

卒業論文

渦粘性モデルを用いた 狭窄管内流れの流体構造連成解析

平成 29 年 1 月 26 日 提出
指導教員 酒井 信介 教授
150211 鈴木一真

目次

第 1 章	序論	6
1.1	本研究の背景.....	6
1.1.1	血管狭窄部の非侵襲的検査手法	6
1.1.2	狭窄管内流れを対象とする数値シミュレーションの現状	6
1.2	本研究の目的.....	8
1.3	本論文の構成.....	8
第 2 章	解析手法	9
2.1	流体構造連成解析	9
2.1.1	ALE 法	9
2.1.2	レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式	10
2.1.3	Wilcox $k-\omega$ モデル	12
2.1.4	安定化手法	12
2.1.5	流体の支配方程式の弱形式化.....	13
2.1.6	構造の支配方程式	14
2.1.7	流体構造連成手法	15
2.2	境界条件処理.....	16
2.2.1	流体境界面における自由度縮退	16
2.2.2	Windkessel モデル	17
2.2.3	Windkessel モデルの接合	18
2.2.4	$k-\omega$ モデルの境界条件	19
2.3	プログラムの流れ	21
2.4	解析モデル	23
2.4.1	モデル形状の詳細	23
2.4.2	流体および構造の物性値	26
第 3 章	解析結果	27
3.1	プログラムの妥当性確認	27
3.1.1	妥当性確認の手法	27
3.1.2	解析条件.....	27
3.1.3	メッシュ粗さの評価	27
3.1.4	妥当性確認	28
3.2	柔軟管拍動流解析	32
3.2.1	流速分布.....	32
3.2.2	乱流エネルギー k の分布	33

3.2.3	比散逸率 ω の分布	34
3.2.4	残差の分布	36
第 4 章	結論	37
4.1	総括	37
4.2	今後の課題	37
	謝辞	39
付録 A	RANS および $k-\omega$ モデルの有限要素法離散化	40
付録 B	Newton-Raphson 法のための線形化	57
付録 C	四面体一次要素の補間関数を含む積分	62
	参考文献	64

図目次

図 2-1	乱流流れにおけるある一点での速度の例.....	11
図 2-2	3 要素 Windkessel モデル	17
図 2-3	プログラムの流れ	21
図 2-4	モデル形状の概略	23
図 2-5	狭窄率 75% 粗いメッシュ 全体図 (上), 拡大図 (下)	24
図 2-6	狭窄率 75% 詳細メッシュ 全体図 (上), 拡大図 (下)	24
図 2-7	狭窄率 95% 詳細メッシュ 全体図 (上), 拡大図 (下)	25
図 3-1	軸方向座標 Z	28
図 3-2	$Z=0.0, 1.0, 2.5$ での流速分布	30
図 3-3	(上) メッシュ図, (下) 流速分布 (等数値面) 単位:[m/s].....	31
図 3-4	(上) メッシュ図, (下) 流速分布 (等数値面), 90°回転したもの 単位:[m/s]	31
図 3-5	らせん構造の流れ場 単位:[m/s]	32
図 3-6	$t=1.65$ での乱流エネルギー k の分布 単位:[m ² /s ²].....	33
図 3-7	$t=1.5$ での速度分布 単位:[m/s].....	34
図 3-8	$t=1.5$ での比散逸率 ω の分布 単位:[s ⁻¹].....	34
図 3-9	$t=1.6$ での比散逸率 ω の分布 単位:[s ⁻¹].....	35
図 3-10	$t=1.62$ での比散逸率 ω の分布 単位:[s ⁻¹].....	35
図 3-11	残差の分布 単位:[N]	36
図 3-12	流速分布 単位:[m/s]	36

表目次

表 2-1	モデル形状と節点数・要素数.....	25
表 2-2	流体および構造の物性値	26
表 2-3	柔軟管物性値	26

第1章 序論

1.1 本研究の背景

1.1.1 血管狭窄部の非侵襲的検査手法

重大な心疾患の一つとして、心筋梗塞が挙げられる。その要因は、心臓に酸素を供給する冠動脈に血栓がたまることで狭窄部が生じ、供給酸素の低減が起こり、心筋の活動が阻害されることである。

現在、冠動脈狭窄部を対象とする非侵襲的な検査手法がいくつか考案されている。代表的なものでは、狭窄部の形状から狭窄率を推定する CCTA (coronary computed tomography angiography), 造影剤濃度の減衰勾配をもとに診断を行う TAG (transluminal attenuation gradient), 狭窄部前後での造影剤濃度の時間平均をもとに診断を行う CCO (corrected coronary opacification), CCTA で得た形状データをもとに数値解析を行い FFR (specifically fractional flow reserve, 冠血流予備量比) を推定する FFR-CT などが挙げられる。

しかしながら、非侵襲的な画像診断の精度は侵襲的な検査手法の精度と比べて低いものとなっている[1]。その理由は大きく分けて二つ考えられる。一つは、血管形状と血流動態の連成効果である。血管は柔軟な組織であるため流体力によって変形し、変形後の形状が血流動態に影響を及ぼす。したがって、血管形状のみから血流動態を把握し、虚血度の評価を行うことは困難となる。もう一つは、血流の乱流への遷移である。管内流れにおける狭窄部下流では、乱流への遷移が起こることが知られている[2], [3]。そのため、狭窄部下流での血流動態の把握は困難であると言える。

こうした背景から、非侵襲的な画像診断の精度を向上させるためには、血管形状との相互作用を考慮した上で血流動態に関する知見を得ることが必要となる。

1.1.2 狭窄管内流れを対象とする数値シミュレーションの現状

狭窄病変部位における血流動態を解明するため、過去にいくつかの実験と解析が行われてきた。

狭窄管内流れについての実験は、1970 年代から行われている。中でも CFD 解析の妥当性確認に用いられている研究は Ahmed と Giddens による剛体管実験である。1983 年の第一報[2]では、面積狭窄率 25, 50, 75% のガラス管において、レイノルズ数 500~2000 に

わたる幅広い条件での実験が行われた。レーザードップラー計を用い、速度分布や壁面せん断応力の詳細なデータを得ている。また、狭窄率やレイノルズ数によっては狭窄後部で乱流が発生することを確認した。続く第二報[3]では、同じ実験系で $Re=1000, 2000$ の流れに対して計測を行い、乱流強度分布や乱流エネルギースペクトルを取得している。また、1984年には狭窄管内拍動流についても同様の計測を行っている[4]。Ahmed と Giddens によるこれら一連の実験は、その後の数値解析の妥当性確認に用いられている。

一方、狭窄管内流れの数値解析も行われている。Ghalichi らは有限要素法解析ソフト FIDAP を用い、狭窄管内流れの解析を行った[5]。乱流モデルは $k-\omega$ モデルである。狭窄率 50%, 75%, 86% の場合について、 $Re=1000\sim 2000$ の範囲で解析し、Ahmed と Giddens による実験結果、 $k-\varepsilon$ モデルの解析結果、および層流モデルによる解析結果と比較している。 $k-\omega$ モデルによる解析結果は実験結果と精度よく一致した。一方で、 $k-\varepsilon$ モデルの解析結果は、狭窄部後流における壁面圧力の分布を再現できていないことを確認した。

Banks らは乱流モデルのうち、 $k-\omega$ モデルと $k-\varepsilon$ モデルの比較を行っている[6]。狭窄管内流れの解析では $k-\omega$ モデルが $k-\varepsilon$ モデルより実験結果を精度よく再現できることを確認した。また $k-\varepsilon$ モデルが流入部の乱流強度に影響を受けない一方、 $k-\omega$ モデルは流入部の乱流強度の変化に敏感であることを示した。続いて、狭窄を持つ分岐頸動脈に対して、 $k-\omega$ モデルによる解析を行っている。

Soloperto らは ANSYS CFX11 を用い、狭窄のある分岐頸動脈に対する有限体積法解析を行った[7]。乱流モデルは SST (shear stress transport) $k-\omega$ および SAS (scale adaptive simulation) を用いている。流れについては層流および乱流の仮定を置いてそれぞれ解析し、速度分布などの計算結果を Ahmed らの実験結果と比較した。その結果、乱流解析が軸対称狭窄管の実験を精度よく再現できると結論付けた。

これらの研究から、狭窄管内流れの解析は $k-\omega$ モデルで行うことが適当であるという合意が形成されつつある[6]。

流体と構造の相互作用に着目した解析も、近年行われている。Khalil らは軸対称動脈瘤を対象とし、流体構造連成による拍動流解析を行った[8]。乱流モデルは $k-\omega$ としている。実験結果による妥当性確認や、壁を剛体とした場合の解析結果との比較を行っている。剛体壁による解析では、流体構造連成を考慮した場合よりも壁面応力を低く見積もってしまうことを明らかにしている。

Jahangiri らは、有限要素法ソルバー ADINA を用いた狭窄管の流体構造連成解析を行った[9]。乱流モデルは $k-\varepsilon$ モデルおよび RNG (renormalization group) $k-\varepsilon$ モデルを用いている。層流解析と乱流解析、および剛体管と柔軟管の比較検討を行い、80%狭窄管内流れの解析には乱流の仮定が適当であること、また、剛体管と柔軟管では柔軟管のほうが精度よく実験結果を再現できると結論付けた。

このように、狭窄管における流体構造連成解析が行われているものの、未だにその報告は数少ない。さらに、解析条件が必ずしも生理学的条件を満たしていないなどの問題がある。

1.2 本研究の目的

本研究の大目的は、血管狭窄部における血流動態の把握である。そこで本研究においては、レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式、ならびに Wilcox $k-\omega$ モデルに基づく乱流解析機能を実装した流体構造連成解析プログラムを開発する。Ahmed と Giddens による実験結果[2]を用いてプログラムの妥当性確認を行い、その後、狭窄柔軟管内拍動流について解析を行う。

1.3 本論文の構成

本研究論文の構成を以下に示す。

- ・第1章 序論
- ・第2章 解析手法

本章ではまず、流体構造連成解析の基礎となる ALE 法の内容、本研究でプログラムを開発したレイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式、および Wilcox $k-\omega$ モデルについて概要を述べる。次に連成手法、離散化手法を示す。また、解析モデルの詳細について述べる。最後に全体の解析プログラムの流れを示す。

- ・第3章 解析結果

解析結果をもとにプログラムの妥当性確認を行い、その後、狭窄柔軟管拍動流解析の結果について述べる。

- ・第4章 結論

本研究で得た知見をまとめ、今後の展望について述べる。

- ・付録

本研究において鈴木が行ったコーディングの詳細を記す。付録 A ではレイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式および Wilcox $k-\omega$ モデルの弱形式化、有限要素法離散化を行う。付録 B では Newton-Raphson 法のための線形化を施す。付録 C では四面体一次要素を含む積分計算の詳細を示す。

第2章 解析手法

2.1 流体構造連成解析

血管は柔軟な組織であるため、内部を流れる血液の流体力によって変形する。また、変形後の形状は流れ場の境界条件を変更するため、血流動態に影響を及ぼす。このような変形挙動を起こす構造物と流体との界面を含む領域を解析するために、流体構造連成解析手法が考案されてきた。本研究では RANS, Wilcox $k-\omega$ モデルに基づく乱流の支配方程式に SUPG, PSPG 安定化を適用し、離散化、線形化を行い、先行研究の流体構造連成解析プログラムを拡張した。本節では、流体構造連成解析手法、ならびに、本研究で開発を行った乱流モデルの概要を記す。離散化、線形化された方程式の詳細は付録に記す。ただし本節は先行研究 [10] を参考にしており、特に 2.1.1 節、2.1.4 節、2.1.6 節、2.1.7 節、2.2 節はその内容を抜粋し、本研究に関わる内容を加えた上でまとめたものである。

2.1.1 ALE 法

流体構造連成問題においては、流れ場の形状が時間とともに変化するため、物質追従視点である Lagrange 座標系や、空間固定視点である Euler 座標系では問題の定式化が困難となる。Lagrange 座標系は物質に固定された視点であるため、物質の変形や流動にともなって座標自体がもつれてしまい、過度な変形や流動に対する解析が不可能となる。また、Euler 座標系は空間固定視点であるため、流体と構造の境界面の移動を追跡することが不可能である。

そのため、Lagrange 座標系および Euler 座標系のいずれとも本質的に無関係な ALE(Arbitrary Lagrangean-Eulerian)座標系により、種々の物理量を表現する。以下、Lagrange 座標系、Euler 座標系、ALE 座標系による空間内の点の表現をそれぞれ $\mathbf{X}$, $\mathbf{x}$, $\boldsymbol{\chi}$ とする。

各座標系間における物理量の時間偏導関数の関係式を導く。任意の物理量 A の Lagrange 座標系における時間偏微分（物質時間導関数）について、次式が成立する。

$$\left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{\mathbf{X}} + \frac{\partial A}{\partial \chi_i} \left. \frac{\partial \chi_i}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (2.1)$$

$$= \left. \frac{\partial A}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} + w_i \frac{\partial A}{\partial \chi_i} \quad (2.2)$$

$$w_i = \frac{\partial \chi_i}{\partial t} \Big|_x \quad (2.3)$$

物理量 A として Euler 座標系 $\mathbf{x}$ を選ぶと, Lagrange 座標系と ALE 座標系の速度関係式 (2.5)を得る.

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_\chi + w_j \frac{\partial x_i}{\partial \chi_j} \quad (2.4)$$

$$v_i = \hat{v}_i + (\mathbf{x} \otimes \nabla_\chi) \cdot \mathbf{w} \quad (2.5)$$

ただし,

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_x \quad (2.6)$$

$$\hat{v}_i = \frac{\partial x_i}{\partial t} \Big|_\chi \quad (2.7)$$

とおいた.

ここでベクトル $\mathbf{c}$ を式(2.9)のように定義し, 式(2.1)に代入すれば, 式(2.10)を得る.

$$\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} \quad (2.8)$$

$$= (\mathbf{x} \otimes \nabla_\chi) \cdot \mathbf{w} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} \Big|_x = \frac{\partial A}{\partial t} \Big|_\chi + (A \otimes \nabla_x) \cdot \mathbf{c} \quad (2.10)$$

上式が ALE 法による物理量表現の基礎式となる. 式(2.7)で定義された $\hat{\mathbf{v}}$ は ALE 座標系の Euler 座標系に対する速度であるから, $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$ であれば ALE 座標系は Euler 座標系に一致する. また, $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ であれば, 式(2.8), (2.9)から $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ となる. このとき式(2.3)から分かるように, ALE 座標系は Lagrange 座標系と一致する. したがって, ALE 座標系は $\hat{\mathbf{v}}$ の値によって Euler 座標系と Lagrange 座標系の間の任意の座標系を取りうる事がわかる.

有限要素法解析に ALE 座標系を適用する意義は, $\hat{\mathbf{v}}$ をメッシュの速度とすることで変形する境界の追従が可能となることである. すなわち, 流体構造連成解析において用いる ALE 座標系は, 境界の変形に合わせて時々刻々と変化する Euler 座標系と解釈される.

2.1.2 レイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式

図 2-1 に示すように, 乱流における流速は激しい乱れを伴うものであり, 乱れを直接定式化して数値計算を行うことは困難である. 微細な計算メッシュと時間刻み幅を用いて最もスケールの小さな渦まで再現する計算手法 DNS (Direct Numerical Simulation) が考案されているが, 計算負荷が大きく, 診断に際し実用的な解析手法ではないと考えられる. 本研究においては, 少ないモデル方程式で解析を行うことができる, レイノルズ平均ナビエ-ス

トークス方程式に基づく方法を用いる。

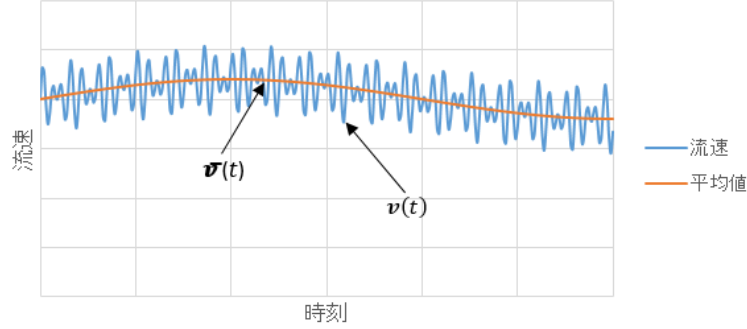


図 2-1 乱流れにおけるある一点での速度の例

まず，乱流における流速を，平均流れと変動成分に分解して考える。

$$\mathbf{v}(t) = \bar{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{v}'(t) \quad (2.11)$$

$\mathbf{v}(t)$: 流速, $\bar{\mathbf{v}}(t)$: 平均流れ, $\mathbf{v}'(t)$: 変動成分

変動量の統計的取り扱いのため，アンサンブル平均と時間平均にいくつかの仮定を加えたレイノルズ平均を考える。変動する物理量（たとえば流速 $\mathbf{v}(t)$ ）を f , g , 粗視化された量（たとえば変動成分 $\mathbf{v}'(t)$ ）を f' , g' , また a を定数とすれば，レイノルズ平均における仮定は以下になる[11].

$$\begin{aligned} \bar{\bar{f}} &= \bar{f}, & \overline{f' \cdot \bar{f}} &= 0, & \bar{f'} &= 0, & \overline{a \cdot \bar{f}} &= a \cdot \bar{f}, \\ \overline{\bar{f} + \bar{g}} &= \bar{f} + \bar{g}, & \overline{\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}, & \overline{\bar{f} \cdot g} &= \bar{f} \cdot \bar{g} + \overline{f' \cdot g'} \end{aligned} \quad (2.12)$$

ただし，レイノルズ平均操作を施された物理量を，上付き棒で表す。

この平均操作をナビエ-ストークス方程式に施すことによって，次のレイノルズ平均ナビエ-ストークス方程式（Reynolds-averaged Navier-Stokes equation：以下 RANS）が得られる。

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.13)$$

ただし，

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad (2.14)$$

である。 τ_{ij} はレイノルズ応力と呼ばれ，平均流れに対する乱流成分の運動量輸送の効果を表している。層流のせん断応力が速度勾配に比例することの類推から乱流のレイノルズ応力を評価するブジネスク近似によれば，レイノルズ応力は次式で表される[11].

$$\tau_{ij} = \rho \left\{ \nu_T \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right\} \quad (2.15)$$

($k = \frac{1}{2} \overline{v'_i v'_i}$: 乱流エネルギー, ρ : 密度)

式(2.15)に現れる渦動粘性係数 ν_T は，RANS を閉じるために採用する乱流変数の輸送方程

式によって定義が異なる。

2.1.3 Wilcox k - ω モデル

本研究で採用した乱流モデルは、狭窄管内乱流の解析に相当とされる Wilcox k - ω モデルである[12]。Wilcox k - ω モデルにおいて考慮される乱流変数は、乱流エネルギー k ，ならびに次式で定義される比散逸率 ω である。

$$\omega = \frac{\varepsilon}{k} \quad (2.16)$$

$$(\varepsilon = 2\nu \overline{s'_{ij} \cdot s'_{ij}} : \text{単位質量あたりのエネルギー消散率}, \quad s'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right) : \text{変形率})$$

非圧縮性流体における k と ω の輸送方程式は以下のようなになる。

- ・乱流エネルギー k の輸送方程式 (ALE 座標表記)

$$\rho \frac{\partial k}{\partial t} \Big|_x + \rho(k \otimes \nabla) \cdot \mathbf{c} = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla k) \right] + 2\mu_T \mathbf{D} : \mathbf{D} - \beta^* \rho k \omega \quad (2.17)$$

- ・比散逸率 ω の輸送方程式 (ALE 座標表記)

$$\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_x + \rho(\omega \otimes \nabla) \cdot \mathbf{c} = \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) (\nabla \omega) \right] + 2\rho\gamma_1 \mathbf{D} : \mathbf{D} - \beta_1 \rho \omega^2 \quad (2.18)$$

ただし，

$$\mu_T = \rho \nu_T \quad (2.19)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla) \quad (2.20)$$

である。また，密度 ρ ，粘性係数 μ は物性値， $\sigma_k = 2.0$ ， $\sigma_\omega = 2.0$ ， $\beta^* = 0.09$ ， $\gamma_1 = 0.553$ ， $\beta_1 = 0.075$ はモデル定数である。

式(2.17)，(2.18)から k ， ω を計算し，次の定義式から渦粘性係数 μ_T を算出する。

$$\mu_T = \frac{k}{\omega} \quad (2.21)$$

2.1.4 安定化手法

流体解析に用いられる式(2.13)，(2.17)，(2.18)はいずれも 3 次元の非定常移流拡散問題となっている。有限要素法を適用した流体解析において移流項が卓越する問題を回避するため，SUPG 法 (Streamline upwind/Petrov-Galerkin) が用いられている。これは拡散係数

に人工拡散係数を加える安定化手法であり，最適な人工拡散係数を用いた場合，弱形式化に用いられる重み関数が以下になることが知られている[11].

$$\delta \mathbf{v} + \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \quad (2.22)$$

ただし τ_{supg} は安定化パラメータであり，式(2.23)，(2.24)で与えられる．

$$\tau_{supg} = \frac{h_e}{2|\mathbf{c}|} \left(\coth \alpha - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (2.23)$$

$$\alpha = \frac{|\mathbf{c}| h_e}{2\mu}, \quad (2.24)$$

ここで h_e は要素の代表長さを表す．本解析プログラムにおいては，Tezduyar ら[13]による定義を採用し，

$$\tau_{supg} = \left[\left(\frac{2}{\Delta t} \right)^2 + \left(\frac{2|\mathbf{c}|}{h_e} \right)^2 + \left\{ \frac{4\nu}{h_e^2} \right\}^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.25)$$

とする．なお，要素の代表長さ h_e は要素と同じ体積を持つ球の直径とした．

また，圧力の数値的不安定を回避するため，PSPG 法（Pressure stabilizing/Petrov Galerkin）を採用した．PSPG 法により，重み関数に以下の項が加えられる．

$$\tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla \delta p \quad (2.26)$$

ただし，安定化パラメータ τ_{pspg} はTezduyar ら[13]の方法により，

$$\tau_{pspg} = \tau_{supg} \quad (2.27)$$

と定義した．

2.1.5 流体の支配方程式の弱形式化

流体部の支配方程式の弱形式化に際しては，前項で述べた SUPG 法および PSPG 法を用いる．SUPG 法，PSPG 法を適用した際の重み関数は次のようになる．

$$\delta \mathbf{v} + \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla \delta p \quad (2.28)$$

式(2.28)を用いて安定化した RANS は，最終的に以下のように表せる．

$$\begin{aligned}
& \int_V \left[\delta \mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \delta \mathbf{v} \cdot \rho \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \} + \delta \mathbf{D} : 2(\mu + \mu_T) \mathbf{D} - \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) \right. \\
& \quad \left. + \delta p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right. \\
& \quad \left. + \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \rho \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \} - \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \{ 2(\mu + \mu_T) \mathbf{D} \} + \nabla \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) \right\} \right. \\
& \quad \left. + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla \delta p \cdot \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \rho \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \} - \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \{ 2(\mu + \mu_T) \mathbf{D} \} + \nabla \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) \right\} \right] dV \\
& = \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t
\end{aligned} \tag{2.29}$$

ただし、 $\mathbf{g}$ は体積力を、 $\mathbf{t}^*$ は表面力を表すベクトルである。

また、 k - ω モデルの弱形式化に際し、 k 、 ω の輸送方程式にも SUPG 法を適用することにより、重み関数は以下となる。

$$(k \text{ 側}) \quad \delta k + \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta k) \tag{2.30}$$

$$(\omega \text{ 側}) \quad \delta \omega + \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta \omega) \tag{2.31}$$

したがって、 k と ω の輸送方程式を弱形式化したものは次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \int_V \left[\left(\delta k + \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta k) \right) \left(\rho \frac{\partial k}{\partial t} \Big|_x + \rho (k \otimes \nabla) \cdot \mathbf{c} - \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla k) \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2\mu_T \mathbf{D} : \mathbf{D} + \beta^* \rho k \omega \right) \right] dV = 0
\end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\begin{aligned}
& \int_V \left[\left(\delta \omega + \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta \omega) \right) \left(\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_x + \rho (\omega \otimes \nabla) \cdot \mathbf{c} - \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) (\nabla \omega) \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - 2\rho\gamma_1 \mathbf{D} : \mathbf{D} + \beta_1 \rho \omega^2 \right) \right] dV = 0
\end{aligned} \tag{2.33}$$

以上に示した流体部の支配方程式(2.29)、(2.32)、(2.33)に対し、四面体一次要素の補間関数を用いた離散化を行う。

2.1.6 構造の支配方程式

本研究にて解析を行う狭窄管の構造部は、変形が微小であるため線形弾性体を仮定した。その支配方程式は式(2.34)、構成則は式(2.35)となる。

$$\rho_s \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \Big|_x \right) = \nabla_X \cdot (\mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T) + \rho_s \mathbf{g} \tag{2.34}$$

$$\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \tag{2.35}$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_j} \right) \tag{2.36}$$

2.1.7 流体構造連成手法

流体構造連成のため、まず境界面に適用される条件を示す。粘性流体と構造の境界面では次式(2.37)の固着条件が適用される。

$$\begin{aligned} &\text{固着条件} \\ &\mathbf{v}^f = \mathbf{v}^s \end{aligned} \quad (2.37)$$

ただし、上付き文字の f は流体を、 s は構造を表す。また、境界面での平衡条件は次式となる。

$$\begin{aligned} &\text{平衡条件} \\ &\boldsymbol{\sigma}^f \cdot \mathbf{n}^f + \boldsymbol{\sigma}^s \cdot \mathbf{n}^s = \mathbf{h} \end{aligned} \quad (2.38)$$

ただし $\boldsymbol{\sigma}$ は応力テンソル、 $\mathbf{n}$ は境界面の単位法線ベクトル、 $\mathbf{h}$ は外力ベクトルである。

連成境界面における以上の関係式を用いれば、次のように節点変数ベクトルを定義することができる。

$$\boldsymbol{\varphi}^{fs} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_i^s \\ \mathbf{v}_c \\ \mathbf{v}_i^f \\ p \\ k \\ \omega \end{Bmatrix}, \mathbf{U}^s = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_i^s \\ \mathbf{u}_c \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.39)$$

ただし、下付き文字の i は流体と構造の互いに独立な変数を、 c は境界面で共有される変数を表す。また、 $\mathbf{u}$ は変位である。そのため、いま $\boldsymbol{\varphi}^{fs}$ は速度ベクトルに圧力、乱流エネルギー、比散逸率の自由度を加えたベクトルであり、 $\mathbf{U}^s$ は構造部の変位および境界面の変位を保持するベクトルを表している。有限要素法離散化された流体・構造それぞれの支配方程式に対して、以上の節点変数ベクトルに対応するよう適切な成分の並べ替えを行えば、流体構造連成解析の支配方程式(2.40)を得る。

$${}^t\mathbf{M}^{fs} \cdot \Delta \dot{\boldsymbol{\varphi}}^{fs} + {}^t\mathbf{C}^f \cdot \Delta \boldsymbol{\varphi}^{fs} + {}^t\mathbf{K}^s \cdot \Delta \mathbf{U}^s = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^t\mathbf{Q}^{fs} \quad (2.40)$$

ただし、左上添え字 t は時刻を、 Δt は解析における時間刻み幅を表す。また、各マトリクスおよびベクトルの物理的解釈は以下ようになる。

${}^t\mathbf{M}^{fs}$: 時刻 t における強連成実質量マトリクス。

${}^t\mathbf{C}^f$: 時刻 t における流体、乱流エネルギー、比散逸率の移流、粘性散逸、発散の強連成マトリクス。

${}^t\mathbf{K}^s$: 時刻 t における構造の強連成接線剛性マトリクス。

${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$: 時刻 $t + \Delta t$ における外力等価節点力ベクトル。

${}^t\mathbf{Q}^{fs}$: 時刻 $t + \Delta t$ における内力等価節点力ベクトル。

上記の支配方程式(2.40)を Newton-Raphson 法を用いて解き、Newmark-beta 法による時間積分を実行し解析を行う。

2.2 境界条件処理

2.2.1 流体境界面における自由度縮退

本解析プログラムでは流入出口において理想流体の応力境界条件を与えている．すなわち，境界面における法線方向と接線方向の応力成分は次のようになる．

$$\sigma_n = -p \quad (2.41)$$

$$\sigma_t = 0 \quad (2.42)$$

しかしながら，このように応力境界条件を与えると流速の乱れが生じてしまうため[14]，流速境界条件も与える必要がある．後述する Windkessel モデルとの接続を考慮し，ここでは境界面の流速と圧力を，代表点の流速と圧力 v_{sur} ， p_{sur} ，およびそれぞれのプロファイル関数 Φ ， Ψ で表すことにする．このとき流入出境界面で次式が成り立つ．

$$\mathbf{v} = \Phi v_{sur} \quad (2.43)$$

$$p = \Psi p_{sur} \quad (2.44)$$

次に，プロファイル関数の有限要素法離散化の手順を述べる．いま流体の解析領域で，流速 $\mathbf{v}$ とその補間関数 $\mathbf{N}$ ，圧力 p とその補間関数 $\mathbf{M}$ を用いて，以下のように $\mathbf{v}$ ， p が離散化されている．

$$v_j = N^r v_j^r \quad (2.45)$$

$$p = M^t p^t \quad (2.46)$$

ここで，流入出境界面でのプロファイル関数も同じ補間関数を用いて離散化することを考える．

$$\Phi = N^r \Phi^r \quad (2.47)$$

$$\Psi = M^t \Psi^t \quad (2.48)$$

これを式(2.43)，(2.44)に代入すれば，式(2.45)，(2.46)から，

$$v_j^r = \Phi^r v_{sur} \quad (2.49)$$

$$p^t = \Psi^t p_{sur} \quad (2.50)$$

となることがわかる．

実際の解析ではポアズユ流れを仮定しているため，流入境界面の速度プロファイル関数は二次関数形である．また，流入境界面の v_{sur} は中心軸での軸方向速度を用いている．一方，流出境界面の速度プロファイル関数は次式とした．

$$\Phi = \begin{cases} 0 & \text{(固着条件が適用される境界)} \\ -\mathbf{n} & \text{(それ以外の流出境界面)} \end{cases} \quad (2.51)$$

ただし $\mathbf{n}$ は境界面の内向き単位法線ベクトルである．

また，圧力は境界面内で一様な値としている．本解析プログラムは圧力制御を行うものがあり，流入側圧力を任意に設定可能としている．

以上の自由度縮退により流速の乱れの問題を解決すると同時に、解析に必要な自由度を減らすことも可能となる。

2.2.2 Windkessel モデル

血管は柔軟な組織であるため、拍動流を受けることで一時的に拡張され、局所的に血液を蓄える。その後拡張されていた部位が収縮を起こすと同時に、蓄えていた血液を前方へ送り出す。このように、血管は電気回路におけるコンデンサの役割を果たしている。

Windkessel モデルはこれらの現象を定式化するため、血液流量を電流、血圧を電圧とし、血流動態を電気回路モデルで表現する手法である。Windkessel モデルは回路要素の数によって分類されるが、本研究では 3 要素 Windkessel モデルを用いている。以下の図は、冠動脈後部の血管系をモデル化したものである。

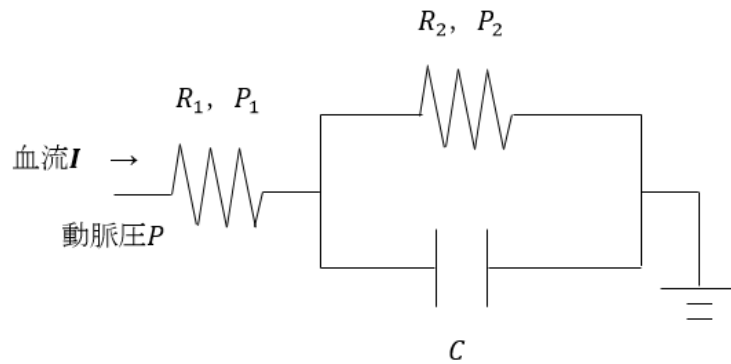


図 2-2 3 要素 Windkessel モデル

ここで、回路方程式は以下ようになる。

$$P = P_1 + P_2 \quad (2.52)$$

$$I = \frac{P_1}{R_1} \quad (2.53)$$

$$= \frac{P_2}{R_2} + C \frac{dP_2}{dt} \quad (2.54)$$

これらの式を整理し、 P_1 と P_2 を消去すると、次式を得る。

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)I + CR_1\dot{I} - C\dot{P} - \frac{P}{R_2} = 0 \quad (2.55)$$

以上のモデル化により、流出境界面における電流（流量）と電圧（血圧）の関係式が導かれたことになる。

前節で述べた自由度縮退の方法を用いれば、境界面の速度と圧力を、1次元のモデル化で

ある Windkessel モデルに接続することが可能である．出口境界面 S_{out} における内向き単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とすると，電流は次式で表される．

$$I = \int_{S_{out}} \mathbf{v} \cdot (-\mathbf{n} ds) \quad (2.56)$$

$$= \int_{S_{out}} \Phi v_{sur} \cdot (-\mathbf{n} ds) \quad (2.57)$$

$$= -v_{sur} \int_{S_{out}} \Phi \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.58)$$

上式を式(2.55)に代入して整理すると P を v_{sur} , $\dot{v}_{sur}$, $\dot{P}$ で表すことができる．また, Newmark 法により $\dot{P}$ を P で表すことができるので，結局 P は v_{sur} , $\dot{v}_{sur}$ の式で表される．また，表面力 $\mathbf{f}$ は

$$\mathbf{f} = \int_{S_{out}} (-P \Phi) ds \quad (2.59)$$

$$= -P \int_{S_{out}} \Phi ds \quad (2.60)$$

のように表せるので，

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}(v_{sur}, \dot{v}_{sur}) \quad (2.61)$$

となる．この式を流体の支配方程式と連成させることで，Windkessel モデルを接続する．

2.2.3 Windkessel モデルの接合

本解析プログラムにおける，具体的な Windkessel モデルの接合手法について述べる．式(2.51)，(2.58)より I は，流出境界面の面積を A_{out} ，固着条件が適用される境界を ∂S_{out} とすると，

$$I = -v_{sur} \int_{S_{out}} \Phi \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.62)$$

$$= -v_{sur} \int_{S_{out} - \partial S_{out}} (-\mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (2.63)$$

$$= v_{sur} \int_{S_{out} - \partial S_{out}} ds \quad (2.64)$$

$$= v_{sur} A_{out} \quad (2.65)$$

となる．また，式(2.51)，(2.60)より $\mathbf{f}$ は，

$$\mathbf{f} = -P \int_{S_{out}} \Phi ds \quad (2.66)$$

$$= P \mathbf{n} \int_{S_{out}-\partial S_{out}} ds \quad (2.67)$$

$$= P \mathbf{n} A_{out} \quad (2.68)$$

となる．式(2.65)を電流と電圧の関係式(2.55)に代入すると，次式を得る．

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) A_{out} {}^{t+\Delta t} v_{sur} + C R_1 A_{out} {}^{t+\Delta t} \dot{v}_{sur} - C {}^{t+\Delta t} \dot{P} - \frac{{}^{t+\Delta t} P}{R_2} = 0 \quad (2.69)$$

ただし左上添え字は時間ステップを表す．ここで Newmark 法により， P について次の関係式を用いる．

$${}^{t+\Delta t} P = {}^t P + \Delta t \{ \gamma {}^{t+\Delta t} \dot{P} + (1 - \gamma) {}^t \dot{P} \} \quad (2.70)$$

式(2.50)，(2.51)，(2.52)，および次式(2.53)を整理すると，式(2.54)を得る．

$$\dot{\mathbf{f}} = \dot{P} \mathbf{n} A_{out} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} = & \frac{(R_1 + R_2) A_{out}^2} {1 + \frac{C R_2}{\gamma \Delta t}} {}^{t+\Delta t} v_{sur} \mathbf{n} + \frac{C R_1 R_2 A_{out}^2} {1 + \frac{C R_2}{\gamma \Delta t}} {}^{t+\Delta t} \dot{v}_{sur} \mathbf{n} \\ & + \frac{\frac{C R_2}{\gamma \Delta t}} {1 + \frac{C R_2}{\gamma \Delta t}} {}^t \mathbf{f} + \frac{C R_2 \frac{1 - \gamma}{\gamma}} {1 + \frac{C R_2}{\gamma \Delta t}} {}^t \dot{\mathbf{f}} \end{aligned} \quad (2.72)$$

この式を他の支配方程式と連成させて解く．

2.2.4 k - ω モデルの境界条件

次に k - ω モデルの境界条件の詳細を示す．狭窄管流入部，出口部ともに次の勾配 0 条件を与えた．

$$\frac{\partial k}{\partial n} = 0, \frac{\partial \omega}{\partial n} = 0 \quad (2.73)$$

また，流入部での k については，次式に従って各節点の値を設定した[12]．

$$k = \frac{3}{2} (UI)^2 \quad (2.74)$$

ここで U は流速を表しており，本解析では入口境界面上での管軸方向流速を用いた．また， I は乱流強度であり，平均流れに対する変動成分の二乗平均平方根の比として定義される．式(2.56)を変形し，乱流エネルギー k を用いて表せば， I の定義は次式となる．

$$I = \frac{\sqrt{\frac{2}{3} k}}{U} \quad (2.75)$$

さらに，流入部での ω は次式で与えられる．

$$\omega = \frac{\sqrt{k}}{L} \tag{2.76}$$

ここで L は乱流長さスケールを表す．

2.3 プログラムの流れ

図 2-3 に、本研究で解析に用いたプログラムの流れを示す。

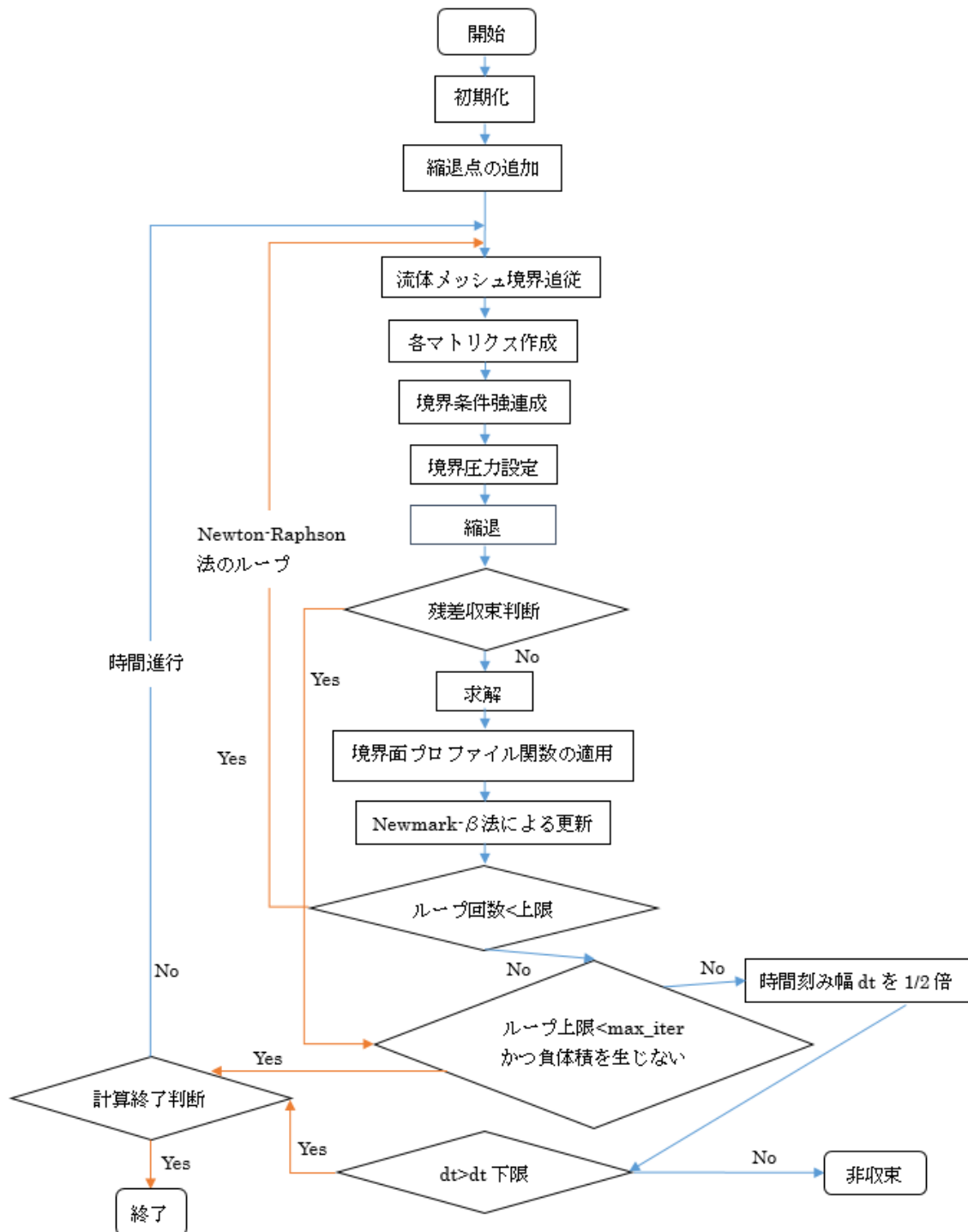


図 2-3 プログラムの流れ

本解析プログラムでは、時間ステップ内で **Newton-Raphson** 法の反復計算を行い、残差が収束した時点でループを出て次の時間ステップに進む操作を繰り返している。図 2-3 の **max_iter** は反復計算の回数限度を表している。

流体境界メッシュ追従は、メッシュの歪みによる計算の破綻を防止するために行っている。本研究の計算プログラムでは弾性スージングと呼ばれる方法を用いている。反復計算ごとに流体構造境界面に変位が生じるが、そのままでは外側の流体メッシュが大きくなるか、あるいは境界が流体メッシュに食い込んで負体積を生じてしまう。そこで、流体部に仮想的にポアソン比の小さい弾性体を置き、境界の変位を強制変位として内部の変形を解く。その上で新たにメッシュを作り直す。この手法により、大きく歪んだメッシュの生成を防止する。

なお、求解には **Intel Math Kernel Library** のソルバーである **Pardiso** を用いた。時間積分には **Newmark-beta** 法を採用しているため、加速度増分ベクトルを未知変数としている。

2.4 解析モデル

2.4.1 モデル形状の詳細

本研究で用いた解析モデルは, Ahmed らの実験[2]で使用されたアクリル樹脂からなる狭窄管をもとに作成したものである.

実験で使用された管は長さ 6908.8mm, 内径 50.8mm である. 外径は指定されていないが, これは管の変形を考慮していないためと考えられる. 狭窄部長さは 101.6mm であり, 面積狭窄率 25%, 50%, 75%のコサインカーブである. また, 狭窄開始点は流体流入部から 4876.8mm の地点となっている.

この形状をもとに, 長さ 903.20mm, 内径 50.8mm, 外径 84.6mm, 狭窄部長さ 101.6mm の狭窄管モデルを作成した. 狭窄開始点は流入部境界面から 350.8mm の位置に設定した. 管長を短くした理由は, Ahmed らの論文で議論の対象とされている流体領域が, 狭窄終了点から 304.8mm までに限られており, 流体挙動を論じるのに十分な長さを確保していれば, 計算負荷を軽減するために管長を短くしてよいと判断したためである.

図 2-4 にモデル形状の概略を, 図 2-5, 図 2-6, 図 2-7 に実際のメッシュを示す. ただしメッシュ拡大図は見やすさのため, 一部要素を非表示としている. メッシュは四面体である. 一辺の長さは, 粗いメッシュが約 3.6mm, 詳細メッシュが約 2.4mm となっている.

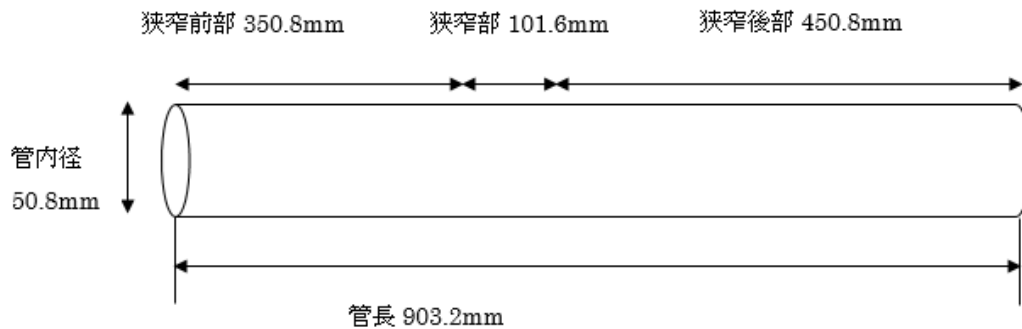


図 2-4 モデル形状の概略

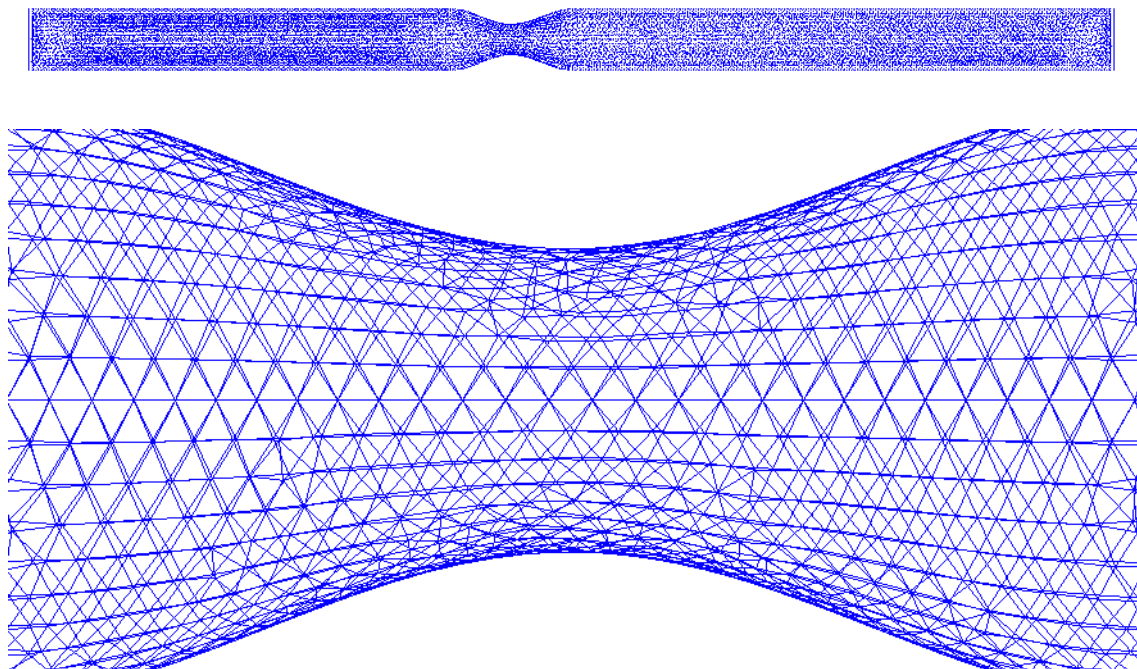


図 2-5 狭窄率 75% 粗いメッシュ 全体図 (上), 拡大図 (下)

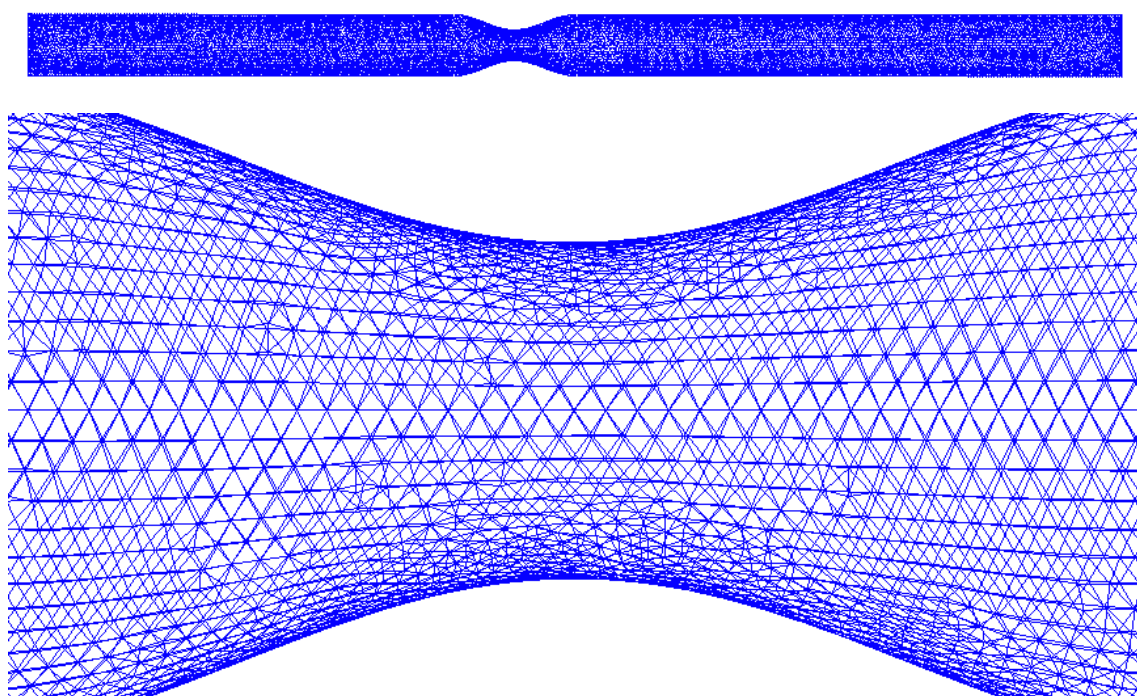


図 2-6 狭窄率 75% 詳細メッシュ 全体図 (上), 拡大図 (下)

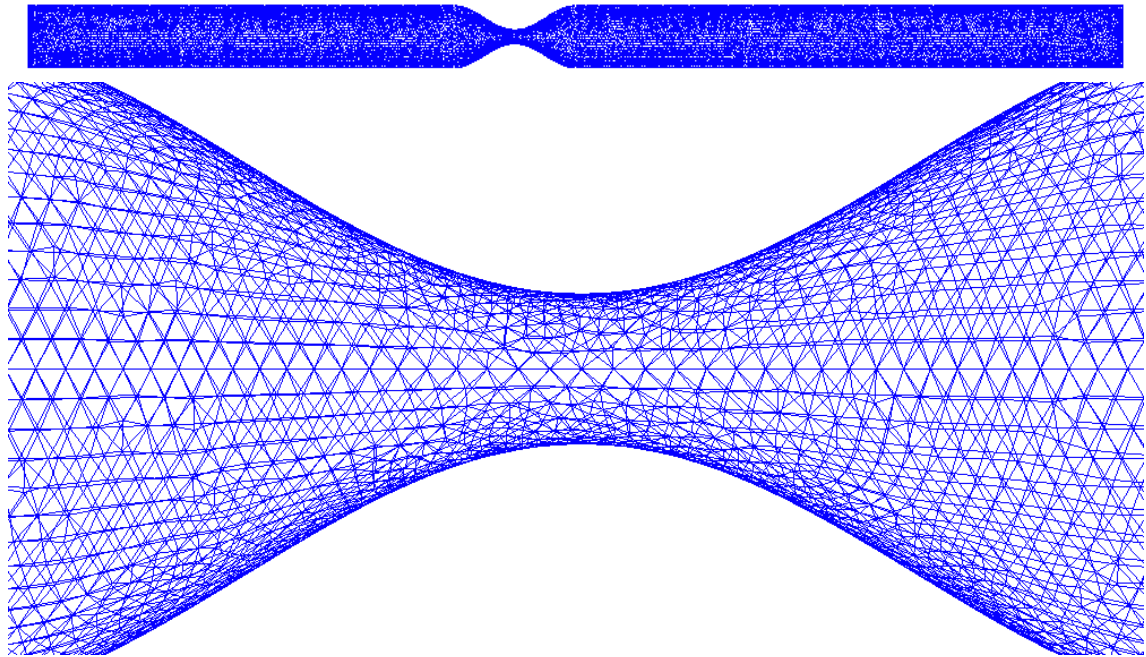


図 2-7 狭窄率 95% 詳細メッシュ 全体図（上），拡大図（下）

ただし，狭窄率 75%モデルは定常流解析によるメッシュ粗さの評価，および妥当性確認のために，狭窄率 95%モデルは柔軟管拍動流解析のために作成した．

また，解析に用いたモデル形状と節点数・要素数は表 2-1 の通りである．詳細メッシュの節点数は，粗いメッシュの節点数の約 2 倍とした．

表 2-1 モデル形状と節点数・要素数

狭窄率	メッシュ粗さ	節点間距離	要素数	節点数
75%	粗い	約 3.6mm	287423	51204
	詳細	約 2.4mm	671976	116482
95%	詳細	約 2.4mm	671768	116385

2.4.2 流体および構造の物性値

次に、実験で用いられた流体および構造部の物性値を示す。実験において用いられた流体は水 37%，グリセリン 63%（質量割合）の混合液である。そのため、文献値[15]から混合液の密度および粘性係数を求めた。また、狭窄管の物性値については実験論文で厳密な指定がないため、参考文献[16]から、アクリル樹脂として一般的と考えられる物性値を採用した。

表 2-2 流体および構造の物性値

流体	密度	1149 kg/m ³
	粘性係数	1.379×10^{-2} Pa·s
狭窄管(アクリル樹脂)	密度	1.18 kg/m ³
	ヤング率	3.0 Gpa
	ポアソン比	0.35

狭窄管のヤング率は 3.0GPa と設定している。これは、今回の解析条件である流入部圧力 0.1~0.5kPa に比べて十分に大きなオーダーを持つ。したがって、実験と同様に管形状の変化は無視できる。

また、柔軟管解析には、上述の狭窄管モデルと同じ形状を用い、ヤング率を変更したものをを用いた。表 2-3 に柔軟管の物性値を示す。

表 2-3 柔軟管物性値

構造(柔軟管)	密度	1.18 kg/m ³
	ヤング率	0.5 Mpa
	ポアソン比	0.45

第3章 解析結果

3.1 プログラムの妥当性確認

本項では、乱流モデルを用いた流体構造連成解析の妥当性確認、ならびにメッシュ粗さの評価を行う。

3.1.1 妥当性確認の手法

乱流モデルを用いた狭窄管内流れの流体構造連成解析プログラムの妥当性確認には、Ahmed と Giddens による実験結果[2]を用いた。計測値と本プログラムによる解析結果の流速分布を比較し、一致しているかどうかを確認した。なお Ahmed と Giddens の実験系では流量計の付属した遠心ポンプによる流量制御を行っている。一方本解析プログラムは圧力制御であるため、実験結果のうち、解析結果から算出されるレイノルズ数と最も近い値のデータ ($Re=500$) を妥当性確認に用いた。

3.1.2 解析条件

実験では、定常流のもとで計測が行われている。そこで本解析では、流体が静止した状態から 0.5 秒で入口境界圧力を 0kPa から 0.1kPa まで正弦波状に上昇させ、その後 0.1kPa で一定とした。

3.1.3 メッシュ粗さの評価

いま z 軸を、最大狭窄部を原点とし、管出口に向かう方向を正として定義する。また $Z = z/D$ (管直径 $D = 50.8\text{mm}$) とする。図 3-1 に軸方向座標 Z を示す。

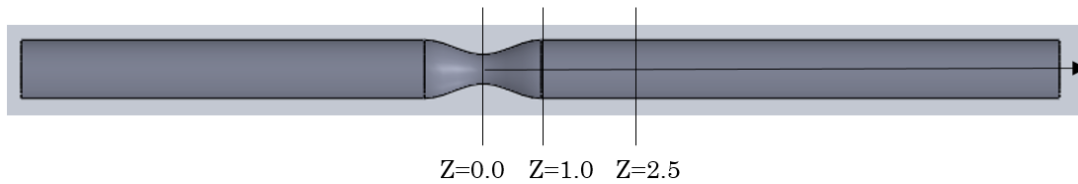


図 3-1 軸方向座標 Z

図 3-2 は 75%狭窄管における $Re=485$ ，解析時間 2.5 秒での流速分布である．ただし座標 Z で指定した位置を中心とする厚さ 6mm の領域における節点をピックアップし，速度分布を可視化している．また，Ahmed と Giddens による実験結果を重ねて表示している．

縦軸は 0.0 を管中心，1.0 を管壁とする半径方向の正規化された距離である．ここでは r が中心軸からの距離， r_m が平均半径 25.4mm を表している．横軸は実際の速度分布 V を $\bar{V}$ で割った値である．ただし $\bar{V}$ は流入境界面の中心点における軸方向流速である．

図 3-2 より， $Z = 0.0$ ， $Z = 1.0$ ， $Z = 2.5$ のいずれにおいても，粗いメッシュ（51204 節点）はばらつきの大きな解析結果を与えている．特に $Z = 0.0$ ， $Z = 1.0$ の $r/r_m \cong 0.7$ 付近でその傾向が顕著である．一方詳細メッシュ（116482 節点）では，粗いメッシュとおおむね一致する解析結果を与えながら，誤差が小さくなっている．したがって，本研究では詳細メッシュでの解析結果を用いて検討する．

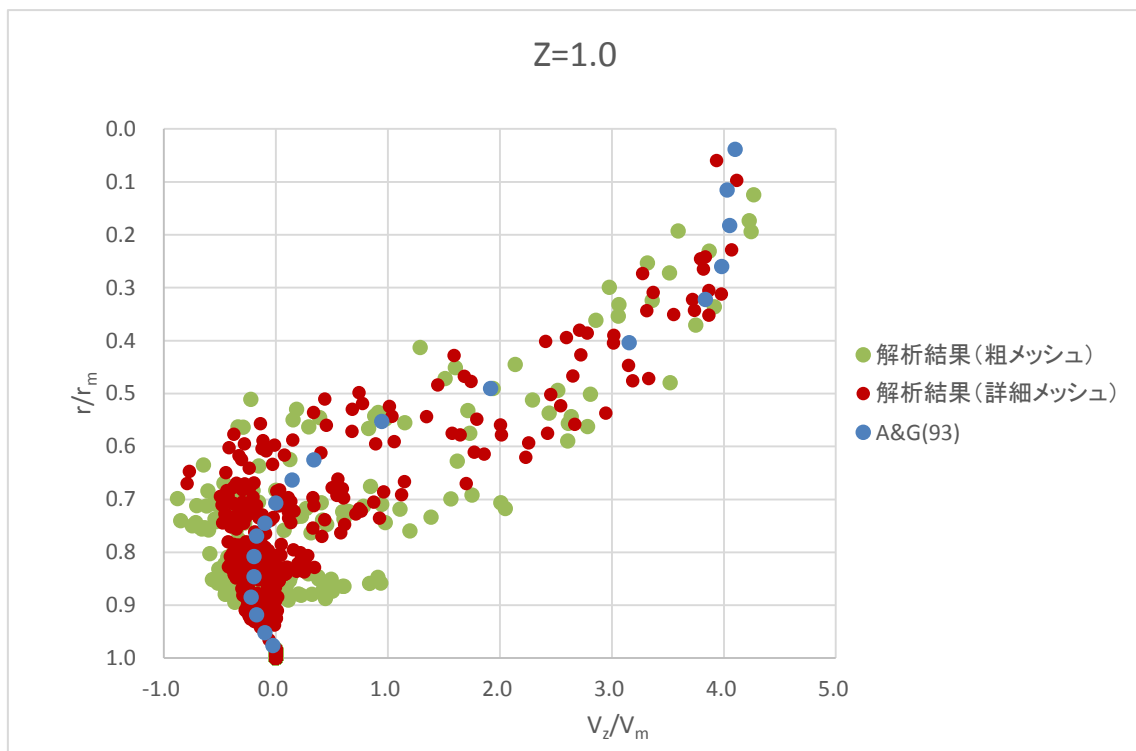
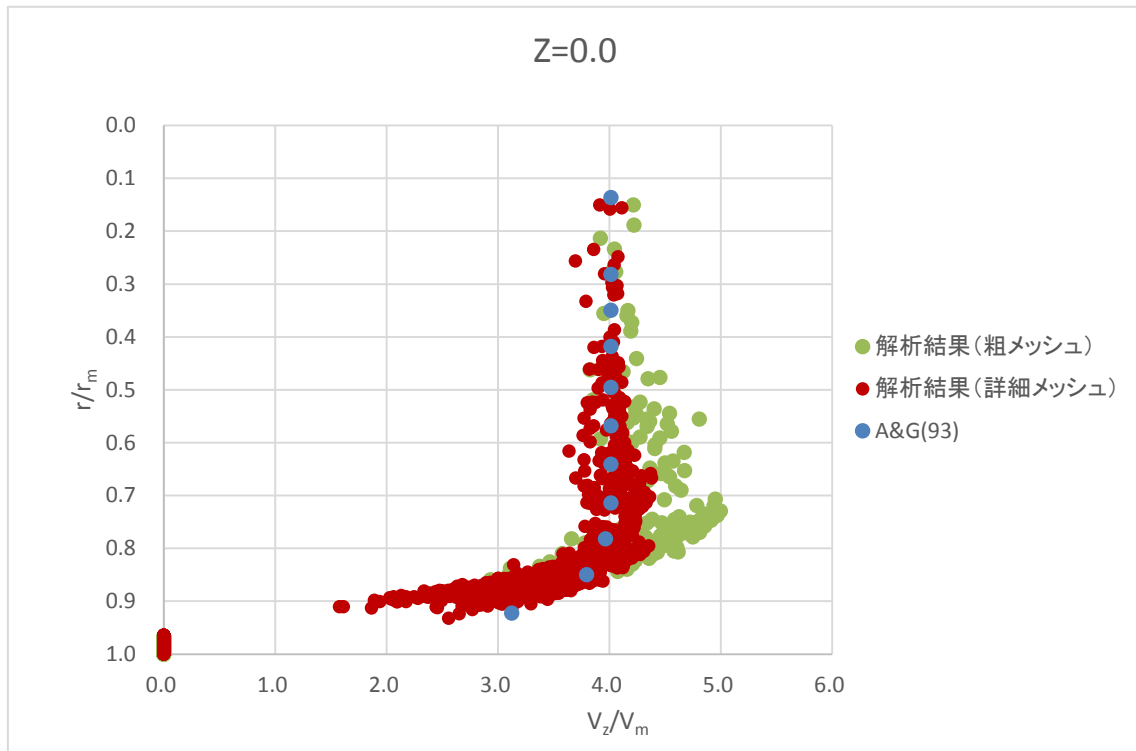
従来の流体構造連成解析プログラム[10]では，類似の管内流れに対して，約 25000～27000 節点のメッシュ粗さでも，理論解とおおむね一致する解析結果を取得していた．そのため，今回節点数を約 2 倍にした解析で実験結果と異なる速度分布を得たのは，本研究で採用した Wilcox $k-\omega$ モデルが細かいメッシュでなければ十分な精度を与えられなかったためと考えられる．

3.1.4 妥当性確認

詳細メッシュでの解析結果について，妥当性確認を行う．

いずれの解析も，管中心軸付近（ $r/r_m \cong 0.0$ ）での速度は実験結果とおおむね一致している．その他の領域では，軸対称でない 3 次元的な流れとなったことにより，半径方向の分布に誤差が生じている．これは，本解析では壁面付近の流体挙動を厳密に計算していないためと考えられる．一般的な流体解析では，壁面近傍領域においては壁関数法などを用いて速度および $k-\omega$ モデルの評価を行っている．先行研究ではこのような評価手法が計算精度を高めることが確認されている[17]．また，速度分布の誤差は，メッシュ形状のわずかな異方性に起因しているとも考えられる．

$Z = 0.0$ ， $Z = 1.0$ ， $Z = 2.5$ のいずれにおいても，おおむね良好な一致が見られるため，本解析プログラムは妥当であると言える．



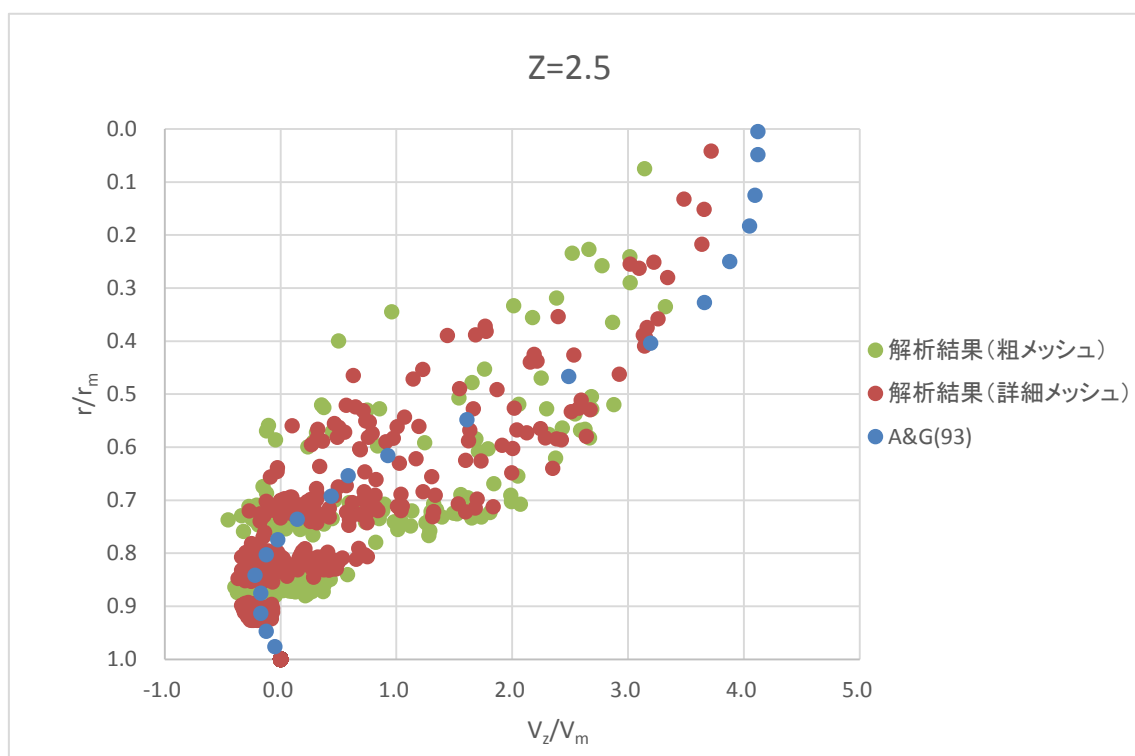


図 3-2 $Z=0.0, 1.0, 2.5$ での流速分布

図 3-3, 図 3-4 に流速分布（等数値面）を示す．図 3-4 は図 3-3 を Z 軸周りに 90° 回転させたものである．この図から，流速に非対称性を生じていたことがわかる．流れの剥離域が大きく二か所に分かれ，流速の速い領域が扁平な形状となった．非対称性は狭窄部で生じ， $Z = 4.0$ 付近で対称流れに戻っている．また，狭窄部のメッシュについて比較すると，図 3-4 の正面側がわずかに密なメッシュになっていることがわかる．メッシュが密な領域の後流で，剥離域が大きくなっている．

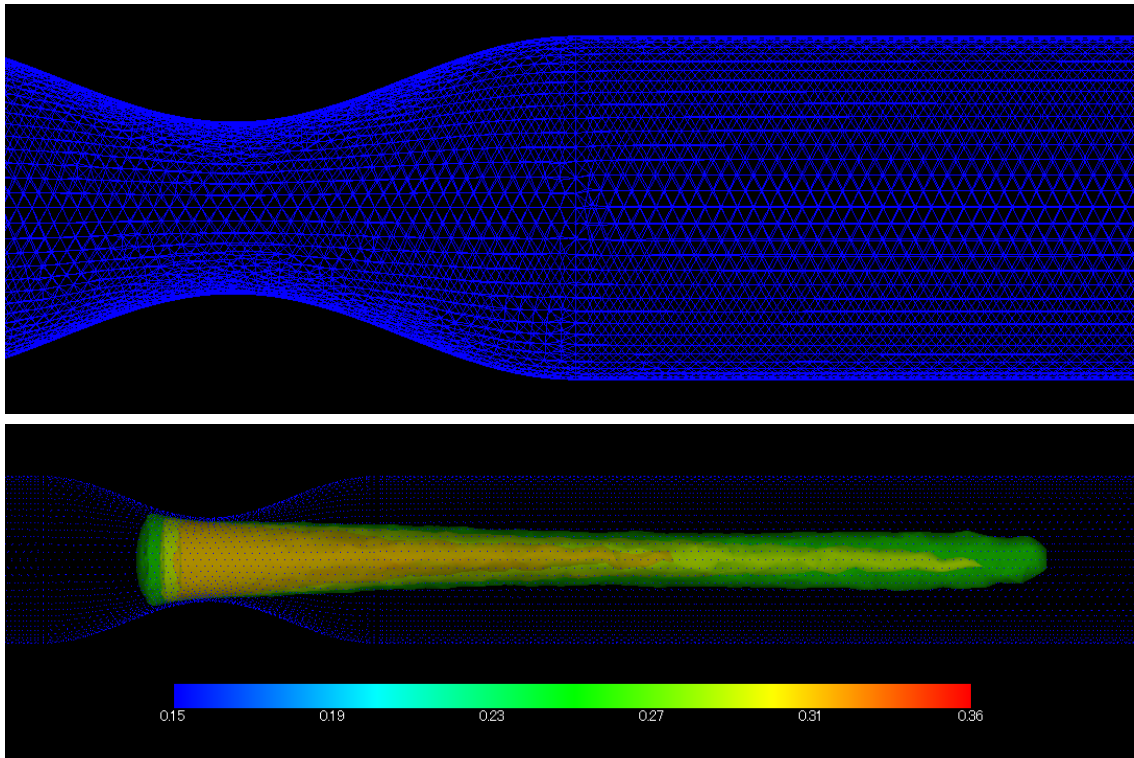


図 3-3 (上) メッシュ図, (下) 流速分布 (等数値面) 単位:[m/s]

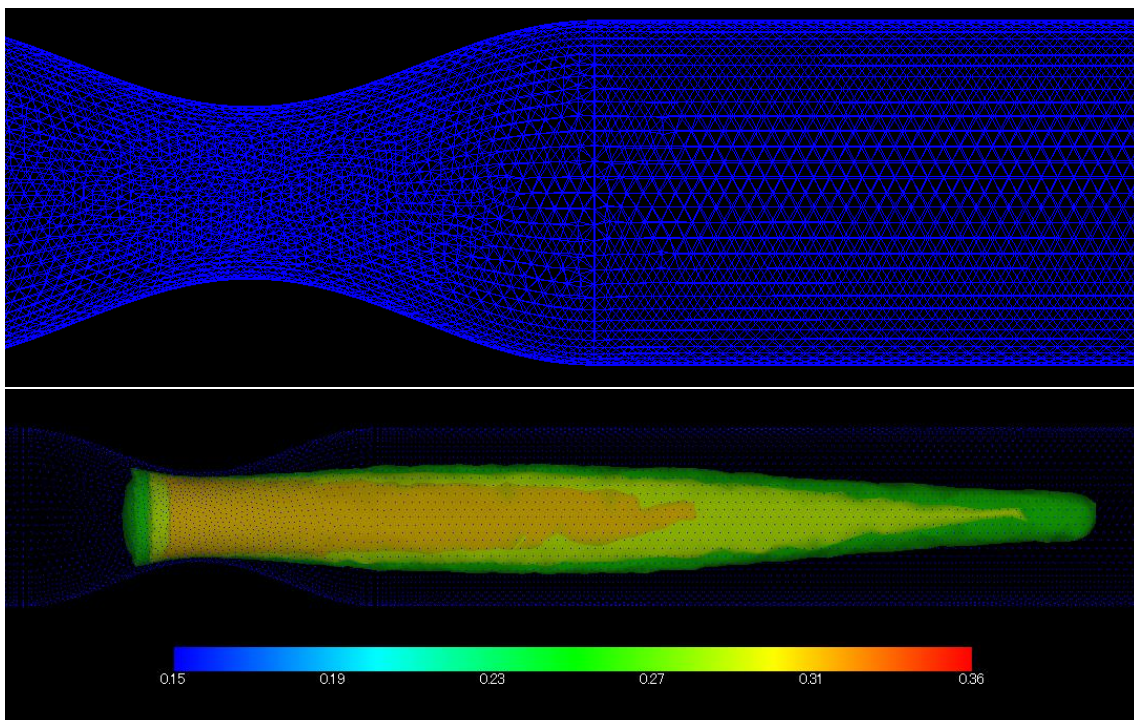


図 3-4 (上) メッシュ図, (下) 流速分布 (等数値面), 90° 回転したもの 単位:[m/s]

3.2 柔軟管拍動流解析

狭窄率 95%の柔軟管において、拍動流解析を行った。本解析では乱流挙動の観察を企図し、入口境界圧力を振幅 0.2kPa、振動数 1Hz の sin 波とした。時間進行につれて反復計算が収束しにくくなり、 $t=1.65$ (秒) で時間刻み幅がその下限値に達したため、計算を打ち切った。以下では、 $t=1.65$ までに得られた結果を示すとともに、その考察を行う。

3.2.1 流速分布

図 3-5 に、時刻 $t=1.65$ での流速分布を示す。見やすさのためカラーバー上限値を適当に定めているが、流速最大値は $Z = 0.06$ で 0.935m/s となっている。狭窄部で発生したジェット流が、下流で速度を低下させ、乱流の特徴であるらせん構造に変化していく様子が確認できた。

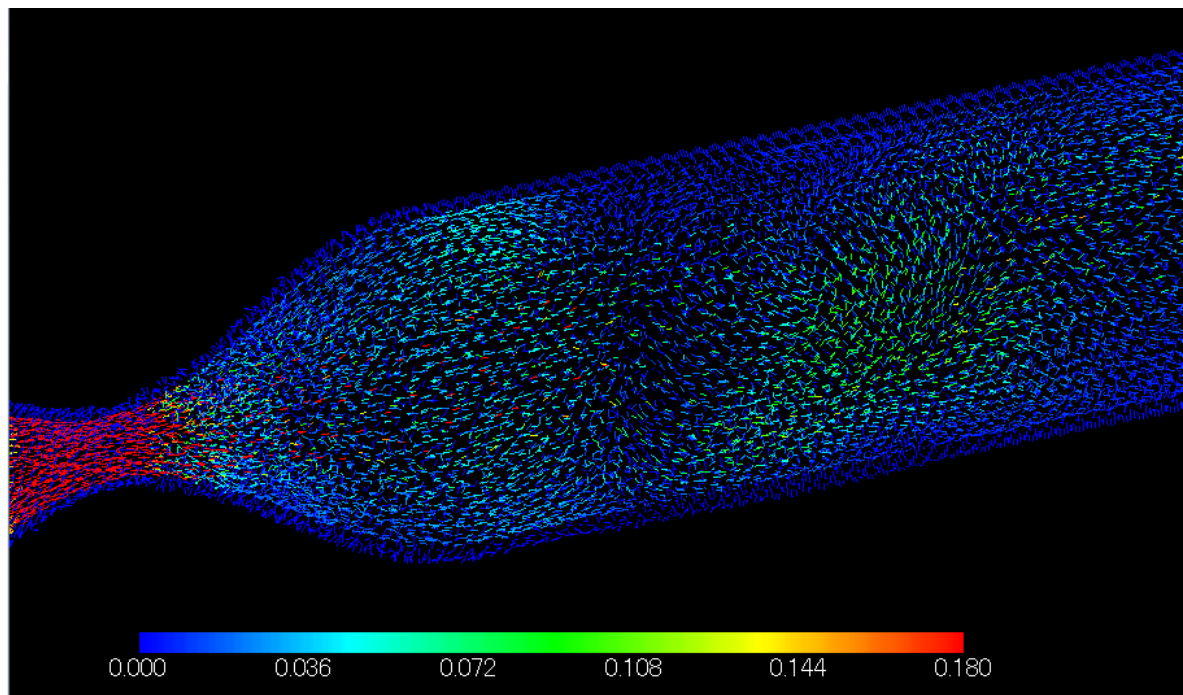


図 3-5 らせん構造の流れ場 単位:[m/s]

3.2.2 乱流エネルギー k の分布

図 3-6 に、 $t=1.65$ での乱流エネルギー k の分布を示す。

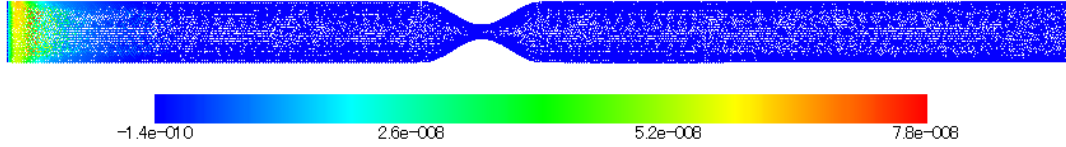


図 3-6 $t=1.65$ での乱流エネルギー k の分布 単位:[m^2/s^2]

境界条件を与えた流入側境界付近での分布が見られ、管軸方向に移流拡散していく様子が確認された。しかしながら流入側境界付近を除く領域で k のオーダーは 10^{-8} 程度と小さくなってしまった。

乱流エネルギー k が微小な値となった理由を考察する。 k - ω モデルにおける k の生成項は次式で与えられる。

$$2\mu_T \mathbf{D} : \mathbf{D} \quad (3.1)$$

また、 μ_T の定義式を再掲する。

$$\mu_T = \frac{k}{\omega} \quad (3.2)$$

式(3.2)から、 k が 0 であるとき μ_T が 0 となり、式(3.1)の生成項が 0 と評価される。そのため、 k の初期値として 0 を与えた場合、 k は 0 のままとなる。いま k の値を与えているのは入口境界面だけであり、下流側には移流拡散によって及ぼされた微小な値や数値振動だけが見られたものと考えられる。

3.2.3 比散逸率 ω の分布

図 3-7 に $t=1.5$ での速度分布を示す. また, 図 3-8 に $t=1.5$ での比散逸率 ω の分布を示す. 比散逸率 ω は境界条件を与えた流入側境界付近での分布が見られるとともに, 狭窄部壁面で生じた値が下流に向かって移流拡散する様子が見られた. その分布領域は, 狭窄部から生じたジェット流の分布領域と重なっていることが確認できた.

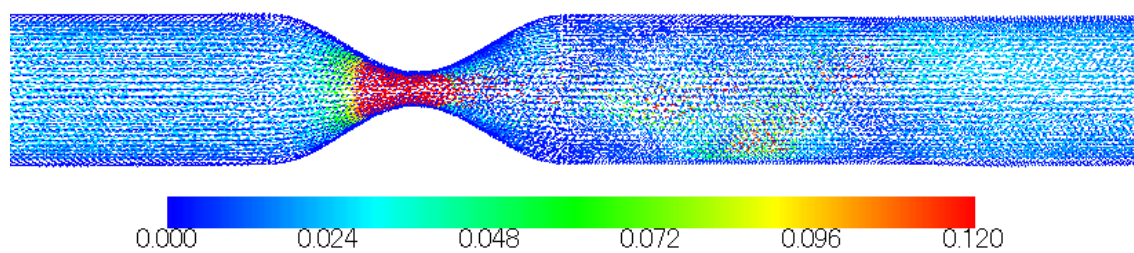


図 3-7 $t=1.5$ での速度分布 単位:[m/s]

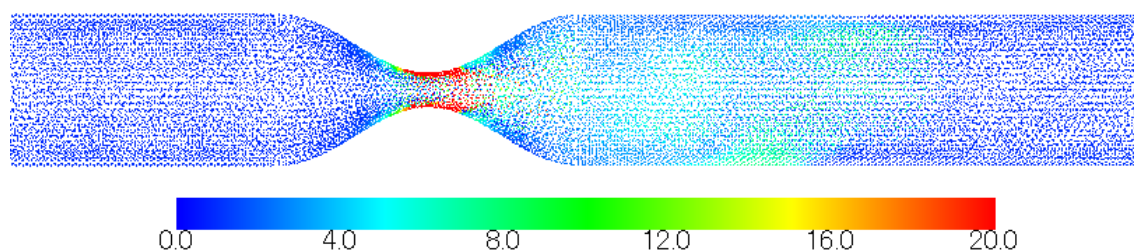


図 3-8 $t=1.5$ での比散逸率 ω の分布 単位:[s⁻¹]

ω は、負の値の拡散も生じてしまった。図 3-9 に $t=1.6$ での、図 3-10 に $t=1.62$ での ω の分布を示す。 $t=1.6$ では正の値とほぼ等しい大きさになった($\omega_{max} = 160, \omega_{min} = -140$)。その後 $t=1.62$ では負の値が大きくなっていった($\omega_{max} = 184, \omega_{min} = -405$)。このように、急峻な狭窄形状をもつ部位では比散逸率 ω を正しく解析できなかったことがわかる。

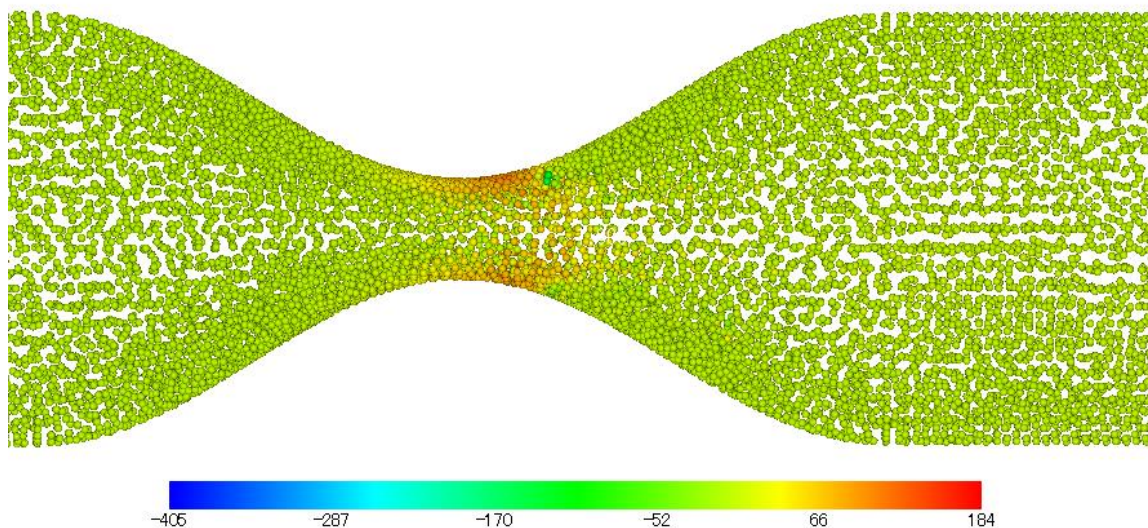


図 3-9 $t=1.6$ での比散逸率 ω の分布 単位:[s⁻¹]

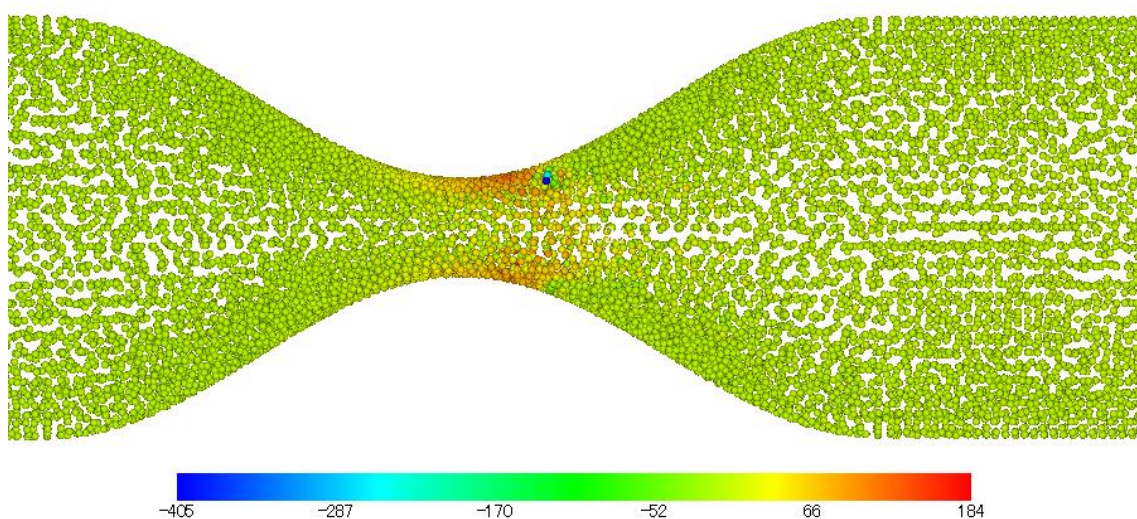


図 3-10 $t=1.62$ での比散逸率 ω の分布 単位:[s⁻¹]

3.2.4 残差の分布

本解析プログラムでは残差の収束を判定している. 95%柔軟管の解析で計算を打ち切ったのは, 時間刻み幅をその下限値まで細かくしても残差が収束しなかったためである.

図 3-11 に, 残差の分布を示す. x , y , z 方向の力のつり合いを解いているため, 各節点における 3 方向の残差をベクトルとして表示している. この図から, 狭窄部中心付近から後流にかけて残差が分布していることがわかる.

図 3-12 に $t=1.65$ での流速分布を示す. カラーバーの単位は[m/s]であり, 図 3-5 と同様に見やすさのため上限値を適当に定めている. 壁面付近の剥離領域において, 逆流する速度が特に早くなるリング状の領域が存在している. 狭窄部からジェット流のように流れた流体は, リング状領域付近で速度を落とし, らせん状流れに遷移している. 図 3-11 との比較から, ジェット流の見られる領域が, 残差の存在領域と重なっていることがわかる. したがって, 局所的に流速が速くなったことで速度勾配の大きな領域が発生し, 数値的不安定が引き起こされ, 残差が発生したと考えられる. $t=1.65$ では入口境界部で約 150 であった Re 数が狭窄部では約 900 と, 6 倍程度になっていた.

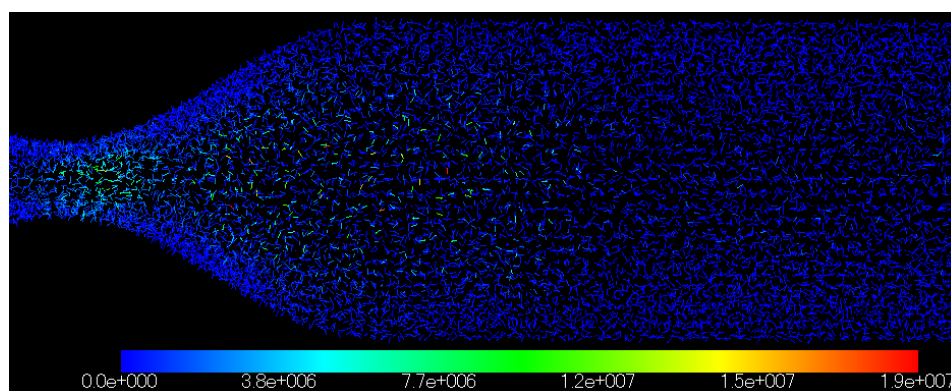


図 3-11 残差の分布 単位:[N]

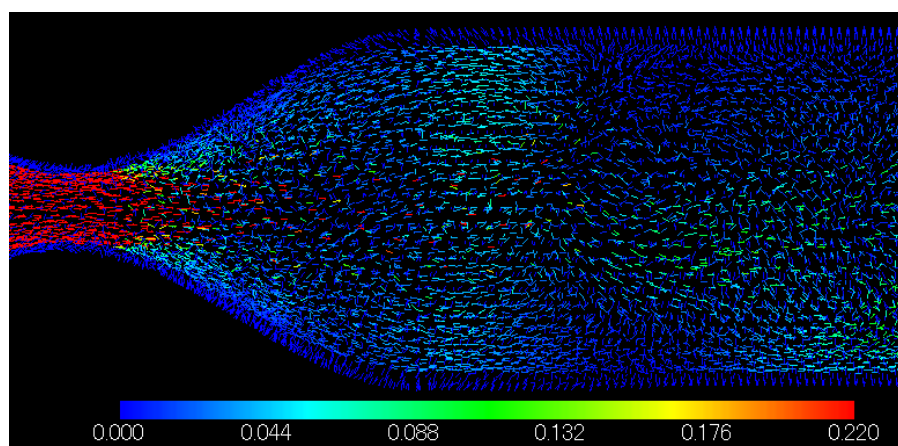


図 3-12 流速分布 単位:[m/s]

第4章 結論

4.1 総括

先行研究から引き継いだ流体構造連成解析プログラムに、RANS および k - ω モデルに基づく乱流解析プログラムを実装した。血管狭窄部での血流動態の把握を狙いとし、狭窄管形状に対して解析を行った。Ahmed と Giddens の実験結果を用いた妥当性確認では、良好な一致をみた。その際、乱流モデルに基づく解析は、層流モデルによる解析に比べて高いメッシュ精度を要求することが確認された。また、狭窄部後流における剥離域の分布は、メッシュ密度依存性を持つことが分かった。

柔軟管拍動流解析では、狭窄部後流において乱流に見られるらせん構造が確認できた。比散逸率 ω が狭窄部で生じ、移流拡散していく様子も見られた。また、乱流エネルギー k の初期値が0の場合には、その後の解析で値が発生しないことを示した。しかしながら、計算の安定性には課題を残す結果となった。

4.2 今後の課題

本研究の解析プログラムでは、壁面近傍での流体挙動の評価が低精度であると考えられる。そのため、先行研究で妥当性が確認されている粘性低層や対数則域の評価手法を用いる必要がある。また、 k - ε モデルと k - ω モデルのハイブリッド手法（SST モデル）の開発を行っていくことが望ましい。しかしながら、それらの解析手法は計算負荷が大きくなる。将来的にはCTなどを用いて患者固有の血管形状を取得し、診断に際し実用的な解析時間内で血流動態に関する有用な知見を得ることが要求される。そのため、計算スキームの見直し、ならびに効率化が重要な課題となると考えられる。

また、 k - ω モデルでは渦粘性係数の定義(2.21)から、 ω の初期値として0を与えてしまうと計算が破綻する。そのため解析開始時に適当な値を与えておく必要がある。また、乱流エネルギー k の初期値が0である場合、その後の解析で値が生じないことを3.3.2節で示した。したがって、流入境界の乱流エネルギーが関心のある領域に流れ込むまで解析を行うか、あるいは解析領域全域に微小な初期値を与えておく必要がある。これらの k 、 ω の初期値の変化に対する解析結果の感度についても議論の余地が残されている。

今後はより高い圧力振幅や流速を持つ実際の生体内流れの解析が待たれているため、高い圧力負荷や大流量にも耐えられる解析プログラムを作ることが求められる。また、先行研

究において議論がなされていない致命的な狭窄（狭窄率 90%以上程度）の解析を行っていくことも課題として挙げられる。しかしながら本研究の解析で明らかになったように、狭窄部からその下流にかけてのジェット流周辺では収束の悪い自由度が生じやすい。そのため、計算時間が長大になってしまう。この問題を回避するため、残差が大きくなる要因の検討と、安定して収束する計算手法の開発が必要である。

これらの課題を解決した上で、流体構造連成解析による管の挙動について論じていくことが期待される。狭窄柔軟管の変形・振動現象は、CT スキャンの空間分解能や時間分解能などと合わせて考慮していくべき課題である。

謝辞

本研究は東芝研究開発センターの協力のもとで行われたものであり、特に、先行研究において開発された流体構造連成解析プログラムはその検証において多くを東芝研究開発センターに負っています。本研究では鈴木がプログラムを引き継がせていただき、乱流解析機能の実装を行ったこととなります。東芝研究開発センターの牛流様、加納様、加藤様、廣畑様には研究報告の席で示唆に富んだご質問をしていただくなど助けていただいた場面がありました。流体解析については全くの素人である鈴木が共同研究という形で多くを学ばせていただいたことは畏れ多くもあり、また光栄なことでもありました。

本研究は酒井教授のご指導のもとで進められたものです。酒井教授、泉教授には研究会で研究の指針となるアドバイスをいただきました。この場を借りて感謝申し上げます。また、波田野助教には有限要素法の基礎からプログラミングまで、研究のあらゆる面でご指導していただきました。いろいろな質問に快く応じてくださったこと、心から感謝しています。

本研究室の住吉谷さんは、最も親身になって相談に応じてくださいました。先輩がおられなければ、長大かつ難解なプログラムを読んでいくことは能力的にも気力的にも極めて困難なものになっていたと思います。まず間違いなく、乱流モデルの実装まで行き着けなかったはずです。勉強不足ゆえの愚かな質問も（修士論文直前まで！）たくさんしましたが、その一つ一つに答えていただけたおかげで、ある程度まとまったものを作ることができました。ありがとうございます。

研究室の先輩方や同期の皆にも多くの面でお世話になりました。この一年いい環境で研究させていただけたのは皆様のおかげです。

最後に、私事で恐縮ですが、生活面で支えてくれた家族に謝意を表したいと思います。

付録 A RANS および k - ω モデルの有限要素法離散化

以下の付録では、本研究においてコーディングされた式の導出過程の詳細を示す。ただし、層流モデルによる計算プログラムは片山[10]から引き継いでいるため、鈴木が導出およびコーディングを行ったのは、RANS 中で k および ω が関係する項，ならびに k と ω の輸送方程式である。

本論文 2.1.5 節において示した RANS および Wilcox k - ω モデル（の弱形式）(2.29), (2.32), (2.33)を再掲する。

①弱形式で表された RANS

$$\begin{aligned}
 & \int_V \left[\delta \mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \delta \mathbf{v} \cdot \rho \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \} + \delta \mathbf{D} : 2(\mu + \mu_T) \mathbf{D} - \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) \right. \\
 & \quad \left. + \delta p (\nabla \cdot \mathbf{v}) \right. \\
 & \quad \left. + \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \rho \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \} - \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \{ 2(\mu + \mu_T) \mathbf{D} \} + \nabla \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) \right\} \right. \\
 & \quad \left. + \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \nabla \delta p \cdot \left\{ \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x + \rho \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \} - \rho \mathbf{g} - \nabla \cdot \{ 2(\mu + \mu_T) \mathbf{D} \} + \nabla \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) \right\} \right] dV \\
 & = \int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{g} dV + \int_{S_t} \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}^* dS_t
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

②弱形式で表された Wilcox k - ω モデル

$$\begin{aligned}
 & \int_V \left[\left(\delta k + \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta k) \right) \left(\rho \frac{\partial k}{\partial t} \Big|_x + \rho (k \otimes \nabla) \cdot \mathbf{c} - \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla k) \right] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2\mu_T \mathbf{D} : \mathbf{D} + \beta^* \rho k \omega \right) \right] dV = 0
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_V \left[\left(\delta \omega + \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta \omega) \right) \left(\rho \frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_x + \rho (\omega \otimes \nabla) \cdot \mathbf{c} - \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) (\nabla \omega) \right] \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2\rho \gamma_1 \mathbf{D} : \mathbf{D} + \beta_1 \rho \omega^2 \right) \right] dV = 0
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

上式(A.1), (A.2), (A.3)に対し，四面体一次要素の補間関数 N を用いた有限要素法離散化を行った。直接書き下した式は長大であるため，項ごとに離散化しその詳細を示す。なお，各項は物理的意味による名前付けをしている。

以下の式変形では添え字は総和規約に従う．また， δ_{ij} はクロネッカーのデルタである．圧力の補間関数 M は表記上その他の変数の補間関数 N と区別したが，実際には同一の関数である．なお，適宜ガウスの発散定理を用い，2.2節の境界条件から項の値を評価している．

RANS (レイノルズ平均ナビエ - ストークス方程式)

慣性項

$$\int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x dv_e = \rho \int_V \delta_{ij} \delta v_i \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x dv_e \quad (\text{A.4})$$

$$= \delta v_i^m \left[\rho \delta_{ij} \int_V N^m N^n dv_e \right] \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.5})$$

$$= \delta v_i^m m_i M_j^n \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.6})$$

$$m_i M_j^n = \rho \delta_{ij} \int_V N^m N^n dv_e \quad (\text{A.7})$$

移流項

$$\int_V \delta \mathbf{v} \cdot \rho \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \} dv_e = \rho \int_V \delta_{ij} \delta v_i c_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dv_e \quad (\text{A.8})$$

$$= \delta v_i^m \left[\rho \delta_{ij} \int_V N^m N^o \frac{\partial N^n}{\partial x_k} dv_e c_k^o \right] v_j^n \quad (\text{A.9})$$

$$= \delta v_i^m m_i \Lambda_{kj}^{on} c_k^o v_j^n \quad (\text{A.10})$$

$$m_i \Lambda_{kj}^{on} = \rho \delta_{ij} \int_V N^m N^o \frac{\partial N^n}{\partial x_k} dv_e \quad (\text{A.11})$$

ただし c_k^o は前時間ステップの値を採用し，定数として扱う．

粘性項

$$\int_V \delta \mathbf{D} : 2(\mu + \mu_T) \mathbf{D} dv_e = 2 \int_V (\mu + \mu_T) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dv_e \quad (\text{A.12})$$

$$= \int_V (\mu + \mu_T) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dv_e \quad (\text{A.13})$$

$$= \int_V (\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dv_e \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned}
&= \delta v_i^m \left[\mu \int_V \left(\frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^m}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e \right] v_j^n \\
&+ \delta v_i^m \left[\int_V N^w \left(\frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^m}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e \right] \mu_T^w v_j^n
\end{aligned} \tag{A.15}$$

$$= \delta v_i^m m_i K_{1j}^n v_j^n + \delta v_i^m m_i K_{2j}^{wn} \mu_T^w v_j^n \tag{A.16}$$

$$m_i K_{1j}^n = \mu \int_V \left(\frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^m}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e \tag{A.17}$$

$$m_i K_{2j}^{wn} = \int_V N^w \left(\frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^m}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e \tag{A.18}$$

圧力勾配項

$$\int_V \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) (\nabla \cdot \delta \mathbf{v}) dv_e = \int_V \left(M^s p^s + \frac{2}{3} \rho N^p k^p \right) \frac{\partial N^m}{\partial x_i} \delta v_i^m dv_e \tag{A.19}$$

$$= \delta v_i^m \left[\int_V M^s \frac{\partial N^m}{\partial x_i} dv_e \right] p^s + \delta v_i^m \left[\frac{2}{3} \rho \int_V N^p \frac{\partial N^m}{\partial x_i} dv_e \right] k^p \tag{A.20}$$

$$= \delta v_i^m m_i B_1^s p^s + \delta v_i^m m_i B_2^p k^p \tag{A.21}$$

$$m_i B_1^s = \int_V M^s \frac{\partial N^m}{\partial x_i} dv_e \tag{A.22}$$

$$m_i B_2^p = \frac{2}{3} \rho \int_V N^p \frac{\partial N^m}{\partial x_i} dv_e \tag{A.23}$$

非圧縮性の拘束条件項

$$\int_V \delta p (\nabla \cdot \mathbf{v}) dv_e = \int_V M^r \delta p^r \frac{\partial N^n}{\partial x_j} v_j^n dv_e \tag{A.24}$$

$$= \delta p^r \left[\int_V M^r \frac{\partial N^n}{\partial x_j} dv_e \right] v_j^n \tag{A.25}$$

$$= \delta p^r {}^r B_{1j}^{Tn} v_j^n \tag{A.26}$$

$${}^r B_{1j}^{Tn} = \int_V M^r \frac{\partial N^n}{\partial x_j} dv_e \tag{A.27}$$

RANS, SUPG 安定化項

慣性項

$$\rho \int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x dv_e = \rho \int_V \tau_{supg} \delta_{ij} c_k \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x dv_e \quad (\text{A.28})$$

$$= \rho \int_V \tau_{supg} \delta_{ij} N^o c_k^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \delta v_i^m \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x N^n dv_e \quad (\text{A.29})$$

$$= \delta v_i^m \left[\rho \tau_{supg} \delta_{ij} \int_V N^o N^n \frac{\partial N^m}{\partial x_k} dv_e c_k^o \right] \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.30})$$

$$= \delta v_i^m m_i M_{supg_{kj}}^{on} c_k^o \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.31})$$

$$m_i M_{supg_{kj}}^{on} = \rho \tau_{supg} \delta_{ij} \int_V N^o N^n \frac{\partial N^m}{\partial x_k} dv_e \quad (\text{A.32})$$

移流項

$$\rho \int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \{\mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v})\} dv_e = \rho \int_V \tau_{supg} \delta_{ij} c_k \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} c_l \frac{\partial v_j}{\partial x_l} dv_e \quad (\text{A.33})$$

$$= \rho \tau_{supg} \delta_{ij} \int_V N^o c_k^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \delta v_i^m N^p c_l^p \frac{\partial N^n}{\partial x_l} v_j^n dv_e \quad (\text{A.34})$$

$$= \delta v_i^m \left[\rho \tau_{supg} \delta_{ij} \int_V N^o N^p \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_l} dv_e c_k^o c_l^p \right] v_j^n \quad (\text{A.35})$$

$$= \delta v_i^m m_i \Lambda_{supg_j}^n v_j^n \quad (\text{A.36})$$

$$m_i \Lambda_{supg_j}^n = \rho \tau_{supg} \delta_{ij} \int_V N^o N^p \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_l} dv_e c_k^o c_l^p \quad (\text{A.37})$$

粘性項

$$\begin{aligned}
& \int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \{\nabla \cdot 2(\mu + \mu_T) \mathbf{D}\} dv_e \\
&= \int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot (2\mu \nabla \cdot \mathbf{D}) dv_e \\
&+ \int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot (2\mu_T \nabla \cdot \mathbf{D}) dv_e \\
&+ \int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \{(2\nabla \mu_T) \cdot \mathbf{D}\} dv_e
\end{aligned} \tag{A.38}$$

$$= \int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \{(2\nabla \mu_T) \cdot \mathbf{D}\} dv_e \tag{A.39}$$

$$= \int_V \tau_{supg} c_k \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial \mu_T}{\partial x_l} \frac{\partial v_l}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu_T}{\partial x_l} \frac{\partial v_j}{\partial x_l} \right) \delta_{ij} dv_e \tag{A.40}$$

$$= \int_V \tau_{supg} N^o c_k^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \delta v_i^m \left(\frac{\partial N^w}{\partial x_l} \mu_T^w \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} v_l^{n'} + \frac{\partial N^w}{\partial x_l} \mu_T^w \frac{\partial N^n}{\partial x_l} v_j^n \right) \delta_{ij} dv_e \tag{A.41}$$

$$= \delta v_i^m \left[\tau_{supg} \int_V N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^w}{\partial x_l} \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} \delta_{ij} dv_e c_k^o \right] \mu_T^w v_l^{n'} \tag{A.42}$$

$$+ \delta v_i^m \left[\tau_{supg} \int_V N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^w}{\partial x_l} \frac{\partial N^n}{\partial x_l} \delta_{ij} dv_e c_k^o \right] \mu_T^w v_j^n$$

$$= \delta v_i^m \left[\tau_{supg} \int_V N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^w}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_a} \delta_{ia} dv_e c_k^o \right] \mu_T^w v_j^n \tag{A.43}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta v_i^m \left[\tau_{supg} \int_V N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^w}{\partial x_l} \frac{\partial N^n}{\partial x_l} \delta_{ij} dv_e c_k^o \right] \mu_T^w v_j^n \\
&= \delta v_i^m m_i K_{supg,1j}^{wn} \mu_T^w v_j^n + \delta v_i^m m_i K_{supg,2j}^{wn} \mu_T^w v_j^n
\end{aligned} \tag{A.44}$$

$$m_i K_{supg,1j}^{wn} = \tau_{supg} \int_V N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^w}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_a} \delta_{ia} dv_e c_k^o \tag{A.45}$$

$$m_i K_{supg,2j}^{wn} = \tau_{supg} \int_V N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^w}{\partial x_l} \frac{\partial N^n}{\partial x_l} \delta_{ij} dv_e c_k^o \tag{A.46}$$

压力勾配項

$$\int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \delta \mathbf{v}) \cdot \nabla \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) dv_e = \int_V \tau_{supg} c_k \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{2}{3} \rho \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \delta_{ij} dv_e \quad (\text{A.47})$$

$$= \int_V \tau_{supg} N^o c_k^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \delta v_i^m \left(\frac{\partial M^r}{\partial x_j} p^r + \frac{2}{3} \rho \frac{\partial N^p}{\partial x_j} k^p \right) \delta_{ij} dv_e \quad (\text{A.48})$$

$$= \delta v_i^m \left[\tau_{supg} \delta_{ij} \int_V N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial M^r}{\partial x_j} dv_e c_k^o \right] p^r \quad (\text{A.49})$$

$$+ \delta v_i^m \left[\frac{2}{3} \rho \tau_{supg} \delta_{ij} \int_V N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^p}{\partial x_j} dv_e c_k^o \right] k^p \\ = \delta v_i^m m_i G_{supg_1}^r p^r + \delta v_i^m m_i G_{supg_2}^p k^p \quad (\text{A.50})$$

$$m_i G_{supg_1}^r = \tau_{supg} \delta_{ij} \int_V N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial M^r}{\partial x_j} dv_e c_k^o \quad (\text{A.51})$$

$$m_i G_{supg_2}^p = \frac{2}{3} \rho \tau_{supg} \delta_{ij} \int_V N^o \frac{\partial N^m}{\partial x_k} \frac{\partial N^p}{\partial x_j} dv_e c_k^o \quad (\text{A.52})$$

RANS, PSPG 安定化項

慣性項

$$\int_V \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} (\nabla \delta p) \cdot \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \Big|_x dv_e = \int_V \tau_{pspg} \frac{\partial \delta p}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial t} \Big|_x dv_e \quad (\text{A.53})$$

$$= \int_V \tau_{pspg} \frac{\partial M^r}{\partial x_j} \delta p^r N^n \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x dv_e \quad (\text{A.54})$$

$$= \delta p^r \left[\tau_{pspg} \int_V \frac{\partial M^r}{\partial x_j} N^n dv_e \right] \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.55})$$

$$= \delta p^r {}^r M_{pspg_j}^n \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.56})$$

$${}^r M_{pspg_j}^n = \tau_{pspg} \int_V \frac{\partial M^r}{\partial x_j} N^n dv_e \quad (\text{A.57})$$

移流項

$$\int_V \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} (\nabla \delta p) \cdot \rho \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \otimes \mathbf{v}) \} dv_e = \int_V \tau_{pspg} \frac{\partial \delta p}{\partial x_j} c_k \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dv_e \quad (\text{A.58})$$

$$= \int_V \tau_{pspg} \frac{\partial M^r}{\partial x_j} \delta p^r N^o c_k^o \frac{\partial N^n}{\partial x_k} v_j^n dv_e \quad (\text{A.59})$$

$$= \delta p^r \left[\tau_{pspg} \int_V N^o \frac{\partial M^r}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} dv_e c_k^o \right] v_j^n \quad (\text{A.60})$$

$$= \delta p^r {}^r \Lambda_{pspg_j}^n v_j^n \quad (\text{A.61})$$

$${}^r \Lambda_{pspg_j}^n = \tau_{pspg} \int_V N^o \frac{\partial M^r}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} dv_e c_k^o \quad (\text{A.62})$$

圧力勾配項

$$\int_V \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} (\nabla \delta p) \cdot \nabla \left(p + \frac{2}{3} \rho k \right) dv_e = \int_V \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial x_k} \left(\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{2}{3} \rho \frac{\partial k}{\partial x_k} \right) dv_e \quad (\text{A.63})$$

$$= \int_V \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \frac{\partial M^r}{\partial x_k} \delta p^r \frac{\partial M^s}{\partial x_k} p^s dv_e + \int_V \frac{2}{3} \tau_{pspg} \frac{\partial M^r}{\partial x_k} \delta p^r \frac{\partial N^p}{\partial x_k} k^p dv_e \quad (\text{A.64})$$

$$= \delta p^r \left[\frac{\tau_{pspg}}{\rho} \int_V \frac{\partial M^r}{\partial x_k} \frac{\partial M^s}{\partial x_k} dv_e \right] p^s + \delta p^r \left[\frac{2}{3} \tau_{pspg} \int_V \frac{\partial M^r}{\partial x_k} \frac{\partial N^p}{\partial x_k} dv_e \right] k^p \quad (\text{A.65})$$

$$= \delta p^r {}^r B_{pspg_1}^s p^s + \delta p^r {}^r B_{pspg_2}^p k^p \quad (\text{A.66})$$

$${}^r B_{pspg_1}^s = \frac{\tau_{pspg}}{\rho} \int_V \frac{\partial M^r}{\partial x_k} \frac{\partial M^s}{\partial x_k} dv_e \quad (\text{A.67})$$

$${}^rB_{pspg,2}^p = \frac{2}{3} \tau_{pspg} \int_V \frac{\partial M^r}{\partial x_k} \frac{\partial N^p}{\partial x_k} dv_e \quad (\text{A.68})$$

粘性項

$$\int_V \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} (\nabla \delta p) \cdot [\nabla \cdot \{2(\mu + \mu_T) \mathbf{D}\}] dv_e = \int_V \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} (\nabla \delta p) \cdot \{2(\nabla \mu_T) \mathbf{D}\} dv_e \quad (\text{A.69})$$

$$= \int_V \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mu_T}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu_T}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} dv_e \quad (\text{A.70})$$

$$= \int_V \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \frac{\partial M^r}{\partial x_i} \delta p^r \frac{\partial N^w}{\partial x_k} \mu_T^w \frac{\partial N^n}{\partial x_j} v_k^n \delta_{ij} dv_e \quad (\text{A.71})$$

$$+ \int_V \tau_{pspg} \frac{1}{\rho} \frac{\partial M^r}{\partial x_i} \delta p^r \frac{\partial N^w}{\partial x_k} \mu_T^w \frac{\partial N^n}{\partial x_k} v_j^n \delta_{ij} dv_e$$

$$= \delta p^r \left[\frac{\tau_{pspg}}{\rho} \delta_{ia} \int_V \frac{\partial M^r}{\partial x_i} \frac{\partial N^w}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_a} dv_e \right] \mu_T^w v_j^n \quad (\text{A.72})$$

$$+ \delta p^r \left[\frac{\tau_{pspg}}{\rho} \delta_{ij} \int_V \frac{\partial M^r}{\partial x_i} \frac{\partial N^w}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} dv_e \right] \mu_T^w v_j^n$$

$$= \delta p^r {}^rK_{pspg,1j}^{wn} \mu_T^w v_j^n + \delta p^r {}^rK_{pspg,2j}^{wn} \mu_T^w v_j^n \quad (\text{A.73})$$

$${}^rK_{pspg,1j}^{wn} = \frac{\tau_{pspg}}{\rho} \delta_{ia} \int_V \frac{\partial M^r}{\partial x_i} \frac{\partial N^w}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_a} dv_e \quad (\text{A.74})$$

$${}^rK_{pspg,2j}^{wn} = \frac{\tau_{pspg}}{\rho} \delta_{ij} \int_V \frac{\partial M^r}{\partial x_i} \frac{\partial N^w}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} dv_e \quad (\text{A.75})$$

ただし、途中で以下の式変形を用いた。

$$2(\nabla \mu_T) \mathbf{D} = 2 \frac{\partial \mu_T}{\partial x_k} \mathbf{e}_k \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \quad (\text{A.76})$$

$$= \frac{\partial \mu_T}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \delta_{ik} \mathbf{e}_j \quad (\text{A.77})$$

$$= \frac{\partial \mu_T}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_j + \frac{\partial \mu_T}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \mathbf{e}_j \quad (\text{A.78})$$

$$(\nabla \delta p) \cdot \{2(\nabla \mu_T) \mathbf{D}\} = \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \cdot \left(\frac{\partial \mu_T}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_j + \frac{\partial \mu_T}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \mathbf{e}_j \right) \quad (\text{A.79})$$

$$= \frac{\partial \delta p}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mu_T}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \mu_T}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (\text{A.80})$$

k (乱流エネルギー) の輸送方程式

時間変化項

$$\int_V \delta k \rho \frac{\partial k}{\partial t} \Big|_x dv_e = \int_V \rho N^q \delta k^q N^p \frac{\partial k^p}{\partial t} \Big|_x dv_e \quad (\text{A.81})$$

$$= \delta k^q \left[\rho \int_V N^q N^p dv_e \right] \frac{\partial k^p}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.82})$$

$$= \delta k^q {}^q T_k^p \frac{\partial k^p}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.83})$$

$${}^q T_k^p = \rho \int_V N^q N^p dv_e \quad (\text{A.84})$$

移流項

$$\int_V \delta k \rho (k \otimes \nabla) \cdot \mathbf{c} dv_e = \int_V \rho \delta k \frac{\partial k}{\partial x_k} c_k dv_e \quad (\text{A.85})$$

$$= \int_V \rho N^q \delta k^q \frac{\partial N^p}{\partial x_k} k^p N^o c_k^o dv_e \quad (\text{A.86})$$

$$= \delta k^q \left[\rho \int_V N^q N^o \frac{\partial N^p}{\partial x_k} dv_e c_k^o \right] k^p \quad (\text{A.87})$$

$$= \delta k^q {}^q A_{k,1}^p k^p \quad (\text{A.88})$$

$${}^q A_{k,1}^p = \rho \int_V N^q N^o \frac{\partial N^p}{\partial x_k} dv_e c_k^o \quad (\text{A.89})$$

乱流拡散項

$$\int_V \delta k \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla k) \right] dv_e \quad (\text{A.90})$$

$$= \int_V \nabla \cdot \left[\delta k \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla k) \right] dv_e - \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla \delta k) \cdot (\nabla k) dv_e \quad (\text{A.91})$$

$$= \int_S \delta k \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla k) \cdot \mathbf{ds} - \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla \delta k) \cdot (\nabla k) dv_e \quad (\text{A.92})$$

$$= - \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \delta k}{\partial x_l} \frac{\partial k}{\partial x_l} dv_e \quad (\text{A.93})$$

$$= - \int_V \left(\mu + \frac{N^w \mu_T^w}{\sigma_k} \right) \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \delta k^q \frac{\partial N^p}{\partial x_l} k^p dv_e \quad (\text{A.94})$$

$$= \delta k^q \left[-\mu \int_V \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \frac{\partial N^p}{\partial x_l} dv_e \right] k^p + \delta k^q \left[-\frac{1}{\sigma_k} \int_V N^w \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \frac{\partial N^p}{\partial x_l} dv_e \right] \mu_T^w k^p \quad (\text{A.95})$$

$$= \delta k^q {}^q D_{k_1}^p k^p + \delta k^q {}^q D_{k_2}^{wp} \mu_T^w k^p \quad (\text{A.96})$$

$${}^q D_{k_1}^p = -\mu \int_V \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \frac{\partial N^p}{\partial x_l} dv_e \quad (\text{A.97})$$

$${}^q D_{k_2}^{wp} = -\frac{1}{\sigma_k} \int_V N^w \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \frac{\partial N^p}{\partial x_l} dv_e \quad (\text{A.98})$$

生成項

$$\int_V \delta k (2\mu_T \mathbf{D} : \mathbf{D}) dv_e = \int_V \delta k \mu_T \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dv_e \quad (\text{A.99})$$

$$= \int_V N^q \delta k^q N^w \mu_T^w \left(\frac{\partial N^{n'}}{\partial x_k} v_i^{n'} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} v_j^n \delta_{ij} + \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} v_i^{n'} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} v_j^n \right) dv_e \quad (\text{A.100})$$

$$= \delta k^q \left[\int_V N^q N^w \left(\frac{\partial N^{n'}}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e \right] \mu_T^w v_i^{n'} v_j^n \quad (\text{A.101})$$

$$= \delta k^q {}^q E_{kij}^{wnn} \mu_T^w v_i^{n'} v_j^n \quad (\text{A.102})$$

$${}^q E_{kij}^{wnn} = \int_V N^q N^w \left(\frac{\partial N^{n'}}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e \quad (\text{A.103})$$

消費項

$$\int_V \delta k \beta^* \rho k \omega dv_e = \rho \beta^* \int_V N^q \delta k^q N^p k^p N^b \omega^b dv_e \quad (\text{A.104})$$

$$= \delta k^q \left[\rho \beta^* \int_V N^q N^p N^b dv_e \right] k^p \omega^b \quad (\text{A.105})$$

$$= \delta k^q {}^q C_k^{pb} k^p \omega^b \quad (\text{A.106})$$

$${}^q C_k^{pb} = \rho \beta^* \int_V N^q N^p N^b dv_e \quad (\text{A.107})$$

k (乱流エネルギー) の輸送方程式, SUPG 安定化項

時間変化項

$$\int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta k) \rho \frac{\partial k}{\partial t} \Big|_x dv_e = \int_V \tau_{supg} c_l \frac{\partial \delta k}{\partial x_l} \rho \frac{\partial k}{\partial t} \Big|_x dv_e \quad (\text{A.108})$$

$$= \rho \tau_{supg} \int_V N^o c_l^o \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \delta k^q N^p \frac{\partial k^p}{\partial t} \Big|_x dv_e \quad (\text{A.109})$$

$$= \delta k^q \left[\rho \tau_{supg} \int_V N^o N^p \frac{\partial N^q}{\partial x_l} dv_e c_l^o \right] \frac{\partial k^p}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.110})$$

$$= \delta k^q {}^q T_{k_supg}^p \frac{\partial k^p}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.111})$$

$${}^q T_{k_supg}^p = \rho \tau_{supg} \int_V N^o N^p \frac{\partial N^q}{\partial x_l} dv_e c_l^o \quad (\text{A.112})$$

移流項

$$\int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta k) \rho (k \otimes \nabla) \cdot \mathbf{c} dv_e = \rho \tau_{supg} \int_V c_l \frac{\partial \delta k}{\partial x_l} c_k \frac{\partial k}{\partial x_k} dv_e \quad (\text{A.113})$$

$$= \rho \tau_{supg} \int_V N^o c_l^o \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \delta k^q N^{o'} c_k^{o'} \frac{\partial N^p}{\partial x_k} k^p dv_e \quad (\text{A.114})$$

$$= \delta k^q \left[\rho \tau_{supg} \int_V N^o N^{o'} \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \frac{\partial N^p}{\partial x_k} dv_e c_l^o c_k^{o'} \right] k^p \quad (\text{A.115})$$

$$= \delta k^q {}^q A_{k_supg_1}^p k^p \quad (\text{A.116})$$

$${}^q A_{k_supg_1}^p = \rho \tau_{supg} \int_V N^o N^{o'} \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \frac{\partial N^p}{\partial x_k} dv_e c_l^o c_k^{o'} \quad (\text{A.117})$$

乱流拡散項

$$\int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta k) \left\{ \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla k) \right] \right\} dv_e \quad (\text{A.118})$$

$$= \tau_{supg} \int_V \nabla \cdot \left\{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta k) \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla k) \right\} dv_e \quad (\text{A.119})$$

$$- \tau_{supg} \int_V \nabla \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta k) \} \cdot \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla k) dv_e$$

$$= \tau_{supg} \int_S \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta k) \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla k) \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{A.120})$$

$$- \tau_{supg} \int_V \{ (\nabla \cdot \mathbf{c}) (\nabla \delta k) + (\nabla^2 \delta k) \mathbf{c} \} \cdot \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) (\nabla k) dv_e$$

$$= -\tau_{supg} \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_k} \right) \left(\frac{\partial c_l}{\partial x_l} \frac{\partial \delta k}{\partial x_i} + \frac{\partial \delta k}{\partial x_k \partial x_k} c_i \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} dv_e \quad (\text{A.121})$$

$$= -\tau_{supg} \int_V \left(\mu + \frac{N^w}{\sigma_k} \mu_T^w \right) \left(\frac{\partial N^o}{\partial x_l} c_l^o \frac{\partial N^q}{\partial x_i} \delta k^q + \frac{\partial N^q}{\partial x_k \partial x_k} \delta k^q N^{o'} c_i^{o'} \right) \frac{\partial N^p}{\partial x_i} k^p dv_e \quad (\text{A.122})$$

$$= \delta k^q \left[-\mu \tau_{supg} \int_V \frac{\partial N^o}{\partial x_l} \frac{\partial N^q}{\partial x_i} \frac{\partial N^p}{\partial x_i} dv_e c_l^o \right] k^p \quad (\text{A.123})$$

$$+ \delta k^q \left[-\frac{\tau_{supg}}{\sigma_k} \int_V N^w \frac{\partial N^o}{\partial x_l} \frac{\partial N^q}{\partial x_i} \frac{\partial N^p}{\partial x_i} dv_e c_l^o \right] \mu_T^w k^p$$

$$= \delta k^q {}^q D_{k_supg_1}^p k^p + \delta k^q {}^q D_{k_supg_3}^{wp} \mu_T^w k^p \quad (\text{A.124})$$

$${}^q D_{k_supg_1}^p = -\mu \tau_{supg} \int_V \frac{\partial N^o}{\partial x_l} \frac{\partial N^q}{\partial x_i} \frac{\partial N^p}{\partial x_i} dv_e c_l^o \quad (\text{A.125})$$

$${}^q D_{k_supg_3}^{wp} = -\frac{\tau_{supg}}{\sigma_k} \int_V N^w \frac{\partial N^o}{\partial x_l} \frac{\partial N^q}{\partial x_i} \frac{\partial N^p}{\partial x_i} dv_e c_l^o \quad (\text{A.126})$$

生成項

$$\int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta k) 2\mu_T \mathbf{D} : \mathbf{D} dv_e \quad (\text{A.127})$$

$$= \int_V \tau_{supg} c_l \frac{\partial \delta k}{\partial x_l} \mu_T \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dv_e$$

$$= \tau_{supg} \int_V N^o c_l^o \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \delta k^q N^w \mu_T^w \left(\frac{\partial N^{n'}}{\partial x_k} v_i^{n'} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} v_j^n \delta_{ij} + \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} v_i^{n'} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} v_j^n \right) dv_e \quad (\text{A.128})$$

$$= \delta k^q \left[\tau_{supg} \int_V N^o N^w \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \left(\frac{\partial N^{n'}}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e c_l^o \right] \mu_T^w v_i^{n'} v_j^n \quad (\text{A.129})$$

$$= \delta k^q {}^q E_{k_supg_ij}^{wn'n} \mu_T^w v_i^{n'} v_j^n \quad (\text{A.130})$$

$${}^q E_{k_supg_ij}^{wn'n} = \tau_{supg} \int_V N^o N^w \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \left(\frac{\partial N^{n'}}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e c_l^o \quad (\text{A.131})$$

消費項

$$\int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta k) \beta^* \rho k \omega dv_e = \rho \beta^* \tau_{supg} \int_V c_l \frac{\partial \delta k}{\partial x_l} k \omega dv_e \quad (\text{A.132})$$

$$= \rho \beta^* \tau_{supg} \int_V N^o c_l^o \frac{\partial N^q}{\partial x_l} \delta k^q N^p k^p N^b \omega^b dv_e \quad (\text{A.133})$$

$$= \delta k^q \left[\rho \beta^* \tau_{supg} \int_V N^o N^p N^b \frac{\partial N^q}{\partial x_l} dv_e c_l^o \right] k^p \omega^b \quad (\text{A.134})$$

$$= \delta k^q {}^q C_{k_supg}^{pb} k^p \omega^b \quad (\text{A.135})$$

$${}^q C_{k_supg}{}^{pb} = \rho \beta^* \tau_{supg} \int_V N^o N^p N^b \frac{\partial N^q}{\partial x_l} dv_e c_l^o \quad (A.136)$$

ω （比散逸率）の輸送方程式

時間変化項

$$\int_V \delta \omega \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_x dv_e = \int_V \rho N^a \delta \omega^a N^b \frac{\partial \omega^b}{\partial t} \Big|_x dv_e \quad (A.137)$$

$$= \delta \omega^a \left[\rho \int_V N^a N^b dv_e \right] \frac{\partial \omega^b}{\partial t} \Big|_x \quad (A.138)$$

$$= \delta \omega^a {}^a T_\omega{}^b \frac{\partial \omega^b}{\partial t} \Big|_x \quad (A.139)$$

$${}^a T_\omega{}^b = \rho \int_V N^a N^b dv_e \quad (A.140)$$

移流項

$$\int_V \delta \omega \rho (\omega \otimes \nabla) \cdot \mathbf{c} dv_e = \rho \int_V \delta \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_k} c_k dv_e \quad (A.141)$$

$$= \rho \int_V N^a \delta \omega^a \frac{\partial N^b}{\partial x_k} \omega^b N^o c_k^o dv_e \quad (A.142)$$

$$= \delta \omega^a \left[\rho \int_V N^a N^o \frac{\partial N^b}{\partial x_k} dv_e c_k^o \right] \omega^b \quad (A.143)$$

$$= \delta \omega^a {}^a A_{\omega 1}{}^b \omega^b \quad (A.144)$$

$${}^a A_{\omega 1}{}^b = \rho \int_V N^a N^o \frac{\partial N^b}{\partial x_k} dv_e c_k^o \quad (A.145)$$

乱流拡散項

$$\int_V \delta \omega \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) (\nabla \omega) \right] dv_e \quad (A.146)$$

$$= \int_V \nabla \cdot \left[\delta \omega \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) (\nabla \omega) \right] dv_e - \int_V (\nabla \delta \omega) \cdot \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) (\nabla \omega) dv_e \quad (A.147)$$

$$= \int_S \delta \omega \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) (\nabla \omega) \cdot \mathbf{ds} - \int_V (\nabla \delta \omega) \cdot \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) (\nabla \omega) dv_e \quad (A.148)$$

$$= - \int_V (\nabla \delta \omega) \cdot \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) (\nabla \omega) dv_e \quad (A.149)$$

$$= - \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \delta \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dv_e \quad (\text{A.150})$$

$$= - \int_V \left(\mu + \frac{N^w \mu_T^w}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial N^a}{\partial x_i} \delta \omega^a \frac{\partial N^b}{\partial x_i} \omega^b dv_e \quad (\text{A.151})$$

$$= \delta \omega^a \left[-\mu \int_V \frac{\partial N^a}{\partial x_i} \frac{\partial N^b}{\partial x_i} dv_e \right] \omega^b + \delta \omega^a \left[-\frac{1}{\sigma_\omega} \int_V N^w \frac{\partial N^a}{\partial x_i} \frac{\partial N^b}{\partial x_i} dv_e \right] \mu_T^w \omega^b \quad (\text{A.152})$$

$$= \delta \omega^a {}^a D_{\omega-1}{}^b \omega^b + \delta \omega^a {}^a D_{\omega-2}{}^{wb} \mu_T^w \omega^b \quad (\text{A.153})$$

$${}^a D_{\omega-1}{}^b = -\mu \int_V \frac{\partial N^a}{\partial x_i} \frac{\partial N^b}{\partial x_i} dv_e \quad (\text{A.154})$$

$${}^a D_{\omega-2}{}^{wb} = -\frac{1}{\sigma_\omega} \int_V N^w \frac{\partial N^a}{\partial x_i} \frac{\partial N^b}{\partial x_i} dv_e \quad (\text{A.155})$$

生成項

$$\int_V \delta \omega (2\gamma_1 \rho \mathbf{D} : \mathbf{D}) dv_e = \rho \gamma_1 \int_V \delta \omega \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dv_e \quad (\text{A.156})$$

$$= \rho \gamma_1 \int_V N^a \delta \omega^a \left(\frac{\partial N^{n'}}{\partial x_k} v_i^{n'} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} v_j^n \delta_{ij} + \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} v_i^{n'} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} v_j^n \right) dv_e \quad (\text{A.157})$$

$$= \delta \omega^a \left[\rho \gamma_1 \int_V N^a \left(\frac{\partial N^{n'}}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e \right] v_i^{n'} v_j^n \quad (\text{A.158})$$

$$= \delta \omega^a {}^a E_{\omega ij}{}^{nn} v_i^{n'} v_j^n \quad (\text{A.159})$$

$${}^a E_{\omega ij}{}^{nn} = \rho \gamma_1 \int_V N^a \left(\frac{\partial N^{n'}}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e \quad (\text{A.160})$$

消費項

$$\int_V \delta \omega \beta_1 \rho \omega^2 dv_e = \rho \beta_1 \int_V N^a \delta \omega^a N^b \omega^b N^c \omega^c dv_e \quad (\text{A.161})$$

$$= \delta \omega^a \left[\rho \beta_1 \int_V N^a N^b N^c dv_e \right] \quad (\text{A.162})$$

$$= \delta \omega^a {}^a C_\omega{}^{bc} \omega^b \omega^c \quad (\text{A.163})$$

$${}^a C_\omega{}^{bc} = \rho \beta_1 \int_V N^a N^b N^c dv_e \quad (\text{A.164})$$

ω (比散逸率) の輸送方程式, SUPG 安定化項

時間変化項

$$\int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta \omega) \rho \frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_x dv_e = \rho \tau_{supg} \int_V c_l \frac{\partial \delta \omega}{\partial x_l} \frac{\partial \omega}{\partial t} \Big|_x dv_e \quad (\text{A.165})$$

$$= \rho \tau_{supg} \int_V N^o c_l^o \frac{\partial N^a}{\partial x_l} \delta \omega^a N^b \frac{\partial \omega^b}{\partial t} \Big|_x dv_e \quad (\text{A.166})$$

$$= \delta \omega^a \left[\rho \tau_{supg} \int_V N^o N^b \frac{\partial N^a}{\partial x_l} dv_e c_l^o \right] \frac{\partial \omega^b}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.167})$$

$$= \delta \omega^a {}^a T_{\omega_{supg}}^b \frac{\partial \omega^b}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{A.168})$$

$${}^a T_{\omega_{supg}}^b = \rho \tau_{supg} \int_V N^o N^b \frac{\partial N^a}{\partial x_l} dv_e c_l^o \quad (\text{A.169})$$

移流項

$$\int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta \omega) \rho (\omega \otimes \nabla) \cdot \mathbf{c} dv_e = \rho \tau_{supg} \int_V c_l \frac{\partial \delta \omega}{\partial x_l} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} c_k dv_e \quad (\text{A.170})$$

$$= \rho \tau_{supg} \int_V N^o c_l^o \frac{\partial N^a}{\partial x_l} \delta \omega^a \frac{\partial N^b}{\partial x_k} \omega^b N^{o'} c_k^{o'} dv_e \quad (\text{A.171})$$

$$= \delta \omega^a \left[\rho \tau_{supg} \int_V N^o N^{o'} \frac{\partial N^a}{\partial x_l} \frac{\partial N^b}{\partial x_k} dv_e c_l^o c_k^{o'} \right] \omega^b \quad (\text{A.172})$$

$$= \delta \omega^a {}^a A_{\omega_{supg}}^b \omega^b \quad (\text{A.173})$$

$${}^a A_{\omega_{supg}}^b = \rho \tau_{supg} \int_V N^o N^{o'} \frac{\partial N^a}{\partial x_l} \frac{\partial N^b}{\partial x_k} dv_e c_l^o c_k^{o'} \quad (\text{A.174})$$

乱流拡散項

$$\int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta \omega) \left\{ \nabla \cdot \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) (\nabla \omega) \right] \right\} dv_e \quad (\text{A.175})$$

$$= \tau_{supg} \int_V \nabla \cdot \left\{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta \omega) \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) (\nabla \omega) \right\} dv_e \quad (\text{A.176})$$

$$- \tau_{supg} \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) \nabla \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta \omega) \} \cdot (\nabla \omega) dv_e$$

$$= \tau_{supg} \int_S \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta \omega) \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) (\nabla \omega) d\mathbf{s} - \tau_{supg} \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) \nabla \{ \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta \omega) \} \cdot (\nabla \omega) dv_e \quad (\text{A.177})$$

$$= -\tau_{supg} \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) \{ (\nabla \cdot \mathbf{c}) (\nabla \delta \omega) + (\nabla^2 \delta \omega) \mathbf{c} \} \cdot (\nabla \omega) dv_e \quad (\text{A.178})$$

$$= -\tau_{supg} \int_V \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_\omega} \right) \left(\frac{\partial c_k}{\partial x_k} \frac{\partial \delta \omega}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 \delta \omega}{\partial x_l \partial x_l} c_i \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dv_e \quad (\text{A.179})$$

$$= -\mu \tau_{supg} \int_V \frac{\partial c_k}{\partial x_k} \frac{\partial \delta \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dv_e - \mu \tau_{supg} \int_V \frac{\partial^2 \delta \omega}{\partial x_l \partial x_l} c_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dv_e \quad (\text{A.180})$$

$$- \frac{\tau_{supg}}{\sigma_\omega} \int_V \mu_T \frac{\partial c_k}{\partial x_k} \frac{\partial \delta \omega}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dv_e - \frac{\tau_{supg}}{\sigma_\omega} \int_V \mu_T \frac{\partial^2 \delta \omega}{\partial x_l \partial x_l} c_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} dv_e$$

$$= -\mu \tau_{supg} \int_V \frac{\partial N^o}{\partial x_k} c_k^o \frac{\partial N^a}{\partial x_i} \delta \omega^a \frac{\partial N^b}{\partial x_i} \omega^b dv_e - \mu \tau_{supg} \int_V \frac{\partial^2 N^a}{\partial x_l \partial x_l} \delta \omega^a N^o c_i^o \frac{\partial N^b}{\partial x_i} \omega^b dv_e$$

$$- \frac{\tau_{supg}}{\sigma_\omega} \int_V N^w \mu_T^w \frac{\partial N^o}{\partial x_k} c_k^o \frac{\partial N^a}{\partial x_i} \delta \omega^a \frac{\partial N^b}{\partial x_i} \omega^b dv_e \quad (\text{A.181})$$

$$- \frac{\tau_{supg}}{\sigma_\omega} \int_V N^w \mu_T^w \frac{\partial^2 N^a}{\partial x_l \partial x_l} \delta \omega^a N^o c_i^o \frac{\partial N^b}{\partial x_i} \omega^b dv_e$$

$$= \delta \omega^a \left[-\mu \tau_{supg} \int_V \frac{\partial N^o}{\partial x_k} \frac{\partial N^a}{\partial x_i} \frac{\partial N^b}{\partial x_i} dv_e c_k^o \right] \omega^b \quad (\text{A.182})$$

$$+ \delta \omega^a \left[-\frac{\tau_{supg}}{\sigma_\omega} \int_V N^w \frac{\partial N^o}{\partial x_k} \frac{\partial N^a}{\partial x_i} \frac{\partial N^b}{\partial x_i} dv_e c_k^o \right] \mu_T^w \omega^b$$

$$= \delta \omega^a {}^a D_{\omega_{supg_1}}{}^b \omega^b + \delta \omega^a {}^a D_{\omega_{supg_3}}{}^{wb} \mu_T^w \omega^b \quad (\text{A.183})$$

$${}^a D_{\omega_{supg_1}}{}^b = -\mu \tau_{supg} \int_V \frac{\partial N^o}{\partial x_k} \frac{\partial N^a}{\partial x_i} \frac{\partial N^b}{\partial x_i} dv_e c_k^o \quad (\text{A.184})$$

$${}^a D_{\omega_{supg_3}}{}^{wb} = -\frac{\tau_{supg}}{\sigma_\omega} \int_V N^w \frac{\partial N^o}{\partial x_k} \frac{\partial N^a}{\partial x_i} \frac{\partial N^b}{\partial x_i} dv_e c_k^o \quad (\text{A.185})$$

生成項

$$\int_V \gamma_1 \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta \omega) 2\rho \mathbf{D} : \mathbf{D} dv_e \quad (\text{A.186})$$

$$= \int_V \rho \gamma_1 \tau_{supg} c_l \frac{\partial \delta \omega}{\partial x_l} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) dv_e$$

$$= \rho \gamma_1 \tau_{supg} \int_V N^o c_l^o \frac{\partial N^a}{\partial x_l} \delta \omega^a \left(\frac{\partial N^{n'}}{\partial x_k} v_i^{n'} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} v_j^n \delta_{ij} + \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} v_i^{n'} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} v_j^n \right) dv_e \quad (\text{A.187})$$

$$= \delta \omega^a \left[\rho \gamma_1 \tau_{supg} \int_V N^o \frac{\partial N^a}{\partial x_l} \left(\frac{\partial N^{n'}}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e c_l^o \right] v_i^{n'} v_j^n \quad (\text{A.188})$$

$$= \delta \omega^a {}^a E_{\omega_{supg_{ij}}}{}^{nn} v_i^{n'} v_j^n \quad (\text{A.189})$$

$${}^a E_{\omega_{supg_{ij}}}{}^{nn} = \rho \gamma_1 \tau_{supg} \int_V N^o \frac{\partial N^a}{\partial x_l} \left(\frac{\partial N^{n'}}{\partial x_k} \frac{\partial N^n}{\partial x_k} \delta_{ij} + \frac{\partial N^{n'}}{\partial x_j} \frac{\partial N^n}{\partial x_i} \right) dv_e c_l^o \quad (\text{A.190})$$

消費項

$$\int_V \tau_{supg} \mathbf{c} \cdot (\nabla \delta \omega) \beta_1 \rho \omega^2 dv_e = \rho \beta_1 \tau_{supg} \int_V c_l \frac{\partial \delta \omega}{\partial x_l} \omega^2 dv_e \quad (\text{A.191})$$

$$= \rho \beta_1 \tau_{supg} \int_V N^o c_l^o \frac{\partial N^a}{\partial x_l} \delta \omega^a N^b \omega^b N^c \omega^c dv_e \quad (\text{A.192})$$

$$= \delta \omega^a \left[\rho \beta_1 \tau_{supg} \int_V N^o \frac{\partial N^a}{\partial x_l} N^b N^c dv_e c_l^o \right] \omega^b \omega^c \quad (\text{A.193})$$

$$= \delta \omega^a {}^a C_{\omega_{supg}}{}^{bc} \omega^b \omega^c \quad (\text{A.194})$$

$${}^a C_{\omega_{supg}}{}^{bc} = \rho \beta_1 \tau_{supg} \int_V N^o \frac{\partial N^a}{\partial x_l} N^b N^c dv_e c_l^o \quad (\text{A.195})$$

付録 B Newton-Raphson 法のための線形化

以上のマトリクスを用いて表した支配方程式は、各変数およびその時間偏導関数について非線形である。Newton-Raphson 法による反復計算のため、有限要素法離散化された支配方程式を線形化する必要がある。ここでは接線剛性マトリクスを作成することで線形化を行った。線形化による変数の増分は Δ で表した。また、渦粘性係数 μ_T の線形化は次式となる。

$$\Delta\mu_T^w = \Delta\left(\frac{k^w}{\omega^w}\right) = \frac{\Delta k^w}{\omega^w} - \frac{k^w}{(\omega^w)^2} \Delta\omega^w \quad (\text{B.1})$$

なお、ALE 法における移流速度ベクトル $\mathbf{c}$ は、前時間ステップの値を一定値として用いたため、線形化におけるその増分は 0 である。

1. RANS

・慣性項

$$\delta v_i^{mm} M_j^n \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x \rightarrow \delta v_i^{mm} M_j^n \Delta \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{B.2})$$

$$\delta v_i^{mm} M_{supg_{kj}}^{on} c_k^o \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x \rightarrow \delta v_i^{mm} M_{supg_{kj}}^{on} c_k^o \Delta \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{B.3})$$

$$\delta p^r M_{pspg_j}^n \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x \rightarrow \delta p^r M_{pspg_j}^n \Delta \frac{\partial v_j^n}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{B.4})$$

・移流項

$$\delta v_i^{mm} \Lambda_{kj}^{on} c_k^o v_j^n \rightarrow \delta v_i^{mm} \Lambda_{kj}^{on} c_k^o \Delta v_j^n \quad (\text{B.5})$$

$$\delta v_i^{mm} \Lambda_{supg_j}^n v_j^n \rightarrow \delta v_i^{mm} \Lambda_{supg_j}^n \Delta v_j^n \quad (\text{B.6})$$

$$\delta p^r \Lambda_{pspg_j}^n v_j^n \rightarrow \delta p^r \Lambda_{pspg_j}^n \Delta v_j^n \quad (\text{B.7})$$

・粘性項

$$\begin{aligned} & \delta v_i^{mm} K_{1j}^n v_j^n + \delta v_i^{mm} K_{2j}^{wn} \mu_T^w v_j^n \\ & \rightarrow \delta v_i^{mm} K_{1j}^n \Delta v_j^n + \delta v_i^{mm} K_{2j}^{wn} \mu_T^w \Delta v_j^n + \delta v_i^{mm} K_{2j}^{wn} \Delta \mu_T^w v_j^n \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

$$= \delta v_i^{mm} K_{1j}^n \Delta v_j^n + \delta v_i^{mm} K_{2j}^{wn} \mu_T^w \Delta v_j^n + \delta v_i^{mm} K_{2j}^{wn} \left(\frac{\Delta k^w}{\omega^w} - \frac{k^w}{(\omega^w)^2} \Delta\omega^w \right) v_j^n \quad (\text{B.9})$$

$$= \delta v_i^{mm} K_{1j}^n \Delta v_j^n + \delta v_i^{mm} K_{2j}^{wn} \mu_T^w \Delta v_j^n + \delta v_i^{mm} K_{2j}^{wn} \frac{v_j^n}{\omega^w} \Delta k^w - \delta v_i^{mm} K_{2j}^{wn} \frac{k^w v_j^n}{(\omega^w)^2} \Delta\omega^w \quad (\text{B.10})$$

$$\begin{aligned}
& \delta v_i^{mm} K_{supg-1j}^{wn} \mu_T^w v_j^n + \delta v_i^{mm} K_{supg-2j}^{wn} \mu_T^w v_j^n \\
& \rightarrow \delta v_i^{mm} K_{supg-1j}^{wn} \Delta \mu_T^w v_j^n + \delta v_i^{mm} K_{supg-1j}^{wn} \mu_T^w \Delta v_j^n \\
& + \delta v_i^{mm} K_{supg-2j}^{wn} \Delta \mu_T^w v_j^n + \delta v_i^{mm} K_{supg-2j}^{wn} \mu_T^w \Delta v_j^n
\end{aligned} \tag{B.11}$$

$$\begin{aligned}
& = \delta v_i^{mm} K_{supg-1j}^{wn} \frac{v_j^n}{\omega^w} \Delta k^w - \delta v_i^{mm} K_{supg-1j}^{wn} \frac{k^w v_j^n}{(\omega^w)^2} \Delta \omega^w + \delta v_i^{mm} K_{supg-1j}^{wn} \mu_T^w \Delta v_j^n \\
& + \delta v_i^{mm} K_{supg-2j}^{wn} \frac{v_j^n}{\omega^w} \Delta k^w - \delta v_i^{mm} K_{supg-2j}^{wn} \frac{k^w v_j^n}{(\omega^w)^2} \Delta \omega^w + \delta v_i^{mm} K_{supg-2j}^{wn} \mu_T^w \Delta v_j^n
\end{aligned} \tag{B.12}$$

$$\begin{aligned}
& \delta p^{rr} K_{pspg-1j}^{wn} \mu_T^w v_j^n + \delta p^{rr} K_{pspg-2j}^{wn} \mu_T^w v_j^n \\
& \rightarrow \delta p^{rr} K_{pspg-1j}^{wn} \Delta \mu_T^w v_j^n + \delta p^{rr} K_{pspg-1j}^{wn} \mu_T^w \Delta v_j^n \\
& + \delta p^{rr} K_{pspg-2j}^{wn} \Delta \mu_T^w v_j^n + \delta p^{rr} K_{pspg-2j}^{wn} \mu_T^w \Delta v_j^n
\end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned}
& = \delta p^{rr} K_{pspg-1j}^{wn} \frac{v_j^n}{\omega^w} \Delta k^w - \delta p^{rr} K_{pspg-1j}^{wn} \frac{k^w v_j^n}{(\omega^w)^2} \Delta \omega^w + \delta p^{rr} K_{pspg-1j}^{wn} \mu_T^w \Delta v_j^n \\
& + \delta p^{rr} K_{pspg-2j}^{wn} \frac{v_j^n}{\omega^w} \Delta k^w - \delta p^{rr} K_{pspg-2j}^{wn} \frac{k^w v_j^n}{(\omega^w)^2} \Delta \omega^w + \delta p^{rr} K_{pspg-2j}^{wn} \mu_T^w \Delta v_j^n
\end{aligned} \tag{B.14}$$

• 压力勾配項

$$\delta v_i^{mm} B_1^s p^s + \delta v_i^{mm} B_2^p k^p \rightarrow \delta v_i^{mm} B_1^s \Delta p^s + \delta v_i^{mm} B_2^p \Delta k^p \tag{B.15}$$

$$\delta v_i^{mm} G_{supg-1j}^r p^r + \delta v_i^{mm} G_{supg-2j}^p k^p \rightarrow \delta v_i^{mm} G_{supg-1j}^r \Delta p^r + \delta v_i^{mm} G_{supg-2j}^p \Delta k^p \tag{B.16}$$

$$\delta p^{rr} B_{pspg-1j}^s p^s + \delta p^{rr} B_{pspg-2j}^p k^p \rightarrow \delta p^{rr} B_{pspg-1j}^s \Delta p^s + \delta p^{rr} B_{pspg-2j}^p \Delta k^p \tag{B.17}$$

• 非圧縮条件項

$$\delta p^{rr} B_{1j}^{Tn} v_j^n \rightarrow \delta p^{rr} B_{1j}^{Tn} \Delta v_j^n \tag{B.18}$$

2. k輸送方程式

• 時間変化項

$$\delta k^q {}^q T_k^p \frac{\partial k^p}{\partial t} \Big|_x \rightarrow \delta k^q {}^q T_k^p \Delta \frac{\partial k^p}{\partial t} \Big|_x \tag{B.19}$$

$$\delta k^q {}^q T_{k_supg}^p \frac{\partial k^p}{\partial t} \Big|_x \rightarrow \delta k^q {}^q T_{k_supg}^p \Delta \frac{\partial k^p}{\partial t} \Big|_x \tag{B.20}$$

• 移流項

$$\delta k^q A_{k_1}^p k^p \rightarrow \delta k^q A_{k_1}^p \Delta k^p \quad (\text{B.21})$$

$$\delta k^q A_{k_{supg_1}}^p k^p \rightarrow \delta k^q A_{k_{supg_1}}^p \Delta k^p \quad (\text{B.22})$$

• 乱流拡散項

$$\delta k^q D_{k_1}^p k^p + \delta k^q D_{k_2}^{wp} \mu_T^w k^p \rightarrow \delta k^q D_{k_1}^p \Delta k^p + \delta k^q D_{k_2}^{wp} \Delta \mu_T^w k^p + \delta k^q D_{k_2}^{wp} \mu_T^w \Delta k^p \quad (\text{B.23})$$

$$\begin{aligned} &= \delta k^q D_{k_1}^p \Delta k^p + \delta k^q D_{k_2}^{wp} \frac{k^p}{\omega^w} \Delta k^w - \delta k^q D_{k_2}^{wp} \frac{k^w k^p}{(\omega^w)^2} \Delta \omega^w \\ &\quad + \delta k^q D_{k_2}^{wp} \mu_T^w \Delta k^p \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

$$\begin{aligned} &\delta k^q D_{k_{supg_1}}^p k^p + \delta k^q D_{k_{supg_3}}^{wp} \mu_T^w k^p \rightarrow \delta k^q D_{k_{supg_1}}^p \Delta k^p \\ &+ \delta k^q D_{k_{supg_3}}^{wp} \frac{k^p}{\omega^w} \Delta k^w - \delta k^q D_{k_{supg_3}}^{wp} \frac{k^w k^p}{(\omega^w)^2} \Delta \omega^w + \delta k^q D_{k_{supg_3}}^{wp} \mu_T^w \Delta k^p \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

• 生成項

$$\begin{aligned} &\delta k^q E_{k_{ij}}^{wn'n} \mu_T^w v_i^{n'} v_j^n \\ &\rightarrow \delta k^q E_{k_{ij}}^{wn'n} \Delta \mu_T^w v_i^{n'} v_j^n + \delta k^q E_{k_{ij}}^{wn'n} \mu_T^w \Delta v_i^{n'} v_j^n + \delta k^q E_{k_{ij}}^{wn'n} \mu_T^w v_i^{n'} \Delta v_j^n \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

$$\begin{aligned} &= \delta k^q E_{k_{ij}}^{wn'n} \frac{v_i^{n'} v_j^n}{\omega^w} \Delta k^w - \delta k^q E_{k_{ij}}^{wn'n} \frac{k^w v_i^{n'} v_j^n}{(\omega^w)^2} \Delta \omega^w \\ &+ \delta k^q E_{k_{ij}}^{wn'n} \mu_T^w \Delta v_i^{n'} v_j^n + \delta k^q E_{k_{ij}}^{wn'n} \mu_T^w v_i^{n'} \Delta v_j^n \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\begin{aligned} &\delta k^q E_{k_{supg_{ij}}}^{wn'n} \mu_T^w v_i^{n'} v_j^n \\ &\rightarrow \delta k^q E_{k_{supg_{ij}}}^{wn'n} \Delta \mu_T^w v_i^{n'} v_j^n + \delta k^q E_{k_{supg_{ij}}}^{wn'n} \mu_T^w \Delta v_i^{n'} v_j^n \\ &\quad + \delta k^q E_{k_{supg_{ij}}}^{wn'n} \mu_T^w v_i^{n'} \Delta v_j^n \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

$$\begin{aligned} &= \delta k^q E_{k_{supg_{ij}}}^{wn'n} \frac{v_i^{n'} v_j^n}{\omega^w} \Delta k^w - \delta k^q E_{k_{supg_{ij}}}^{wn'n} \frac{k^w v_i^{n'} v_j^n}{(\omega^w)^2} \Delta \omega^w \\ &+ \delta k^q E_{k_{supg_{ij}}}^{wn'n} \mu_T^w \Delta v_i^{n'} v_j^n + \delta k^q E_{k_{supg_{ij}}}^{wn'n} \mu_T^w v_i^{n'} \Delta v_j^n \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

• 消費項

$$\delta k^q C_k^{pb} k^p \omega^b \rightarrow \delta k^q C_k^{pb} \Delta k^p \omega^b + \delta k^q C_k^{pb} k^p \Delta \omega^b \quad (\text{B.30})$$

$$\delta k^q C_{k_{supg}}^{pb} k^p \omega^b \rightarrow \delta k^q C_{k_{supg}}^{pb} \Delta k^p \omega^b + \delta k^q C_{k_{supg}}^{pb} k^p \Delta \omega^b \quad (\text{B.31})$$

3. ω 輸送方程式

・時間変化項

$$\delta\omega^a{}^a T_{\omega}{}^b \frac{\partial\omega^b}{\partial t} \Big|_x \rightarrow \delta\omega^a{}^a T_{\omega}{}^b \Delta \frac{\partial\omega^b}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{B.32})$$

$$\delta\omega^a{}^a T_{\omega_{supg}}{}^b \frac{\partial\omega^b}{\partial t} \Big|_x \rightarrow \delta\omega^a{}^a T_{\omega_{supg}}{}^b \Delta \frac{\partial\omega^b}{\partial t} \Big|_x \quad (\text{B.33})$$

・移流項

$$\delta\omega^a{}^a A_{\omega 1}{}^b \omega^b \rightarrow \delta\omega^a{}^a A_{\omega 1}{}^b \Delta\omega^b \quad (\text{B.34})$$

$$\delta\omega^a{}^a A_{\omega_{supg}}{}^b \omega^b \rightarrow \delta\omega^a{}^a A_{\omega_{supg}}{}^b \Delta\omega^b \quad (\text{B.35})$$

・乱流拡散項

$$\delta\omega^a{}^a D_{\omega_{-1}}{}^b \omega^b + \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{-2}}{}^{wb} \mu_T^w \omega^b \quad (\text{B.36})$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{-1}}{}^b \Delta\omega^b + \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{-2}}{}^{wb} \Delta\mu_T^w \omega^b + \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{-2}}{}^{wb} \mu_T^w \Delta\omega^b \\ &= \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{-1}}{}^b \Delta\omega^b + \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{-2}}{}^{wb} \frac{\omega^b}{\omega^w} \Delta k^w - \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{-2}}{}^{wb} \frac{k^w \omega^b}{(\omega^w)^2} \Delta\omega^w \\ &\quad + \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{-2}}{}^{wb} \mu_T^w \Delta\omega^b \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

$$\begin{aligned} &\delta\omega^a{}^a D_{\omega_{supg_{-1}}}{}^b \omega^b + \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{supg_{-3}}}{}^{wb} \mu_T^w \omega^b \\ &\rightarrow \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{supg_{-1}}}{}^b \Delta\omega^b \\ &+ \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{supg_{-3}}}{}^{wb} \frac{\omega^b}{\omega^w} \Delta k^w - \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{supg_{-3}}}{}^{wb} \frac{k^w \omega^b}{(\omega^w)^2} \Delta\omega^w \\ &\quad + \delta\omega^a{}^a D_{\omega_{supg_{-3}}}{}^{wb} \mu_T^w \Delta\omega^b \end{aligned} \quad (\text{B.38})$$

・生成項

$$\delta\omega^a{}^a E_{\omega_{ij}}{}^{n'n} v_i^{n'} v_j^n \rightarrow \delta\omega^a{}^a E_{\omega_{ij}}{}^{n'n} \Delta v_i^{n'} v_j^n + \delta\omega^a{}^a E_{\omega_{ij}}{}^{n'n} v_i^{n'} \Delta v_j^n \quad (\text{B.39})$$

$$\delta\omega^a{}^a E_{\omega_{supg_{ij}}}{}^{n'n} v_i^{n'} v_j^n \rightarrow \delta\omega^a{}^a E_{\omega_{supg_{ij}}}{}^{n'n} \Delta v_i^{n'} v_j^n + \delta\omega^a{}^a E_{\omega_{supg_{ij}}}{}^{n'n} v_i^{n'} \Delta v_j^n \quad (\text{B.40})$$

・消費項

$$\delta\omega^a{}^a C_{\omega}{}^{bc} \omega^b \omega^c \rightarrow \delta\omega^a{}^a C_{\omega}{}^{bc} \Delta\omega^b \omega^c + \delta\omega^a{}^a C_{\omega}{}^{bc} \omega^b \Delta\omega^c \quad (\text{B.41})$$

$$\delta\omega^a{}^a C_{\omega_{supg}}{}^{bc} \omega^b \omega^c \rightarrow \delta\omega^a{}^a C_{\omega_{supg}}{}^{bc} \Delta\omega^b \omega^c + \delta\omega^a{}^a C_{\omega_{supg}}{}^{bc} \omega^b \Delta\omega^c \quad (\text{B.42})$$

付録 C 四面体一次要素の補間関数を含む積分

付録 A, B の式の中に現れる, 補間関数を含む積分の詳細を記す. ただし, 本小節の内容は参考文献[18]の内容から式(C.1)-(C.4)を抜粋した上で, 式(C.5)-(C.8)の計算を行ったものである.

まず, 要素節点 i, j, m, p をもつ四面体要素を考える. 四面体座標系 ξ, η, ζ を次のように定める.

$$\begin{aligned} \text{節点 } i & \quad \xi = 0, \eta = 0, \zeta = 1 \\ \text{節点 } j & \quad \xi = 1, \eta = 0, \zeta = 1 \\ \text{節点 } m & \quad \xi = 1, \eta = 1, \zeta = 1 \\ \text{節点 } p & \quad \zeta = 0 \end{aligned}$$

このとき, 直交座標系 xyz と四面体座標系 $\xi\eta\zeta$ の関係は次式となる.

$$\begin{cases} x = x_p - \zeta(x_p - x_i) + \xi\zeta(x_j - x_i) - \xi\eta\zeta(x_j - x_m) \\ y = y_p - \zeta(y_p - y_i) + \xi\zeta(y_j - y_i) - \xi\eta\zeta(y_j - y_m) \\ z = (1 - \zeta)z_p \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

したがって, 補間関数 N は次のようになる.

$$N = [N_i \ N_j \ N_m \ N_p] \quad (\text{C.2})$$

$$= [(1 - \xi)\zeta \ \xi(1 - \eta)\zeta \ \xi\eta\zeta \ (1 - \zeta)] \quad (\text{C.3})$$

また, ヤコビ行列式は以下の通りである.

$$\det[J(x, y, z)] = \begin{vmatrix} \partial x / \partial \xi & \partial x / \partial \eta & \partial x / \partial \zeta \\ \partial y / \partial \xi & \partial y / \partial \eta & \partial y / \partial \zeta \\ \partial z / \partial \xi & \partial z / \partial \eta & \partial z / \partial \zeta \end{vmatrix} = 6V\xi\zeta^2 \quad (\text{C.4})$$

これらの準備のもとで, 有限要素法離散化された式において現れる四面体一次要素補間関数を含む積分を計算すると, 次のようになる.

○質量マトリクスなど

$$\int_V N^m N^n dv_e = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 N^m N^n \det[J(x, y, z)] d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{C.5})$$

$$= \begin{cases} \frac{V}{10} & (m = n) \\ \frac{V}{20} & (m \neq n) \end{cases} \quad (\text{C.6})$$

○ k - ω モデルの消費項

$$\int_V N^q N^p N^b dv_e = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 N^q N^p N^b \det[J(x, y, z)] d\xi d\eta d\zeta \quad (\text{C.7})$$

$$= \begin{cases} \frac{V}{20} & (q = p = b) \\ \frac{V}{60} & (q = p \neq b \text{ または } q \neq p = b \text{ または } q = b \neq p) \\ \frac{V}{120} & (q \neq p \text{ かつ } p \neq b \text{ かつ } b \neq q) \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

参考文献

- [1] J.-H. Choi *et al.*, “Diagnostic performance of intracoronary gradient-based methods by coronary computed tomography angiography for the evaluation of physiologically significant coronary artery stenoses: a validation study with fractional flow reserve,” *Eur. Heart J. Cardiovasc. Imaging*, vol. 13, no. 12, pp. 1001–7, 2012.
- [2] S. A. and D. Giddens., “Velocity measurement in steady flow through axisymmetric stenoses at moderate Reynolds number,” *J. Biomech.*, vol. 16, pp. 505–16, 1983.
- [3] S. A. Ahmed and D. P. Giddens, “Flow disturbance measurements through a constricted tube at moderate Reynolds numbers,” *J. Biomech.*, vol. 16, no. 12, pp. 955–963, 1983.
- [4] S. A. Ahmed and D. P. Giddens, “Pulsatile poststenotic flow studies with laser Doppler anemometry,” *J. Biomech.*, vol. 17, no. 9, pp. 695–705, 1984.
- [5] F. Ghalichi, X. Deng, A. De Champlain, Y. Douville, M. King, and R. Guidoin, “Low Reynolds number turbulence modeling of blood flow in arterial stenoses,” *Biorheology*, vol. 35, no. 4–5, pp. 281–294, 1998.
- [6] J. Banks and N. W. Bressloff, “Turbulence Modeling in Three-Dimensional Stenosed Arterial Bifurcations,” *J. Biomech. Eng.*, vol. 129, no. 1, pp. 40–50, 2006.
- [7] F. P. P. Tan *et al.*, “Analysis of flow disturbance in a stenosed carotid artery bifurcation using two-equation transitional and turbulence models,” *J. Biomech. Eng.*, vol. 130, no. 6, p. 61008, 2008.
- [8] K. M. Khanafer, J. L. Bull, and R. Berguer, “Fluid-structure interaction of turbulent pulsatile flow within a flexible wall axisymmetric aortic aneurysm model,” *Eur. J. Mech. B/Fluids*, vol. 28, no. 1, pp. 88–102, 2009.
- [9] M. Jahangiri, M. Saghafian, and M. R. Sadeghi, “Numerical study of turbulent pulsatile blood flow through stenosed artery using fluid-solid interaction,” *Comput. Math. Methods Med.*, vol. 2015, 2015.
- [10] 片山進, “流体構造連成有限要素法による大動脈弁の機能に及ぼす弁葉形状の影響解析,” 東京大学, 2009.
- [11] 日本計算工学会流れの有限要素法研究委員会編, 続・有限要素法による流れのシミュレーション. シュプリンガー・ジャパン, 2008.
- [12] H.K.Versteeg, W.Malalasekera原著, 松下洋介, 斉藤康洋, 青木秀之, 三浦隆利共訳, 数値流体力学【第2版】. 森北出版, 2011.
- [13] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray, and R. Shih, “Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure

- elements,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 95, no. 2, pp. 221–242, 1992.
- [14] P. M. Gresho and R. L. Sani, *Incompressible Flow & the Finite Element Method - Advection-Diffusion & Isothermal Laminar Flow*. 1998.
- [15] 化学大辞典編集委員会編, 化学大辞典 第3巻. 共立出版, 1964.
- [16] 浅見高, プラスチック材料講座12 アクリル樹脂. 日刊工業新聞社, 1970.
- [17] F. Menter and T. Esch, “16th BRAZILIAN CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING ELEMENTS OF INDUSTRIAL HEAT TRANSFER PREDICTIONS,” 2000.
- [18] 鷺津久一郎, 宮本博, 山田嘉昭, 山本善之, 川井忠彦共編, 有限要素法ハンドブック II 応用編. 培風館, 1983.

以上

平成 29 年 1 月 26 日 提出
指導教員 酒井信介
150211 鈴木一真