弾塑性有限要素法プログラミングまとめ

機械工学専攻　泉聡志

1.　速度型弾塑性構成式

$$\dot{\sigma}_{ij} = C^e_{ijkl}\left(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}^p_{kl}\right)$$

2.　降伏関数

$$F = \bar{\sigma} - \sigma_Y$$

※Mises 相当応力

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\left(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}\right)\delta_{ij}$$

3.　流れ則（塑性ひずみと応力の関係付け）と関連流れ則（associated flow rule）

※流れ則

応力で微分することにより、塑性ひずみ速度乗数 $\dot{\lambda}$ を係数として塑性ひずみ速度を導くような塑性ポテンシャル Ψ の存在を仮定すること

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \dot{\lambda}\frac{\partial \Psi}{\partial \sigma_{ij}}$$

※関連流れ則（associated flow rule）

塑性ポテンシャル＝降伏条件の関数と仮定すること

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij} = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

4.　法線則

関連流れ則に応力速度をかけると、塑性ひずみ速度と応力速度の直交する条件が導かれる。

$$\dot{\varepsilon}^p_{ij}\dot{\sigma}_{ij} = \dot{\lambda}\dot{F} = 0$$

5.　弾塑性の構成則テンソル

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(C^e_{ijkl} - \frac{C^e_{ijcd}\sigma'_{cd}\sigma'_{ab}C^e_{abkl}}{\sigma'_{ab}C^e_{abcd}\sigma'_{cd}}\right)\dot{\varepsilon}_{kl}$$

等方性の場合(弾完全塑性体)

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(C^e_{ijkl} - \frac{3G\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2}\right)\dot{\varepsilon}_{kl}$$

$$C^e = \frac{2G}{1-2\nu}\begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & SYM. & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$C^p = \frac{3G}{\bar{\sigma}^2}\begin{bmatrix} \sigma'_{11}\sigma'_{11} & \sigma'_{11}\sigma'_{22} & \sigma'_{11}\sigma'_{33} & \sigma'_{11}\sigma_{12} & \sigma'_{11}\sigma_{23} & \sigma'_{11}\sigma_{31} \\ & \sigma'_{22}\sigma'_{22} & \sigma'_{22}\sigma'_{33} & \sigma'_{22}\sigma_{12} & \sigma'_{22}\sigma_{23} & \sigma'_{22}\sigma_{31} \\ & & \sigma'_{33}\sigma'_{33} & \sigma'_{33}\sigma_{12} & \sigma'_{33}\sigma_{23} & \sigma'_{33}\sigma_{31} \\ & & & \sigma_{12}\sigma_{12} & \sigma_{12}\sigma_{23} & \sigma_{12}\sigma_{31} \\ & SYM. & & & \sigma_{23}\sigma_{23} & \sigma_{23}\sigma_{31} \\ & & & & & \sigma_{31}\sigma_{31} \end{bmatrix}$$

ただし、G=E/2(1+ ν)

$$\bar{\sigma} = \left(\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})\delta_{ij}$$

また、この式は平面応力場近似の場合は成立しない。

6. 弾塑性解析の精度について

- 弾塑性解析は弾性解析と違ってモデル化自体に大きな近似が入る（たとえば、二直線近似、Mises 相当応力を用いる妥当性など)。よって、数値計算時の細かな誤差はあまり問題にされない。
- 弾塑性解析で最大応力値や降伏した領域を論じるのは意味がない。全体の変形の変化や、塑性していない場所への影響などを論じることが多い。※例外あり