1 変形テンソル

$\odot$: 客観性を有するテンソル 、$T^* = Q(t)\cdot T\cdot Q(t)^T$
$\circ$: 客観性を有しないテンソル
$\ominus$: 観測不変量

$\circ$ $F = \frac{dx}{dX} = x\otimes\nabla_X = I + u\otimes\nabla_X$: 変形勾配テンソル

$\ominus$ $U = R^T F (F = RU)$: 右ストレッチテンソル (正値対称)

$\ominus$ $C = F^T F$: 右コーシーグリーン変形テンソル 、$C = U^2$

$\odot$ $V = FR^T (F = VR)$: 左ストレッチテンソル (正値対称)

$\odot$ $B = FF^T$: 左コーシーグリーン変形テンソル $(B = RCR^T)$、$B = V^2$

$\circ$ $R = FU^{-1}$: 剛体回転テンソル (直交テンソル)

? $J = \mathrm{det}F$, $\dot{J}/J = \mathrm{tr}L = \mathrm{div}v$, $\dot{J}_t(t) = \mathrm{tr}L$

補足 $u\otimes\nabla_X = \frac{\partial U_I}{\partial X_J} e_I \otimes e_J = Z$

2 ひずみ

$\ominus$ $E = \frac{1}{2}(C - I)$: グリーンひずみ、$E = F^T AF$

$\odot$ $A = \frac{1}{2}(I - B^{-1})$: Almansi ひずみ

$\circ$ $Z = u\otimes\nabla_X$: 変位勾配テンソル、$F = I + Z$

? $A_{(L)} = \frac{1}{2}\{u\otimes\nabla_x + (u\otimes\nabla_x)^T\}$

? $E_{(L)} = \frac{1}{2}\{u\otimes\nabla_X + (u\otimes\nabla_X)^T\}$

$\ominus$ $E = \frac{1}{2}\{u\otimes\nabla_X + (u\otimes\nabla_X)^T + (u\otimes\nabla_X)^T\cdot(u\otimes\nabla_X)\}$

$\odot$ $A = \frac{1}{2}\{u\otimes\nabla_x + (u\otimes\nabla_x)^T + (u\otimes\nabla_x)^T\cdot(u\otimes\nabla_x)\}$

3 変形速度

$\circ$ $L = v\otimes\nabla_x$: 速度勾配テンソル $(dv = Ldx, LF = \dot{F})$、$L = D + W$

$\odot$ $D = (L)_s$: 変形速度テンソル (ストレッチングテンソル)

$\circ$ $W = (L)_a$: スピンテンソル (回転速度テンソル)

$\odot$ $H_{(n)} = \frac{\partial^n C_t(\tau)}{\partial\tau^n}$: n 次 Rivlin-Ericksen テンソル

$\circ$ $\Omega = \dot{R}R^T$: 剛体スピン

4 客観性を満足するひずみ速度

$\odot$ $A^\circ_{(c)} = \dot{A} + L^T A + AL = D$: Cotter-Rivlin 速度

$\odot$ $A^\circ_{(J)} = \dot{A} - WA + AW = D - DA - AD$: Jaumann 速度

5 応力

$\odot$ $\hat{T} = JT$: キルヒホフ応力、$J = \mathrm{det}F$、T : コーシー応力

$\circ$ $\Pi = F^{-1}JT$: 第 1 キルヒホフ応力

$\ominus$ $S = F^{-1}JTF^{-T}$: 第 2 キルヒホフ応力、$\Pi = SF^T$

$\ominus$ $\Sigma = (\Pi R)_s = \frac{1}{2}(\Pi R + R^T\Pi^T)$: Biot 応力

6 速度の定義

$\circ$ $\dot{F} = \dot{F}_0(t)$、$\dot{F}_t(t) = L$

$\circ$ $\dot{T}(t) = \frac{\partial T(\tau)}{\partial\tau}|_{\tau\to t}$: T は現位置で定義される

$\circ$ $L = \dot{V}_t(t) + \dot{R}_t(t) = \dot{F}_t(t)$

$\odot$ $D = \dot{U}_t(t) = \dot{V}_t(t) = \dot{E}_t(t)$

$\circ$ $W = \dot{R}_t(t)$, $\dot{R}_t(t)^T = -\dot{R}_t(t)$

7 応力速度の定義

$\odot$ $T^\circ_{(J)} = \dot{T} - WT + TW$: Jaumann 速度

$\odot$ $T^\circ_{(o)} = \dot{T} - LT - TL$: Oldroyd 速度

$\odot$ $T^\circ_{(c)} = \dot{T} + L^T T + TL$: Cotter-Rivlin 速度

$\odot$ $T^\circ_{(G)} = \dot{T} + \Omega T + T\Omega$ $(\Omega = \dot{R}R^T)$: Green-Naghdi 速度

$\odot$ $\hat{T}^\circ_t(t)_{(o)} = T^\circ_{(o)} + T\mathrm{tr}D$: 相対 Kirchhoff 応力 Oldroyd 速度

$\odot$ $\dot{S}_t(t) = \hat{T}^\circ_t(t)_{(o)}$: Truesdell の応力速度

$\odot$ $\dot{S}_t(t) = \hat{T}^\circ_t(t)_{(J)} - DT - TD = \frac{1}{J}F\dot{S}F^T$

8 エネルギ

- $T : Ddv = \Pi^T : \dot{F}dV = JT : DdV$

9 演算子

- $\mathrm{tr}(X\cdot Y^T) = X : Y = X_{ij}Y_{ij}$
- $\mathrm{tr}(a\otimes b) = a\cdot b$
- $\mathrm{tr}(X\cdot Y) = \mathrm{tr}(Y\cdot X)$
- $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_j} e_j$
- $\mathrm{grad}b = b\otimes\nabla = \nabla\otimes b = \frac{\partial b_i}{\partial x_j} e_i\otimes e_j$
- $\mathrm{div}b = b\cdot\nabla = \frac{\partial b_i}{\partial x_i}$
- $\mathrm{rot}b = b\times\nabla = \frac{\partial b_i}{\partial x_j} e_{ijk} e_k$
- $\int_V \mathrm{div}b dV = \int_S n\cdot b dS$: 発散定理(*divergence theorem*)
- $n\cdot ds = (\mathrm{det}F)F^{-T}\cdot N\ dS$: Nanson の公式

$$
\begin{aligned}
\Pi_t(\tau) &= S_t(\tau)F_t^T(\tau) \\
\dot{\Pi}_t(\tau) &= \dot{S}_t(\tau)F_t^T(\tau) + S_t(\tau)\dot{F}_t^T(\tau) \\
(\tau \to t) &= \dot{S}_t(t) + S_t(t)\dot{F}_t^T(t) \\
&= \dot{S}_t(t) + TL^T \\
&= T^{\circ}_{(o)} + T\mathrm{tr}D + TL^T \\
&= \dot{T} - LT + T\mathrm{tr}D
\end{aligned} \tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{T} &= -\dot{J}\frac{1}{J^2}F\Pi + \frac{1}{J}\dot{F}\Pi + \frac{1}{J}F\dot{\Pi} \\
(\tau \to t) &= -\mathrm{tr}L\Pi_t(t) + L\Pi_t(t) + \dot{\Pi}_t(t) \\
&= -T\mathrm{tr}L + LT + \dot{\Pi}_t(t) \\
&= -T\mathrm{tr}D + LT + \dot{\Pi}_t(t)
\end{aligned} \tag{2}
$$

total lagrange 法

$$\int_V {}^{t'}_0 S : \delta\, {}^{t'}_0 E dV = \int_{S_t} {}^{t'}_0 t^* \cdot \delta u dS + \int_V \rho_0\, {}^{t'} g^* \cdot \delta u dV = {}^{t'}\delta R \tag{3}$$

$${}^{t'}_0 t^* = \frac{df_n}{dS} = \Pi^T N \quad :(\text{公称表面力ベクトル}) \tag{4}$$

現位置での面素に作用する力 df_n を基準配置に平行移動して作用させたときの応力ベクトル

$${}^{t'} t^* = T^T n = \frac{1}{J}\Pi^T F^T n \quad :(\text{表面力ベクトル}) \tag{5}$$

よって、$\frac{1}{J}F^T n = N\frac{dS}{ds}$ より、

$${}^{t'} t^* = {}^{t'}_0 t^* \frac{dS}{ds} \tag{6}$$

$${}^{t'} u = {}^{t} u + u \text{とする。}\ (u : \text{変位増分}) \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{t'}_0 E &= {}^{t}_0 E + {}_0 E_L + {}_0 E_{NL} (\text{ひずみの増分}) && (8) \\
\delta\, {}^{t'}_0 E &= \delta\, {}_0 E_L + \delta\, {}_0 E_{NL} \ : {}^{t}_0 E \text{は既知(増分の変分)} && (9) \\
{}^{t'}_0 S &= {}^{t}_0 S + {}_0 S \quad (\text{応力の増分}) && (10)
\end{aligned}
$$

$$\int_V {}_0 S : (\delta\, {}_0 E_L + \delta\, {}_0 E_{NL}) dV + \int_V {}^{t}_0 S : \delta\, {}_0 E_{NL} dV = {}^{t'}\delta R - \int_V {}^{t}_0 S : \delta\, {}_0 E_L dV \tag{11}$$

(12)

$\Delta t \to 0,\ {}_0 S : \delta\, {}_0 E_{NL} \to 0$

$$\int_V {}^{t}_0 \dot{S} : \delta\, {}_0 E_L dV + \int_V {}^{t}_0 S : (\delta\, {}_0 \dot{E}_{NL}) dV = {}^{t}\delta R - \int_V {}^{t}_0 S : \delta\, {}_0 E_L dV \tag{13}$$

(14)

ここで、$\delta u = \delta\, {}^{t} u$ とすると、
$\delta\, {}_0 E_L = \delta {}^{t}_0 E, (\delta\, {}_0 \dot{E}_{NL}) = (\delta \dot{{}^{t}_0 E})$

$$\int_V {}^{t}_0 \dot{S} : \delta {}^{t}_0 E dV + \int_V {}^{t}_0 S : (\delta \dot{{}^{t}_0 E}) dV = {}^{t}\delta R - \int_V {}^{t}_0 S : \delta {}^{t}_0 E dV \tag{15}$$

$$
\begin{aligned}
{}^{t}_0 \dot{S} &= {}^{t}_0 C : {}^{t}_0 \dot{E} && (16) \\
\int_V {}^{t}_0 C : {}^{t}_0 \dot{E} dV &= \delta {}^{t}_0 E dV + \int_V {}^{t}_0 S : (\delta \dot{{}^{t}_0 E}) dV && (17) \\
&= \delta U^T ({}^{t}_0 K_L + {}^{t}_0 K_{NL}) \dot{U} && (18)
\end{aligned}
$$

$\delta E = B_L \delta U, \dot{E} = B_L \dot{U}$
$(\delta \dot{{}^{t}_0 E}) = \frac{1}{2}\{ \left(\frac{\partial \delta u}{\partial X}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial\ {}^{t}\dot{u}}{\partial X}\right) + \left(\frac{\partial\ {}^{t}\dot{u}}{\partial X}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial \delta u}{\partial X}\right) \}$

$\frac{\partial\ {}^{t}\dot{u}}{\partial X} = B_{NL}\dot{U},\ \frac{\partial \delta u}{\partial X} = B_{NL}\delta U$

$${}^{t'}\delta R - \int_V {}^{t}_0 : \delta {}^{t}_0 E\, dV = \delta U^T {}^{t'}_0 F - \delta U^T {}^{t}_0 Q \quad :(\text{外力ベクトル}-\text{内力ベクトル}) \tag{19}$$

参考)

$$\int_V \dot{S} : \delta E dV + \int_V S : (\delta \dot{E}) dV = \int_{\dot{S}_t} t \delta u dS + \int_V \rho_0 \dot{g} \delta u dV \quad (6-54-b) \tag{20}$$

$t_0 \to t$ で左辺

$$\int_V \dot{S}_t(t) : \delta E_t(t) dV + \int_V T : (\delta \dot{E_t}(t)) dV \tag{21}$$

$D = \frac{1}{2}(L + L^T),\ \delta E_t(t) = \delta A_L$(微小ひずみ)