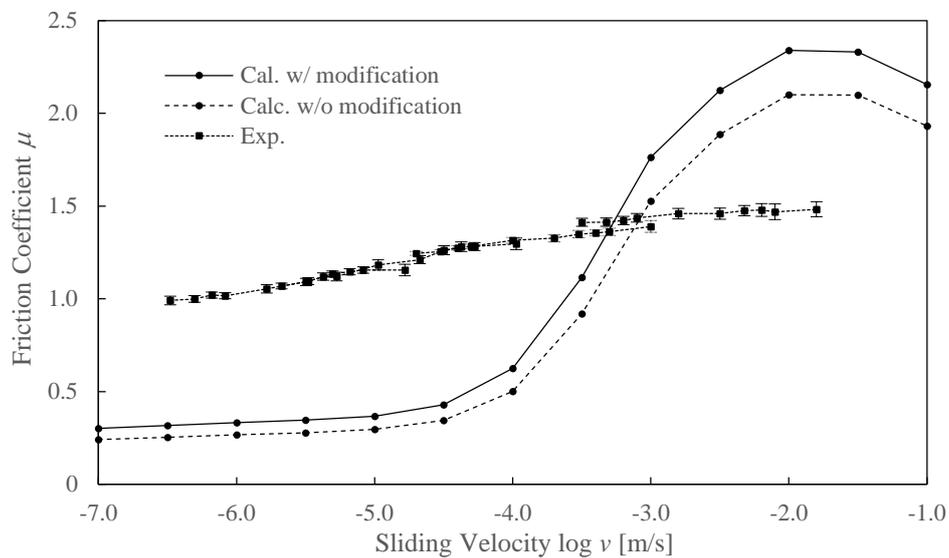


Fig. 9-7 μ - v curve comparing the calculations with and without modification for storage modulus.

9.3.3 複素弾性率の測定精度の検討

粘弾性モデルのフィッティング精度が重要であったように、複素弾性率の測定自体の精度も摩擦係数予測に影響を及ぼす。ただし、摩擦係数予測に影響を与える測定因子は、動的粘弾性試験で測定される応力の絶対値ではなく、ひずみの強制振動に対する応力の振動の位相差 δ である。以下に、その詳細を記す。

はじめに、測定応力の絶対値の影響について述べる。測定応力 σ_0 が α 倍され $\alpha\sigma_0$ となると、弾性率は $E \rightarrow \alpha E$ と評価される。すなわち、 $E' \rightarrow \alpha E'$ および $E'' \rightarrow \alpha E''$ である。よって、真実接触面積率は $P \rightarrow \alpha^{-1}P$ と計算される。このとき、垂直応力は $\sigma_q \rightarrow \alpha\sigma_q$ となるが、 $E \rightarrow \alpha E$ であるからひずみ ε_q は不変である。したがって、摩擦係数 μ も、 $P \rightarrow \alpha^{-1}P$ かつ $E'' \rightarrow \alpha E''$ であるから影響を受けない。

一方、ひずみと応力の位相差 δ の誤差は摩擦係数の予測値に反映される。ここで、動的粘弾性試験のひずみ振幅を ε_0 とし、対応する応力を σ_0 とすると、貯蔵弾性率 E' および損失弾性率 E'' は、次式で求められる。

$$E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos \delta \quad (9-1)$$

$$E'' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin \delta \quad (9-2)$$

測定において位相差の測定誤差が Δ [rad/s]生じた場合、

$$\frac{\cos(\delta + \Delta)}{\cos \delta} = \cos \Delta - \tan \delta \sin \Delta \quad (9-3)$$

$$\frac{\sin(\delta + \Delta)}{\sin \delta} = \cos \Delta + \frac{1}{\tan \delta} \sin \Delta \quad (9-4)$$

となるから、測定誤差 Δ が反映される貯蔵弾性率 E'_{err} および損失弾性率 E''_{err} は、

$$E'_{\text{err}} = \left(\cos \Delta - \frac{E''}{E'} \sin \Delta \right) E' \quad (9-5)$$

$$E''_{\text{err}} = \left(\cos \Delta + \frac{E'}{E''} \sin \Delta \right) E'' \quad (9-6)$$

と評価されるべきである。

よって、拡張 Maxwell モデルの複素弾性率に対し、一律 $\Delta = \pm 5^\circ = \pm \pi/36$ radの誤差が生じたと仮定し、計算される摩擦係数への影響を調査した。その結果を Fig. 9-8 に示す。 $\Delta = +5^\circ$ では摩擦係数を高く、 $\Delta = -5^\circ$ では摩擦係数を低く評価することに繋がる。特に、摩擦係数が高くなる高速側での影響が大きく、非線形粘弾性領域での精度良い複素弾性率の把握が重要であるとわかる。

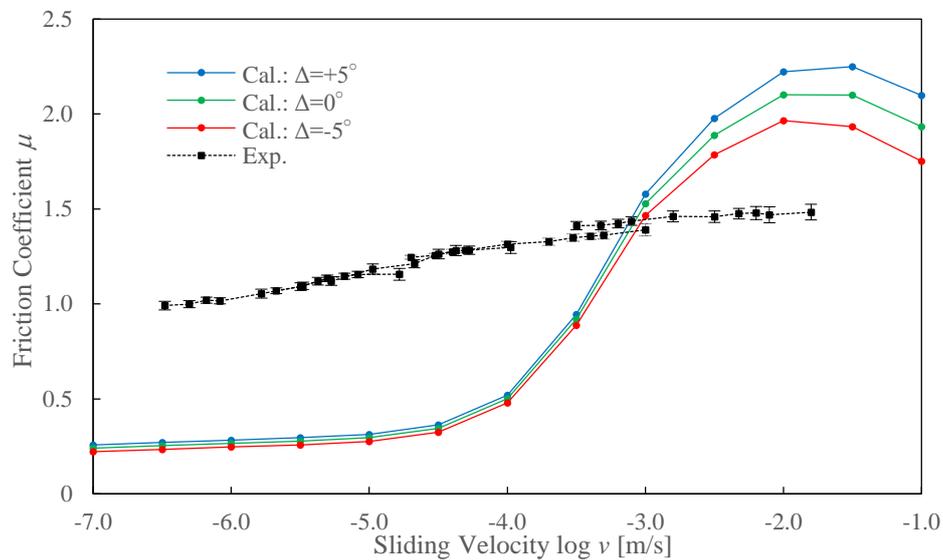


Fig. 9-8 μ - v curve comparing the calculations considering error of phase difference.

9.3.4 ヒステリシスロス過大評価の可能性に関する検討

本項では、摩擦試験および摩擦係数予測において、ヒステリシスロスに相当するとして比較対象に扱っていた試験結果／計算結果が、正味のヒステリシスロスより過剰評価されている可能性について検討する。

本研究で、ヒステリシス摩擦の検証に用いられてきた試験結果は、一辺を丸み付けされたゴムサンプルを用い、ウェット路面上で実施された摩擦試験において求められた。これは以下の知見に基づくものである。ゴムが路面と最初に接する一辺を丸み付けすることで、丸み付けしない場合に比べ、すべり速度に依らず摩擦係数が0.1程度低下することが知られている[50][52]。路面がゴムの接触部分を削ることで生じる掘り起こし摩擦が、丸み付けにより十分低減されていると考えられている。また、5.4節で説明したように、純水を散布したウェット路面でゴムがすべることで、ドライ路面ですべった際よりも、0.1~0.2程度摩擦係数が減少することが観察された。ゴム-路面間において水が潤滑剤の役割を果たし、凝着摩擦の影響を低減させたためである。このような考察に基づき、凝着摩擦および掘り起こし摩擦の影響が十分に除去され、ヒステリシス摩擦のみに対応する結果として Fig. 5-25 に示す結果を採用した。しかし、丸み付を行ってもゴムサンプル面は路面凹凸と接している以上、ゴムが路面に追従する際に生じるヒステリシス摩擦だけでなく、掘り起こし摩擦のようなマクロな路面粗さが寄与する摩擦係数も試験結果に反映されているはずである。よって、ヒステリシスロス以外の摩擦要因も厳密に考慮することが必要であり、摩擦モデルの検証に用いる摩擦試験結果はより小さく評価されるべきである。

他方、摩擦試験と比べている計算結果についても考慮しなければならない。摩擦モデルにおいて考慮される最大波数 q_1 はフリーパラメータであり、上述してきた計算結果は基本的に $\zeta = 3000$ に基づくものである。低速度においても摩擦モデルの摩擦係数を一致させるには $\zeta \gg 3000$ の倍率が必要であるが、これは原子レベルの凹凸までゴムが変形していることを意味し、3000以上の倍率は検討すべきでない。一方、速度依存性の観点からは、 ζ が小さいほどすべり速度に対する摩擦係数の感度が低くなるので、摩擦試験と速度依存性を一致させるには $\zeta \ll 3000$ の領域で議論すべきであるといえる。例として、 $\zeta = 200$ の場合の摩擦モデル(部分接触および非線形粘弾性を考慮)と摩擦試験の比較を Fig. 9-9 に示す。ここで、摩擦試験結果は第2軸にプロットされており、縦軸はそれぞれ1.0の範囲を有するように設定されている。図より明らかであるが、すべり速度に対する摩擦係数の増加傾向は異なるものの、図中の速度範囲における摩擦係数の増加量は摩擦モデルおよび摩擦試験ともに0.5程度である。このとき、 $\log v = -7.0$ mm/sにおいて摩擦係数の予測値は0.110であり、摩擦試験の1/10程度の大きさに留まっている。ただし、 ζ を下げると摩擦係数のピーク位置は高速側に移ることも留意しなければならない。

以上より、実験における掘り起こし摩擦など他因子の影響も考慮しなければならず、それに合わせて摩擦係数の絶対値と速度依存性との関係に基づく適切な倍率 ζ を決定することで、正味のヒステリシスロス进行评估すべきであると示唆される。

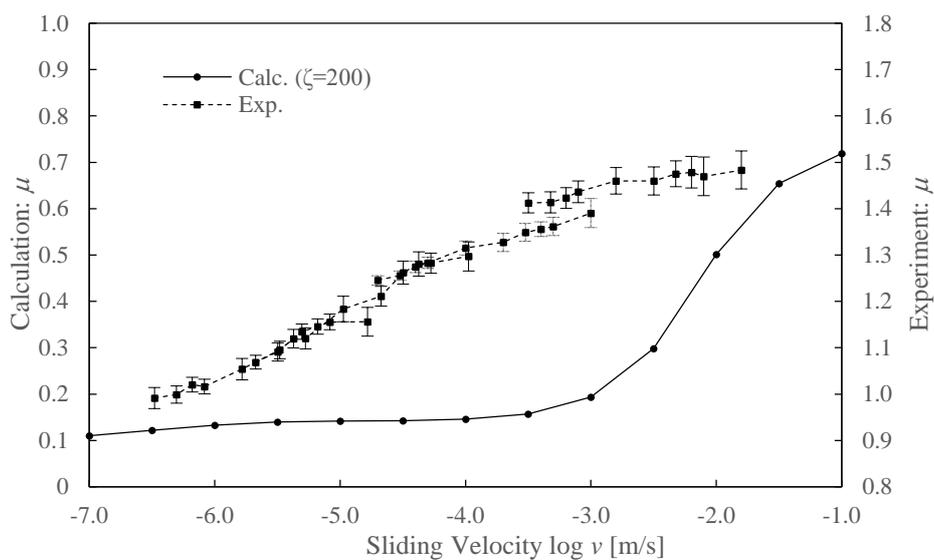


Fig. 9-9 μ - v curve comparing the calculation for $\zeta=200$ with experiment.

9.3.5 部分接触高さに関する検討

本研究では、部分接触を考慮した摩擦係数予測を実施する際、静的接触時の釣り合い位置 d_s を代表値としてすべり速度に依らず用いている。しかし、7.5 節で示したように、接触高さ d の摩擦係数に対する感度は高く、適切な表現が重要である。特に、すべり速度が異なると路面凹凸に対応する変形周期も変わるため、ゴムの弾性率も大きく異なってくる。よって、接触高さをすべり速度に依存する変数として求めることが必要であると考えられる。

本項では、周波数が大きくなると弾性率も増加することから、速度が高いほどマクロな接触率が低くなる、すなわち接触高さが高くなると仮定する。ここで、単純な式ではあるが、接触高さ $d(v)$ を次式で与える。

$$d(v) = d_s \left\{ 1 + \frac{3}{16} (\log v + 7) \right\} \quad (9-7)$$

このとき、 $\log v = -7.0 \text{ m/s}$ では $d = d_s$ となり静的接触時の高さと同しく、 $\log v = 1.0 \text{ m/s}$ では $d = 2.5d_s$ となり、対数スケールにおけるすべり速度でこれらの間を線形補間している。式(9-7)に接触高さが従うときの摩擦係数を Fig. 9-10 に示す。接触高さをすべり速度依存として扱うことで、摩擦係数が大幅に減少する。実験値との比較を容易にするために、摩擦試験結果を第2軸にプロットした場合の結果を Fig. 9-11 に示す。縦軸はそれぞれ 1.2 の範囲を有するように設定されている。式(9-7)では対数スケールで線形に接触高さを変えているため、 $-6.0 < \log v < -3.0 \text{ m/s}$ の速度域での摩擦係数の増加率が一致しているが、動的に接触高さを設定することが摩擦係数予測速度依存性を決定づける因子となり得る。たとえば、 $\omega = q_0 v$ を用い周波数依存性の弾性率を用いることで、接触高さを表現することなどが考えられる。またこのときも、予測される摩擦係数値は摩擦試験の 1/4 程度の絶対値となり、前節同様、正味のヒステリシス摩擦は小さく考えるべきであるとも推測される。

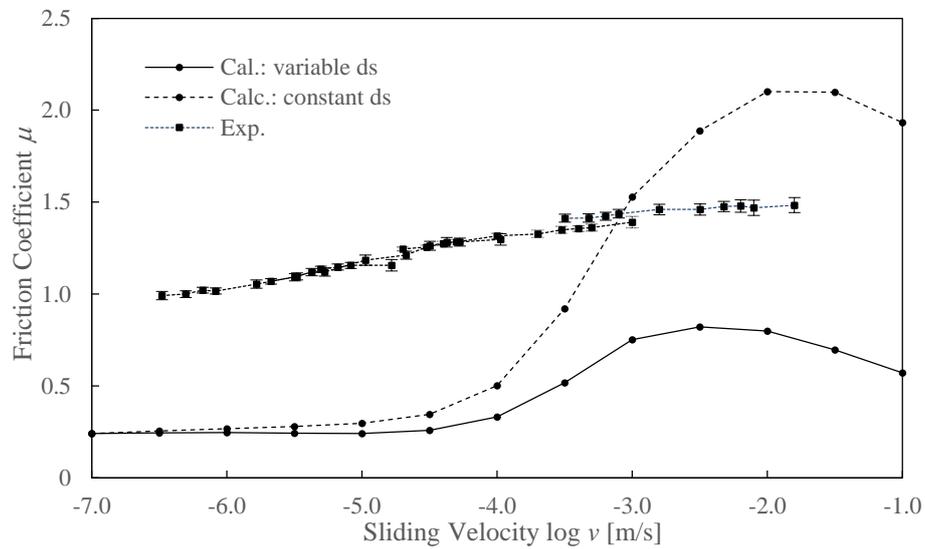


Fig. 9-10 μ - v curve comparing the calculation with experiment where d_s is a function of v .

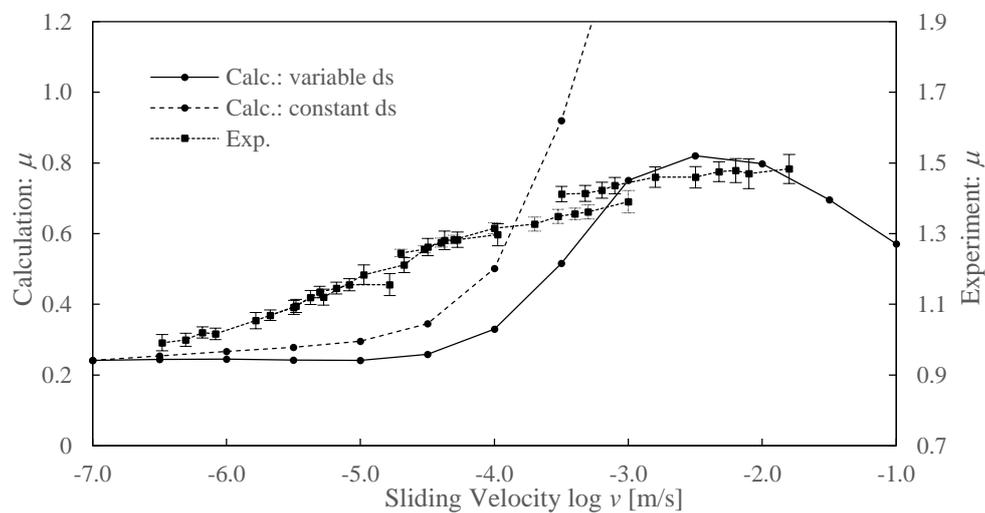


Fig. 9-11 μ - v curve modified from Fig. 9-10 with the experimental result on the second axis.

9.3.6 非線形粘弾性領域に関する検討

最後の考察として、拡張 Maxwell モデルにより表現される非線形粘弾性の妥当性について考察する。9.3.2 項および 9.3.3 項で述べたように、粘弾性および超弾性に対応するゴムの弾性率について、その測定精度およびフィッティング精度は摩擦係数の計算値に大きな影響を与える。さらに、有限ひずみかつ高周波数域の非線形粘弾性領域における弾性率も、8 章で示すとおり、摩擦係数の絶対値や速度依存性に反映される重要な領域である。しかし、実験的にこの領域の複素弾性率を測定することは難しく、拡張 Maxwell モデルは非線形粘弾性領域の推定を与えているだけである。そこで本項では、拡張 Maxwell モデルの特性、特に有限ひずみで正接損失のピークが低周波数側に移動する特性について、高分子の変形の視点から簡単に考察する。

周波数依存性は、3.2.1 項で述べたように、低周波数から高周波数にかけて、「ゴム状領域」、「遷移領域」、および「ガラス状領域」を有する。これらの特性は、高分子鎖の以下のような挙動により説明されている[7][33]。高分子鎖同士が近接すると、分子間の凝集などによる物理架橋点が存在する。このような架橋により、からみ合い効果が生じる。「ゴム状領域」では、からみ合い点で分子鎖が伸長する際に生じる応力緩和が支配的である。また、「ガラス上領域」では、高い周波数により、主鎖の回転や化学結合の振動の影響も反映されず、主鎖の伸縮運動が支配的となる。よって、ゴムの示す周波数依存性は、周波数が高くなることで、現象の支配因子が、分子鎖間の結合（からみ合い）がもたらす伸縮効果から分子鎖自体の伸縮効果へ移ることを意味しているといえる。

次に、ひずみ依存性に注目する。ひずみ依存性を表現する Kraus モデルは、分子鎖の物理的結合に生じる破壊と再構成とに基づいた現象論的モデルである(3.3.2 項参照)。すなわち、からみ合い効果の発現および消失の観点からその挙動を説明している。振動のひずみが大きくなると、からみ合いの出現が少なくなるとともに、からみ合いの解消も進んでいく。これらに対応して、貯蔵弾性率および損失弾性率もそれぞれ減少していくとされている。このとき、有限ひずみで貯蔵弾性率が収束していく傾向は、周波数依存性と同様、支配因子がからみ合い効果から分子鎖の伸縮へ移っていくからではないかと考えられる。

以上より、非線形粘弾性領域では、ひずみが大きいほどからみ合いの効果が弱まっているため、主鎖の伸縮が支配的になる周波数帯は、微小ひずみの場合よりも早く現れる、すなわち周波数が低い領域になると予測される。それに伴い、損失正接のピークも有限ひずみでは微小ひずみより低周波数側にシフトするといえる。ただし、実験的には観察が困難なスケールであるので、本考察を検証するには分子動力学法などを用いた原子論的手法が必要となる（たとえば、付録 D）。

このとき、非線形粘弾性領域の効果を定量的に議論することが重要である。たとえば、拡張 Maxwell モデルの緩和時間などを変更し、損失正接の分布の変動およびその摩擦係数への影響を検証すべきである。また、高分子物理学に基づいた構成則（文献[70]など）を摩擦モデルに導入することも考えられる。

10 結論と今後の課題

10.1 結論

本研究では、部分接触および非線形粘弾性を考慮した摩擦モデルを提案し、その摩擦係数への影響を議論した。また、摩擦試験を実施し、摩擦モデルの妥当性を検討した。本研究で得られた結論を以下に整理する。

- (i) 路面試料の表面粗さパワースペクトルおよびゴム試料の周波数依存性とひずみ依存性について複素弾性率を測定した。表面粗さパワースペクトルは、セルフアフィンフラクタル性を有することを示し、ハースト数を含む諸パラメータを決定した。複素弾性率は、一般化 Maxwell モデル、Kraus モデル、および拡張 Maxwell モデルを用いてフィッティングされた。
- (ii) ドライ路面およびウェット路面において、ゴム温度を制御し直動型摩擦試験を実施した。水が潤滑剤の役割を果たし凝着摩擦を低減させたため、ウェット路面はドライ路面と比較し摩擦係数の減少がみられた。異なる温度での測定値は WLF 式を用いて速度換算され、得られたマスターカーブは良く連続していたことから、摩擦係数とゴムの粘弾性とは密接な関係があることを示した。摩擦モデルとの比較には、他の摩擦要因の影響が少ない、ウェット路面のマスターカーブを用いることとした。
- (iii) Persson の摩擦理論により計算される摩擦係数値は、試験結果を過大評価しており、絶対値と速度依存性が一致していない。また、摩擦係数の計算は、粘弾性特性のモデルの種類およびその精度に大きく影響を受けることを示した。
- (iv) ゴム - 路面間のマクロな部分接触に基づく摩擦モデルを提案した。路面高さの分布が正規分布に従うセルフアフィンフラクタル表面であるとし、部分接触で生じる公称応力を求めた。さらに、ゴムが部分接触している路面高さのみが寄与する表面粗さパワースペクトルを立式し、部分接触時の真実接触面積率および摩擦係数の関係を導出した。修正される表面粗さパワースペクトルの妥当性を表面モデルにより確認した。このとき、部分接触を考慮することで摩擦係数は大幅に減少し、接触高さに大きく依存することを示した。よって、静的接触時の釣り合い位置を求めて、代表値として用いることとした。

-
- (v) 非線形粘弾性を考慮した摩擦モデルを提案した。波数ごとに、Persson の接触理論より計算される垂直応力と釣り合うひずみ量を求める。各波数のひずみに基づく弾性率を用いることで、非線形粘弾性が反映された摩擦係数が計算される。このとき、拡張 Maxwell モデルの複素弾性率の非線形性より、摩擦係数のピーク位置が低速側に移動することを確認した。

 - (vi) 部分接触および非線形粘弾性を合わせて考慮した摩擦係数予測と摩擦試験との比較を実施した。提案した摩擦モデルは、低速側で摩擦試験より小さな摩擦係数を示し、すべり速度に対する摩擦係数の増加率を大きく見積もった。非線形粘弾性領域における複素弾性率のより精度の高い同定および表現が必要であり、部分接触高さをすべり速度に依存する変数として求めるべきであることを示した。

10.2 今後の課題

ゴム-路面間の摩擦現象は、ヒステリシスロス以外の諸要因を含み、マルチスケール性を考慮しなければならない、複雑な現象である。本研究における摩擦モデルと摩擦試験との比較に基づき、実計測および摩擦モデルともに以下の課題を解決する必要があるといえる。

最初に計測に関する課題について記す。ゴムの摩擦係数は、その非線形粘弾性の影響を大きく受けるため、特に有限ひずみかつ高周波数の複素弾性率測定が必要不可欠である。しかし、一般にそのような領域の測定は難しい。そこで、粘弾性および超弾性に対応する領域内で、様々な周波数とひずみの組み合わせにおいて粘弾性試験を実施し、試験データを増やすことが重要である。そうすることで、非線形粘弾性モデルの妥当性の検証や非線形粘弾性領域の弾性率の挙動を推定することが可能となる。また、摩擦試験においても、掘り起こし摩擦や凝着摩擦の影響の寄与をさらに低減する工夫が必要である。たとえば、本研究よりマクロな路面粗さが小さい試料を用いることで掘り起こし摩擦の影響を低くし、更なる荷重を負荷することでヒステリシスロスの効果を上げることが考えられる。

次に、提案した摩擦モデルの課題について述べる。部分接触を考慮した摩擦モデルでは、静的接触時の釣り合い位置を接触高さとしてすべり速度に依らず用いてきたが、実際には速度に依存する変数として接触高さを表現すべきである。それにより、摩擦係数のすべり速度依存性は大きく変化する。加えて、ミクロスケールの非線形粘弾性領域の詳細な評価も必要である。本研究においては、部分接触を考慮しても、ミクロな粗さにおいては100%ひずみのオーダーの変形量が見積もられている。また、粘弾性試験ではせん断ひずみによって測定しているため、モデルで想定している引張ひずみや圧縮ひずみの非線形粘弾性特性とは異なる場合があり、圧縮においても適用できる粘弾性試験の範囲を把握することが要求される。摩擦による摩耗などを考えると、ミクロスケールにおけるひずみや垂直応力の上限值を設定した摩擦モデルの必要性も十分に考えられる。

付録A 拡張 Maxwell モデルの基礎式

本付録では、一般化 Maxwell モデルと拡張 Maxwell モデルにおける基礎式の関係について述べる。

まず、一般化 Maxwell モデルの一要素を支配する基礎式は、式(3-2)より次式で表される。

$$\frac{1}{E_i} \frac{d\sigma_i}{dt} + \frac{1}{\eta_i} \sigma_i = \frac{d\varepsilon_i}{dt} \quad (\text{A-1})$$

次に、拡張 Maxwell モデルに対する基礎式は、式(3-15)から式(3-17)より以下のとおりである。

$$\frac{d\sigma_i}{dt} + \frac{\dot{z}_i}{z_i} \sigma_i = E_i \frac{d\varepsilon_i}{dt} \quad (\text{A-2})$$

$$\dot{z}_i = \alpha_i (\tau_i |\dot{\varepsilon}| + 1) + (1 - \alpha_i) \left(\sum_{j=1}^L d_{ij} q_j + 1 \right) \quad (\text{A-3})$$

$$\dot{q}_j(t) = \frac{1}{\tau_i} (\tau_0 |\dot{\varepsilon}(t)| - q_j) \quad (\text{A-4})$$

ここで、Maxwell 要素に対して入力されるひずみ振幅を $\Delta\varepsilon$ とし、 $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$ を考える。このとき、 $\dot{\varepsilon} \rightarrow 0$ でもあるから、これを式(A-4)に代入すると、

$$\dot{q}_j(t) = -\frac{1}{\tau_i} q_j \quad (\text{A-5})$$

が得られる。よって、 q_j の解は、次のとおりである。

$$q_j = C_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_i}\right) \quad (\text{A-6})$$

ここで、 $t = 0$ における q_j の解を C_0 とした。 q_j は時間とともに減衰するため、ひずみ振幅が十分に入力され、応力振幅が定常状態に達すると、 $q_j = 0$ とすることができる。

よって、 $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 $\dot{\varepsilon} = 0$ および $q_j = 0$ を式(A-3)に代入することで、

$$\dot{z}_i = \alpha_i + (1 - \alpha_i) = 1 \quad (\text{A-7})$$

が導かれ、拡張 Maxwell モデルの基礎式と一致する。

以上より、 $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、すなわちひずみが微小ひずみであるとき、一般化 Maxwell モデルと拡張 Maxwell モデルは同一の基礎式に従うことが確認される。

付録B 拡張 Maxwell モデルのパラメータ フィッティング指針

ゴムの複素弾性率の測定値に対して、非線形最小二乗法を適用することで拡張 Maxwell モデルのフィッティングを行った。非線形最小二乗法として、MATLAB の関数ライブラリ「lsqnonlin」を用いた。本関数は、信頼領域 Reflective 法に基づくアルゴリズムに従う。詳細については、文献[71]を参照されたい。

フィッティングは、貯蔵弾性率および損失弾性率のそれぞれについて、測定値と拡張 Maxwell モデルとの相対誤差が最小になるように実施された。ここで、貯蔵弾性率または損失弾性率を材料パラメータで偏微分した値で構成されるヤコビ行列は、各 Maxwell 要素 ($i = 0 \sim n$) における以下の関係より直接計算できる。

(i) $i = 0$ のとき

$i = 0$ の材料パラメータは、ばね係数の E_0 のみである。よって、測定点条件が角周波数 ω およびひずみ ε であるとき、ヤコビ行列の要素は貯蔵弾性率および損失弾性率に対してそれぞれ次式のとおりとなる。

$$\frac{\partial E'(\omega, \varepsilon)}{\partial E_0} = 1 \quad (\text{B-1})$$

$$\frac{\partial E''(\omega, \varepsilon)}{\partial E_0} = 0 \quad (\text{B-2})$$

(ii) $i \neq 0$ のとき

$i \neq 0$ においては、材料パラメータ E_i , z_i , τ_i , および α_i のそれぞれについて偏微分を計算する必要がある。ただし、貯蔵弾性率および損失弾性率は Maxwell 要素の和より計算されるので、任意の材料パラメータ x_i に対して、ヤコビ行列の要素は、

$$\frac{\partial E'(\omega, \varepsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial E'_i}{\partial x_i} \quad (\text{B-3})$$

$$\frac{\partial E''(\omega, \varepsilon)}{\partial x_i} = \frac{\partial E''_i}{\partial x_i} \quad (\text{B-4})$$

で求めることができる。 E'_i および E''_i の材料パラメータによる偏微分は以下の諸式より計算される。

$$\frac{\partial E'_i}{\partial E_i} = \frac{z_i^2 \omega^2}{z_i^2 \omega^2 + \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\}} \quad (\text{B-5})$$

$$\frac{\partial E'_i}{\partial z_i} = \frac{2E_i z_i \omega^2 \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\}}{\left[z_i^2 \omega^2 + \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \right]^2} \quad (\text{B-6})$$

$$\frac{\partial E'_i}{\partial \tau_i} = \frac{-\frac{4}{\pi} E_i z_i^2 \alpha_i \varepsilon \omega^3 \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{8}{9} \alpha_i \tau_i \right) \right\}}{\left[z_i^2 \omega^2 + \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \right]^2} \quad (\text{B-7})$$

$$\frac{\partial E'_i}{\partial \alpha_i} = \frac{-\frac{4}{\pi} E_i z_i^2 \varepsilon \omega^3 \left[(\tau_i - 1) + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left\{ (\tau_i - 1)(1 - \alpha_i) + \left(\frac{8}{9} \tau_i - 1 \right) \alpha_i \tau_i \right\} \right]}{\left[z_i^2 \omega^2 + \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \right]^2} \quad (\text{B-8})$$

$$\frac{\partial E''_i}{\partial E_i} = \frac{z_i \omega \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\}}{z_i^2 \omega^2 + \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\}} \quad (\text{B-9})$$

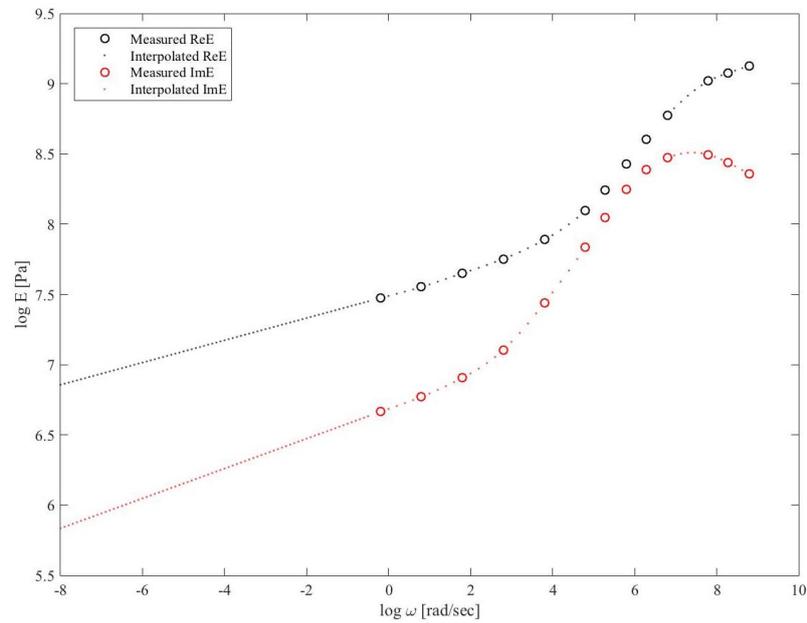
$$\frac{\partial E''_i}{\partial z_i} = \frac{E_i \omega \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left[-z_i^2 \omega^2 + \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \right]}{\left[z_i^2 \omega^2 + \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \right]^2} \quad (\text{B-10})$$

$$\frac{\partial E''_i}{\partial \tau_i} = \frac{\frac{4}{3\pi} E_i z_i \alpha_i \varepsilon \omega^2 \left[z_i^2 \omega^2 - 2 \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{8}{9} \alpha_i \tau_i \right) \right\}^2 \right]}{\left[z_i^2 \omega^2 + \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \right]^2} \quad (\text{B-11})$$

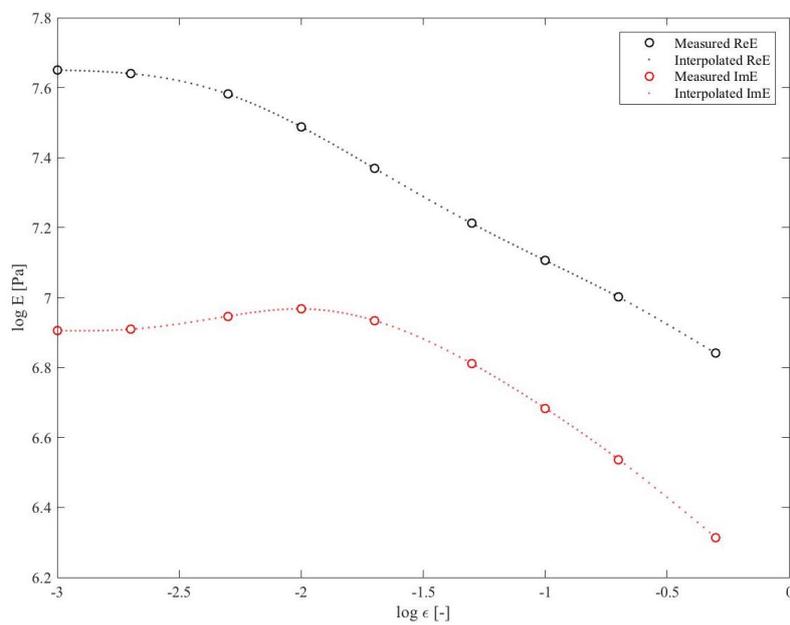
$$\frac{\partial E''_i}{\partial \alpha_i} = \frac{\frac{2}{\pi} E_i z_i \varepsilon \omega^2 \left[\left(\frac{2}{3} \tau_i - 1 \right) z_i^2 \omega^2 - \left(\frac{4}{3} \tau_i - 1 \right) \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \right]}{\left[z_i^2 \omega^2 + \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{4}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \left\{ 1 + \frac{2}{\pi} \varepsilon \omega \left(1 - \alpha_i + \frac{2}{3} \alpha_i \tau_i \right) \right\} \right]^2} \quad (\text{B-12})$$

フィッティングの際には、周波数依存性データおよびひずみ依存性データの測定間隔が開いているので、補間モデルを用いて測定値を補間することでデータ数を増やした。また、拡張 Maxwell 要素により計算される貯蔵弾性率は $E'(\omega, \varepsilon) \geq E_0$ の関係を満たすから、基本的には、周波数依存性およびひずみ依存性に関する測定値のうち最小の貯蔵弾性率に E_0 が合わせられる。よって、周波数依存性データの貯蔵弾性率の最小値とひずみ依存性データの貯蔵弾性率の最小値との差が大きい場合、その差に対応する周波数帯／ひずみ帯でフィッティング結果の振動が生じ得る。したがって、本研究では、 $-8 \leq \log \omega \leq -0.5$ [rad/s] の領域でも補間モデルを用いてデータ数を補っている。データ数を増やし、フィッティング対象とする複素弾性率を Fig. B-1 に示す。

以上より、Fig. B-1 の複素弾性率に対して $i = 24$ としたときの拡張 Maxwell モデルでフィッティングを実施し、その結果が 5.2.4 項に示すとおり得られた。フィッティング結果は測定値の傾向を良く表現するものの、小さな振動がみられる。より平滑化された結果を得るには、一般化 Maxwell モデルの近似手法（文献[72]など）と組み合わせることも考えられる。



(a)



(b)

Fig. B-1 The complex modulus of elasticity subject to fitting the extended Maxwell model;
(a) frequency dependence, (b) strain dependence.

付録C 表面モデルのパワースペクトルに対する 平均化処理

7.2 節で用いた表面モデルの表面粗さパワースペクトルを計算する手法について説明する。本付録の表面モデルは、サイズ $L \times L$ に対して $L = 0.01$ [m] およびデータのグリッド数 $N \times N$ に対して $N = 1024$ とした際に Table 5-2 のパラメータより作成される路面データ $h(\mathbf{x})$ である。

このとき、 $h(\mathbf{x})$ より計算される 2 次元データの表面粗さパワースペクトル $C(\mathbf{q})$ について、波数ベクトル \mathbf{q} のスカラー q を用いて 1 次元データ $C(q)$ に変換した際の結果を Fig. C-1 に示す。図に示されるように、ばらつきのない連続したパワースペクトルが得られる。

次に、部分接触モデルに基づき接触高さ $d = 0$ [μm] としたときの (すなわち、 $h(\mathbf{x}) \geq 0$ [μm] の高さのみが寄与する) 修正パワースペクトルを求める。計算された 2 次元データに対し 1 次元のパワースペクトルに変換した際の結果が Fig. C-2 である。Fig. C-1 とは異なり、パワースペクトルはばらついた値を示している。

そこで、本研究では文献[28]と同様に、表面モデルのパワースペクトルに対しても、 $dq \approx 2\pi/L$ の波数長さごとに領域を分割し、各領域に存在するパワースペクトルの値の平均値を求める平均化処理を実施した。この処理は、路面サンプルの表面粗さパワースペクトルを計算する際にも用いられている手法である。Fig. C-2 に対し平均化処理を施した場合の結果を Fig. C-3 に示す。平均化によりばらつきが抑えられ、表面粗さパワースペクトルの特性値が得られるようになる。

したがって、本研究では、表面モデルの表面粗さパワースペクトルを計算する際にも平均化処理を行い、議論を進めた。

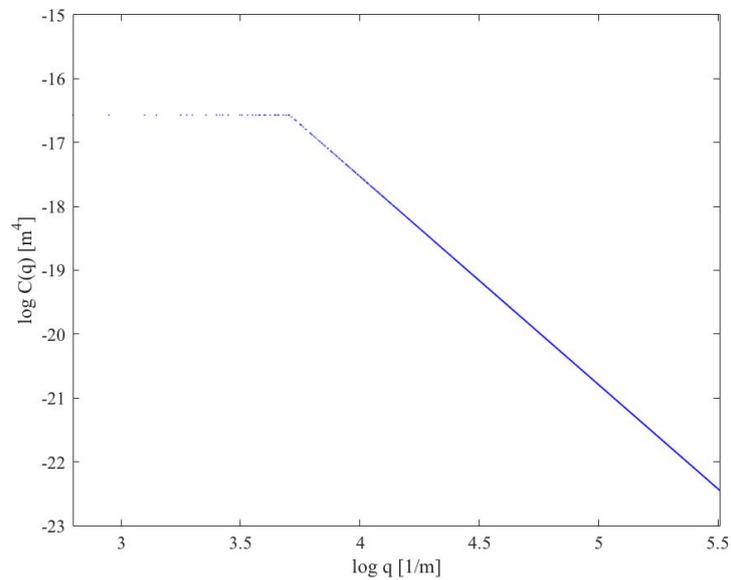


Fig. C-1 Surface roughness power spectrum of the original surface model.

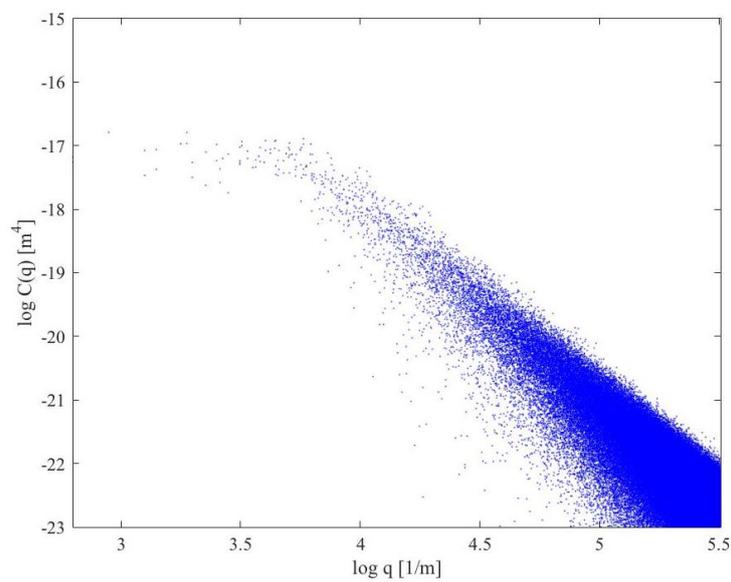


Fig. C-2 Surface roughness power spectrum of the modified surface model.

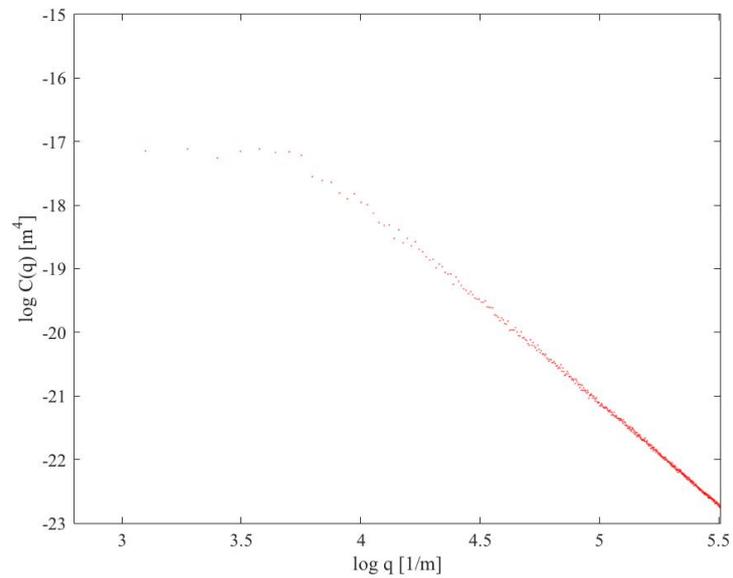


Fig. C-3 Surface roughness power spectrum of the modified surface model after averaging process.

付録D 粗視化分子動力学法による検証指針

ゴムを含む高分子材料の特異性（応力-ひずみ特性，伸縮性，ガラス転移点など）は，高分子の内部構造に由来する．そのため，分子鎖の配向性，架橋による網目構造，およびフィラーの充填などが与える高分子物性への影響の理解は重要である．しかし，高分子内で生じる現象の詳細な実験的評価は難しく，原子間および分子間の相互作用を計算する分子動力学法が有用であるといえる．特に，高分子鎖のような重合体のからみ合いを検証するには，計算コストを鑑みて，全原子の作用を計算する分子動力学法に代わり，粗視化分子動力学法が多く用いられている．粗視化分子動力学法とは，数原子あるいは数～数十モノマーの重合体を一つの構成単位とし，その構成単位より形成される鎖を高分子鎖とみなすことで，分子鎖および分子鎖間の運動をシミュレーションする手法である[73]．

本研究のようなマルチスケール性に基づく現象への理解には，ゴムの微視的な運動の解釈が不可欠である．Persson の摩擦理論においては，ヒステリシスロスが生じる最大波数であるカットオフ波数 q_1 をフリーパラメータとして扱っている．カットオフ波数は，路面の特性だけでは決定されず，ゴムの特性とも密接な関係があるとされている．よって，ナノメートルオーダーにおける粘弾性の発現や文献[32]で実施されたような表面凹凸による高分子鎖の応答を解明することで， q_1 の決定が可能になると期待される．本付録では，以上のような観点に基づき実施された粗視化分子動力学法を用いた取り組みについて記載する．

粗視化分子動力学法には，高分子物性解析ソフトウェア「J-OCTA」を用いた．実験・摩擦モデルとの比較を目的とするため，ゴムサンプルと同様にスチレンブタジエンゴムを対象とする．

スチレンブタジエンゴム（SBR : Styrene-Butadiene Rubber）は，スチレンとブタジエンとの共重合体である．以下の知見に基づき，SBR 一分子鎖のモデリングを決定した．

- (i) 重合度 $n > 1000$ で高分子鎖的な特性が現れる[7]
 - (ii) 現在生産されている SBR のスチレン含有量は20~40 %である[74]
 - (iii) SBR（特に，乳化重合によるコールドラバー）のブタジエンの結合様式においては，シス-1,4 結合が 12 %，トランス-1,4 結合が 71 %，および 1,2-結合が 16 %を占める[75]
- よって，SBR 一分子鎖の重合度に対して，全重合度を 1000 とし，スチレンには 250 およびブタジエンには 750 の重合度を与えた．ブタジエンにおいて，詳細には，シス-1,4 結合は 90，トランス-1,4 結合は 540，および 1,2-結合は 120 の重合度を有するとした．このとき，合計 1000 のモノマーをランダムに重合させることで SBR の一分子鎖モデルとして取り扱う．Fig. D-1 は，上述したモノマーにより構成されるポリマーの概念図である．

ここで、粗視化レベルの設定として、1モノマーを1つの粗視化ユニットとして取り扱うこととした。すなわち、本モデルでは一分子鎖あたり1000個の粗視化ユニットを考慮することを意味する。このとき、粗視化ユニット間のポテンシャルを設定するには、一本鎖の全原子の分子動力学計算を行い、その後に結合・結合角・結合二面角やLJ型非結合に対応するポテンシャルを決定するステップを踏まなければならない。本研究においては、全原子計算の計算コスト等に起因して、ポテンシャル決定の段階に留まっている。

タイヤゴムの粗視化分子動力学法を実行するには、ポテンシャルの決定ステップ以外に、化学架橋の反映、フィラーの作成、ポリマーにより構成されるシステム系の作成なども行う必要がある。特に、本付録では、化学架橋およびフィラーの取り扱いについて以下に説明を設ける。

タイヤゴムは、通常、硫黄によるゴムの加硫が行われている。SBRにおいては、ブタジエンが有する二重結合の α -メチレンである $-\text{CH}_2-$ が硫黄架橋の反応点となる[76]。よって、2モノマーのブタジエン間に直接硫黄架橋を設定し、分子鎖を直接モデリングする手法が考えられる。しかし、架橋を組み込んで分子鎖をモデル化すると、架橋を考慮しない場合に比べ、分子量の増大に伴い大幅な計算時間の増加が予想される。そこで、架橋を考慮するには、一本鎖により構成されるシステム系を作成した後、指定距離以内に近づいた原子同士に共有結合を形成する手法が有用となる（たとえば文献[77]参照）。

タイヤゴムの挙動においては、カーボンブラックによる補強効果が重要な役割を果たしている。よって、粗視化分子動力学法においてもカーボンブラックをフィラーとして適切に表現する必要がある。フィラーを系に組み込む際には、その化学構造から粗視化ユニットを作成するのではなく、ビーズスプリングモデルを用いた粗視化分子動力学法においてビーズの集合体として表現されることが多い[78][79]。

以上、タイヤゴムにおける粗視化分子動力学法について概説した。高分子鎖の複雑性により、「粗視化」した分子動力学計算でも計算コストが莫大となり得る。よって、分子動力学計算においては、対象とする高分子組成やポテンシャルを適切に決定するなど、慎重にロードマップを作成することが重要である。

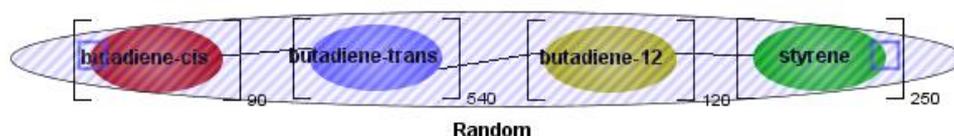


Fig. D-1 Schematic diagram for one molecular chain of styrene-butadiene rubber.

謝辞

本研究を進めるにあたり、多くの方のご指導、ご協力を賜りました。感謝申し上げます。

泉聡志教授には、学部時代より3年間指導教員としてご指導賜りました。研究会等において相談させて頂く度に鋭いご指摘を頂き、ここまで研究を進めることができました。学会や講習会を含めまして、多くの学外のイベントにも参加させて頂き、非常に刺激的な研究生活になりました。また、研究に留まらず、日頃よりざっくばらんなお話を伺うことができ、大変勉強になりました。

酒井信介教授には、研究会や授業におきまして多くの知見をご教授頂きました。グローバル機械工学人材交流プログラム(GME)では、留学先研究室のご紹介など、親身になって対応下さいました。

田中展助教には、本研究において委曲を尽くしたご指導賜りました。学部時代より研究を含め多くのことに相談に乗って頂き、常日頃から暖かいご配慮・ご支援を下さいました。本論文だけでなく、学会投稿論文や発表資料などについても毎回添削頂き、大変勉強になりました。大阪大学へ移られた後も、定期的なミーティングや学会でのお力添えを下さいまして、感謝してもしきれません。ご迷惑をお掛けするばかりでしたが、お陰様でこのように修士論文として纏め上げることができました。

波田野明日可助教には、研究や授業などに対して数多くの相談にアドバイス頂きました。日頃の研究室生活においても常に細かにお気遣い頂き、一心に研究に打ち込むことができました。

株式会社ブリヂストンの門脇弘氏には、本研究を進めるにあたり多くの助言を賜りました。ゴムサンプルやその粘弾性測定データなどもご手配頂きまして、数々の実験・シミュレーションを行うことができました。また、打合せや学会において、広くご支援頂きました。

独立行政法人労働安全衛生総合研究所の山際謙太氏には、路面試料の測定機器の使用等におきまして厚いご協力を頂きました。測定や粗さに関するディスカッションにも丁寧に付き合っ下さり、研究への理解を深めることができました。

博士課程の周立軍氏および修士課程1年の世古口涼氏をはじめとしまして、これまで酒井・泉研究室でタイヤゴムの研究に携わられた諸兄には、幾多にもわたる研究成果を通しまして、本研究の後押しを頂きました。

甲子園金属株式会社、株式会社トリニティラボ、および株式会社JSOLの皆様には、ゴムサンプル加工、摩擦試験装置、およびソフトウェアの各側面よりご協力賜りました。

塩見淳一郎准教授およびスウェーデン王立工科大学の Lars Drugge 先生, Mårten Olsson 先生, Mohammad Mehdi Davari 氏には, GME による 2014 年 9 月から 2015 年 1 月までのスウェーデン留学において厚くご支援賜りました. 特に, Lars Drugge 先生および Mohammad Mehdi Davari 氏, ならびに両氏が所属される KTH Aeronautical & Vehicle Engineering の皆様には, 5 ヶ月間の全期間にわたり, 研究の親身なサポートを賜りました. タイヤの物理モデルの研究に携わらせて頂き, 摩擦現象をマクロな視点から深く勉強する機会となりました. そして何より, 海外での研究生活という何ものに代えがたい有意義な経験を積むことができました.

秘書の皆様には, 書類申請や備品の手配等, 陰ながら厚くご支援賜りました.

研究室の同期を含む酒井・泉研究室の諸兄には, 日頃の研究生活を通して, 大変お世話になりました. お陰様で充実した研究室での日々を過ごすことができました.

これまで心身両面から私を支えてくださった家族にも別段の感謝を捧げます.

以上, 簡単ではございますが, 研究および研究生活に携わって頂いた皆様に対し, ここに記して深甚の謝意を表します.

2016 年 2 月 3 日

吉村 侯泰

参考文献

- [1] 株式会社ブリヂストン編, “自動車用タイヤの基礎と実際”, 東京電機大学出版局, 2008.
- [2] Société de Technologie Michelin, “The tyre – rolling resistance and fuel savings”, 2003.
- [3] 白石 正貴, 林 公博, “自動車走行シミュレーションのための FEM タイヤモデル”, 日本ゴム協会誌, Vol.74, No.4, pp.131-136, 2001.
- [4] 一般社団法人 日本自動車タイヤ協会, “低燃費タイヤ等の普及促進に関する表示ガイドライン”, <http://www.jatma.or.jp/labeling/pdf/labelingseido.pdf> [2016 年 2 月 1 日確認], 2009.
- [5] 奥田 慶一郎, “現在のタイヤ産業を取り巻く環境”, 自動車技術, Vol.67, No.4, pp.10-14, 2013.
- [6] 佐口 隆成, “タイヤの環境対応技術”, 建設の施工企画, No.744, pp.62-65, 2012.
- [7] 深堀 美英, “設計のための高分子の力学 高分子鎖が織りなす力学の世界”, 技報堂出版, 2000.
- [8] 芥川 恵造, 門田 邦信, “タイヤの将来像”, 自動車技術, Vol.67, No.4, pp.15-20, 2013.
- [9] 新開 明彦, “路面状況とタイヤ摩擦”, 自動車技術, Vol.67, No.4, pp.21-26, 2013.
- [10] 芥川 恵造, “タイヤの転がり抵抗”, トライボロジー会議 2013 秋(福岡), C23, 2013.
- [11] U. Sandberg, “Influence of Road Surface Texture on Traffic Characteristics Related to Environment, Economy and Safety: A State-of-the-art Study Regarding Measures and Measuring Methods”, Technical Report 53A-1997, Swedish National Road and Transport Research Institute (VTI), 1998.
- [12] B. N. J. Persson, O. Albohr, U. Tartaglino, A. I. Volokitin, E. Tosatti, “On the nature of surface roughness with application to contact mechanics, sealing, rubber friction and adhesion”, Journal of Physics: Condensed Matter, Vol.17, pp.1-62, 2005.
- [13] B. Lorenz, B. N. J. Persson, G. Fortunato, M. Giustiano, F. Baldoni, “Rubber friction for tire tread compound on road surfaces”, Journal of Physics: Condensed matter, Vol.25, pp.1-8, 2013.
- [14] 尾崎 邦宏, “レオロジーの世界”, 工業調査会, 2004.
- [15] O. Kramer, D. J. Ferry, “Science and technology of rubber”, ed. F. R. Eirich, Chap.5, Academic Press, 1978.
- [16] A. R. Payne, “Strainwork Dependence of Filler-Loaded Vulcanizates”, Journal of Applied Polymer Science, Vol.8, pp.2661-2686, 1964.
- [17] A. R. Payne, “A note on the conductivity and modulus of carbon black-loaded rubbers”, journal of Applied Polymer Science, Vol.9, pp.1073-1082, 1965.
- [18] D. I. G. Jones, “Temperature-frequency dependence of dynamic properties of damping materials”,

-
- Journal of Sound and Vibration, Vol.33, pp.451-470, 1974.
- [19] C. Barrès, A. Mongruel, M. Cartault, J. L. Leblanc, “Linear and nonlinear viscoelasticity of carbon black filled elastomers: Use of complementary rheological characterizations”, Journal of Applied Polymer Science, Vol.87, pp.31-41, 2003.
- [20] E. Guth, “Theory of Filler Reinforcement”, Journal of Applied Physics, Vol.16, No.20, pp.20-25, 1945.
- [21] M. J. Wang, “Effect of polymer-filler and filler-filler interactions on dynamic properties of filled vulcanizates”, Rubber Chemistry and Technology, Vol.71, No.3, pp.520-589, 1998.
- [22] 牧浦 雅仁, “ゴムとフィラーについて”, 日本ゴム協会誌, Vol.71, No.9, pp.583-587, 1998.
- [23] J. Gao, W. D. Luedtke, D. Gourdon, M. Ruths, J. N. Israelachvili, U. Landman, “Frictional Forces and Amontons’ Law: From the Molecular to the Macroscopic Scale”, Journal of Physical Chemistry B, Vol.108, pp.3410-3425, 2004.
- [24] F. P. Bowden, D. Tabor, “The friction and lubrication of solids”, Oxford at The Clarendon Press, 1950.
- [25] J. F. Archard, “Contact and Rubbing of Flat Surfaces”, Journal of Applied Physics, Vol.24, No.8, pp.981-988, 1953.
- [26] J. A. Greenwood, “Constriction resistance and the real area of contact”, British Journal of Applied Physics, Vol.17, pp.1621-1632, 1966.
- [27] I. Szlufarska, M. Chandross, R. W. Carpick, “Recent advances in single-asperity nanotribology”, Journal of Physics D: Applied Physics, Vol.41, pp.1-39, 2008.
- [28] 緒方 公俊, “表面形状がゴムの摩擦に及ぼす影響の有限要素法解析”, 東京大学大学院工学系機械工学専攻, 修士論文, 2012.
- [29] 伊藤 哲久, “ゴムの摩擦特性に及ぼす表面凹凸の影響に関する有限要素法解析”, 東京大学工学部機械工学科, 卒業論文, 2013.
- [30] S. Boere, I. L. Arteaga, A. Kujipers, H. Nijmeijer, “Tyre/road interaction model for the prediction of road texture influence on rolling resistance”, International Journal of Vehicle Design, Vol.65, pp.202-221, 2014.
- [31] K. Yoshimura, M. M. Davari, L. Drugge, J. Jerrelind, A. S. Trigell, “Studying road roughness effect on rolling resistance using brush tyre model and self-affine fractal surfaces”, 24th International Symposium on Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks, 22-3, 2015.
- [32] 荒牧 純平, “分子動力学に基づく表面粗さを考慮した高分子材料の摺動特性評価”, 東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻, 修士論文, 2015.
- [33] 増井 友美, 岸本 浩通, “ポリマーダイナミクスとタイヤ性能 - 中性子準弾性散乱法によるゴムの研究 -”, 自動車技術, Vol.69, No.10, pp.92-97, 2015.
- [34] 三原 諭, “最高のウェットグレードを実現するための先進コンパウンド解析技術”, 自動車技術, Vol.69, No.11, pp.22-26, 2015.
-

-
- [35] 森田 裕史, “ゴム材料に対する粗視化分子動力学シミュレーションの適用事例”, 日本ゴム協会誌, Vol.80, No.9, pp.350-355, 2007.
- [36] 若林 昇, 多田 俊生, 尾藤 容正, 数納 広哉, 岩沢 美佐子, 新宮 哲, 森田 裕史, 萩田 克美, “ゴム中のナノ粒子ネットワーク構造のモデル構築による高性能タイヤの開発”, 平成 23 年度先端研究施設共用促進事業「地球シミュレータ産業戦略利用プログラム」利用成果報告書, pp.19-29, 2012.
- [37] 小島 隆嗣, 小石 正隆, “繰返し伸張変形におけるフィラー充填ゴムの粗視化分子動力学シミュレーション”, 第 28 回計算力学講演会, 2015.
- [38] 内藤 正登, “京コンピュータを用いたタイヤ用ゴムの大規模分子動力学シミュレーション”, J-OCTA ユーザー会議, 2015.
- [39] 工藤 正和, 高橋 順一, 山本 敏治, 内田 真, 富田 佳宏, “結晶性ポリマーの劣化挙動のマルチスケールモデリング”, 材料, Vol.64, No.4, pp.311-316, 2015.
- [40] 門脇 弘, 田澤 晴列, 島 広志, 橋本 学, 奥田 洋司, 瀬田 英介, 平群 久司, 佐口 隆成, “大規模数値解析を用いた充填ゴムの粘弾性特性に関する研究”, M&M 材料力学カンファレンス, OS0302-212, 2015.
- [41] B. N. J. Persson, “On the theory of rubber friction”, *Surface Science*, Vol.401, pp.445-454, 1998.
- [42] B. N. J. Persson, E. Tosatti, “Qualitative theory of rubber friction and wear”, *Journal of Chemical Physics*, Vol.112, No.4, pp.2021-2029, 2000.
- [43] B. N. J. Persson, “Theory of rubber friction and contact mechanics”, *Journal of Chemical Physics*, Vol.115, No.8, pp.3840-3861, 2001.
- [44] B. N. J. Persson, “Rubber friction: role of the flash temperature”, *Journal of Physics: Condensed Matter*, Vol.18, pp.7789-7823, 2006.
- [45] B. N. J. Persson, “Role of Frictional Heating in Rubber Friction”, *Tribology Letters*, Vol.56, pp.77-92, 2014.
- [46] 森住 竜雄, “温度依存性を考慮したゴム - 路面間のマルチスケール評価”, 東京大学大学院工学系研究科機械工学専攻, 修士論文, 2013.
- [47] 荒牧 純平, “Flash Temperature を考慮したタイヤゴムの摩擦特性評価”, 東京大学工学部機械工学科, 卒業論文, 2013.
- [48] B. N. J. Persson, “The effect of surface roughness on the adhesion of elastic solids”, *Journal of Chemical Physics*, Vol.115, No.12, pp.5597-5610, 2001.
- [49] B. N. J. Persson, “Adhesion between an elastic body and a randomly rough hard surface”, *The European Physical Journal E*, Vol.8, pp.385-501, 2002.
- [50] 吉村 侯泰, “直動型摩擦試験によるゴム - 路面間のマルチスケール評価”, 東京大学工学部機械工学科, 卒業論文, 2014.
- [51] 世古口 涼, “直動型摩擦試験に基づく異種ゴム - 路面間の摺動特性評価”, 東京大学工学部機械工学科, 卒業論文, 2015.
-

-
- [52] H. Tanaka, K. Yoshimura, R. Sekoguchi, J. Aramaki, A. Hatano, S. Izumi, S. Sakai, H. Kadowaki, “Prediction of the friction coefficient of filled rubber sliding on dry and wet surfaces with self-affine large roughness”, *JSME Mechanical Engineering Journal*, 2016 (in press).
- [53] P. R. Nayak, “Random Process Model of Rough Surfaces”, *Journal of Lubrication Technology*, Vol.93, pp.398-407, 1970.
- [54] 門脇 弘, “講習会「機械設計のための非線形有限要素法入門」(幾何学的非線形性、超弾性、弾塑性、接触摩擦、動的解析の基礎を学ぶ)”, 一般財団法人 日本機械学会, No.15-29, pp.41-58, 2015.
- [55] F. R. Schwarzl, H. W. Bree, C. J. Nederveen, G. A. Schwippert, L. C. E. Struik, C. W. van der Wal, “Behaviour of Unfilled and Filled Rubbers in Shear in the Glass-Rubber Transition Region”, *Rheologica Acta*, Vol.5, No.4, pp.170-175, 1966.
- [56] 原 義則, “塗膜の物性評価(1)”, *塗料の研究*, No.151, pp.23-33, 2009.
- [57] W. Luo, X. Hu, C. Wang, Q. Li, “Frequency- and strain-amplitude-dependent dynamical mechanical properties and hysteresis loss of CB-filled vulcanized natural rubber”, *International Journal of Mechanical Science*, Vol.52, pp.168-174, 2010.
- [58] R. Österlöf, H. Wentzel, L. Kari, N. Diercks, D. Wollscheid, “Constitutive modelling of the amplitude and frequency dependency of filled elastomers utilizing a modified Boundary Surface Model”, *International Journal of Solids, and Structures*, Vol.51, pp.3431-3438, 2014.
- [59] G. J. Kraus, “Mechanical losses in carbon-black-filled rubbers”, *Journal of Applied Polymer Science: Applied Polymer Symposia*, Vol.39, pp.75-92, 1984.
- [60] J. D. Ulmer, “Strain Dependence of Dynamic Mechanical Properties of Carbon Black-Filled Rubber Compounds”, *Rubber Chemistry and Technology*, Vol.69, pp.15-47, 1996.
- [61] J. H. Cho, S. K. Youn, “A viscoelastic constitutive model of rubber under small oscillatory load superimposed on large static deformation considering the Payne effect”, *Archive of Applied Mechanics*, Vol.75, pp.275-288, 2006.
- [62] P. Höfer, A. Lion, “Modelling of frequency- and amplitude-dependent material properties of filler-reinforced rubber”, *Journal of the Mechanical and Physics of Solids*, Vol.57, pp.500-520, 2009.
- [63] A. Lion, C. Kardelky, “The Payne effect in finite viscoelasticity: constitutive modelling based on fractional derivatives and intrinsic time scales”, *International Journal of Plasticity*, Vol.20, pp.1313-1345, 2004.
- [64] 中村 昌生, “豆知識(35)”, *日本ゴム協会誌*, Vol.81, No.2, pp.78, 2008.
- [65] M. L. Williams, R. Landel, J. D. Ferry, “The Temperature Dependence of Relaxation Mechanisms in Amorphous Polymers and Other Glass-forming Liquids”, *Journal of the American Chemical Society*, Vol.77, pp.3701-3707, 1955.
- [66] K. A. Grosch, “The relation between the friction and visco-elastic properties of rubber”,

-
- Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Vol.274, pp.21-39, 1963.
- [67] 加藤 考久, 益子 正文, “トライボロジーの基礎”, 培風館, 2004.
- [68] D. J. Whitehouse, J. F. Archard, “The properties of random surfaces of significance in their contact”, Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Vol.316, pp.97-121, 1970.
- [69] G. Huber, T. A. Vilgis, G. Heinrich, “Universal properties in the dynamical deformation of filled rubbers”, Journal of Physics: Condensed Matter, Vol.8, pp.L409-L412, 1996.
- [70] 富田 佳宏, “分子鎖網目理論による高分子材の変形応答のモデル化とシミュレーション: 1. 分子鎖網目理論による高分子材の構成式”, 材料, Vol.62, No.7, pp.465-471, 2013.
- [71] The MathWorks, “非線形最小二乗法 (非線形データ近似) を解く -MATLAB lsqnonlin -”, <http://jp.mathworks.com/help/optim/ug/lsqnonlin.html> [2016年2月1日確認], 2015.
- [72] 藤川 正毅, 三上 貴央, 隆 雅久, 三原 康子, 小林 卓哉, “線形粘弾性特性関数の実用的近似法”, 日本機械学会論文集 (A 編), Vol.72, No.723, pp.1703-1710, 2006.
- [73] 青柳 岳司, “粗視化分子動力学法の概要と応用”, CICSJ Bulletin, Vol.17, No.6, pp.23-26, 1996.
- [74] 府川 伊三郎, “合成ゴムの高付加価値化 シリーズ2: 溶液重合ゴムのイノベーション”, ARC リポート, No.989, 2015.
- [75] 竹中 克彦, “ミクロ構造 (合成ゴム) ”, 日本化学会ディビジョンレポート, 13-1-7-2, <https://division.csj.jp/div-report/13/1310702.pdf> [2016年2月2日確認].
- [76] 日本ゴム協会誌 編集委員会, “第 8 講 ゴムの架橋と薬剤”, 日本ゴム協会誌, Vol.72, No.12, pp.705-712, 1999.
- [77] 株式会社 JSOL エンジニアリング本部, “第 4 回 分子シミュレーションによる材料設計”, Polyfile, Vol.53, No.590, pp.53-57, 2013.
- [78] 柳生 裕聖, “粗視化分子動力学法を用いたナノフィラーによる架橋ゴムの補強における界面効果の研究”, 日本機械学会論文集, Vol.80, No.810, 2014.
- [79] 新化学技術推進協会 編, “高分子材料シミュレーション: OCTA 活用事例集”, 化学工業日報社, 2014.

以上

修士論文

部分接触および非線形粘弾性を考慮した
マルチスケール性に基づくタイヤゴムの
摩擦係数予測およびその実験的検証

p.1 — p.188 完

2016年2月3日

指導教員 泉 聡志 教授

37-146242 吉村 侯泰