

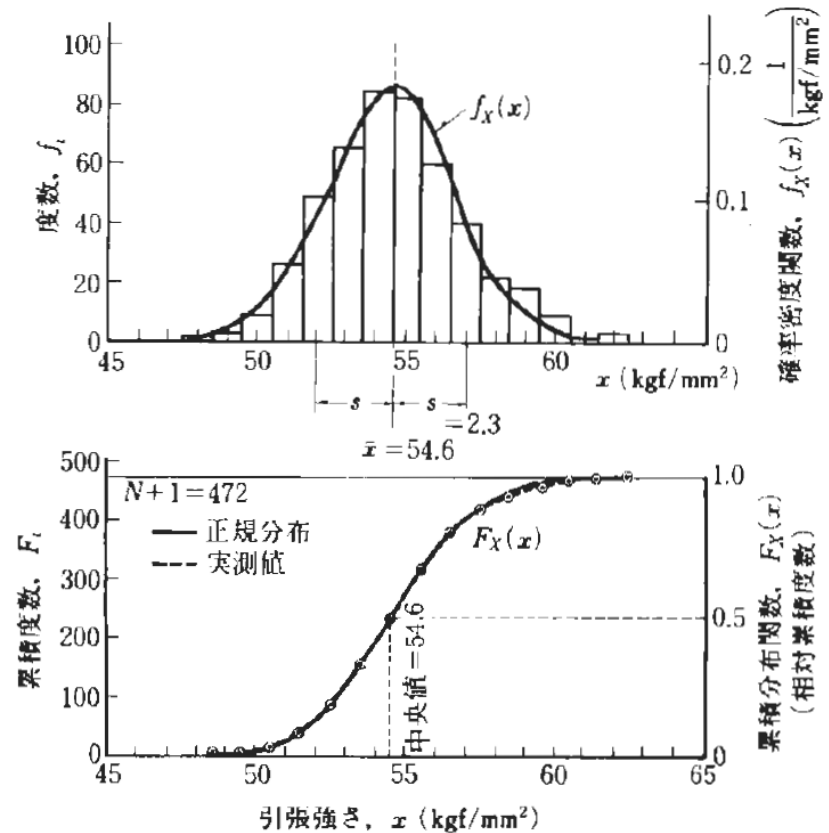
# 確率紙の考え方

酒井信介

# 母集団の推定

確率変数のサンプル値  $x_1, x_2, \dots, x_n$  が、ある分布 (例えば正規分布) に従っているかどうかを調べたい。

PDFやCDFと直接比較しても、適合性は直ちには判定できず、また母数の決定も簡単ではない

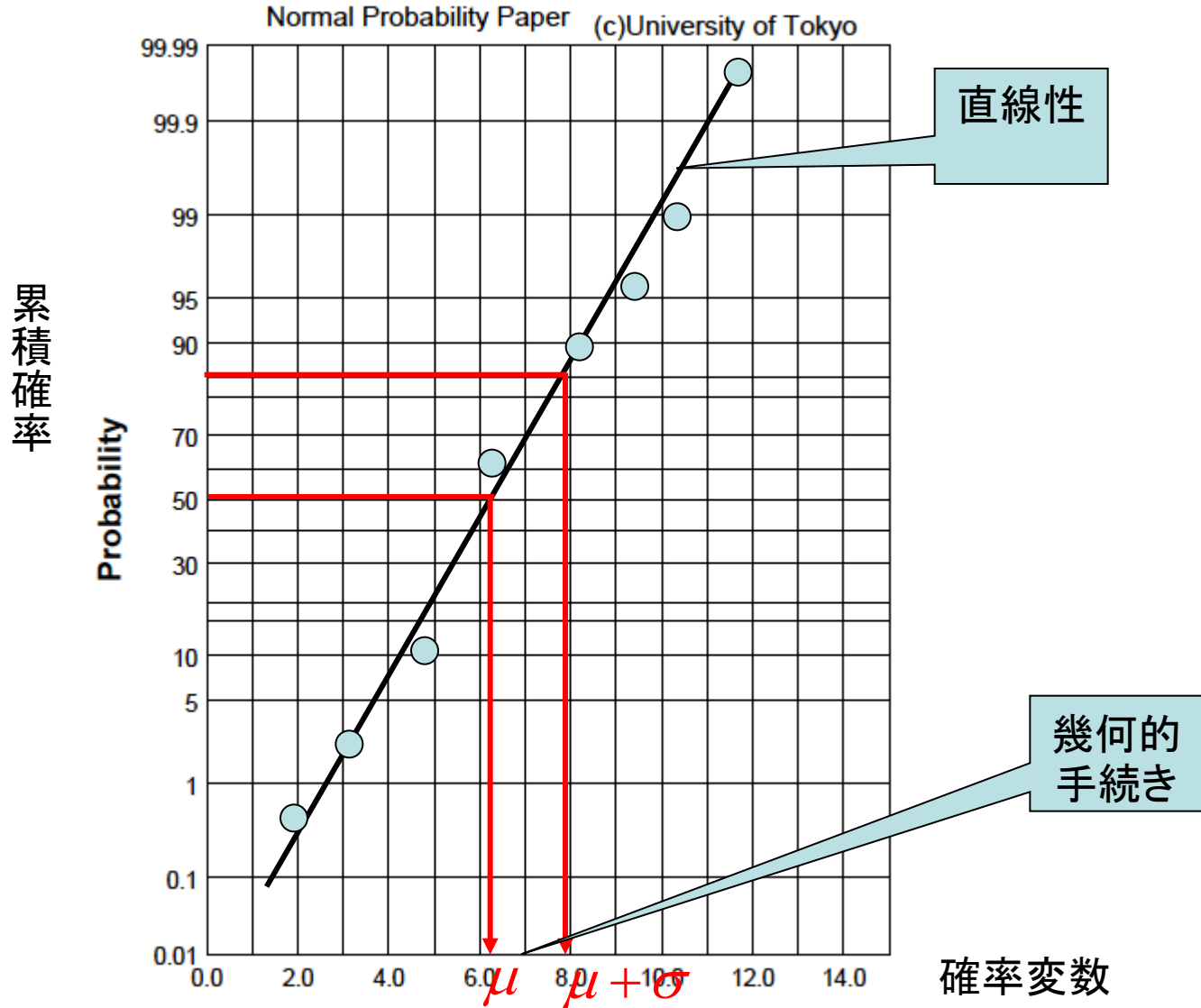


確率紙 (Probability paper) 確率紙システム

# 確率紙とは何か

- グラフ上で $(x_i, F_i)$ をある特定の確率紙上にプロットしたときに、直線性の成立をもってその分布への適合性を判断する
- 幾何的手続きで、母数の評価を可能とする

# 正規確率紙の例



# 手順

- 累積確率 $F(x)$ 、確率変数 $x$ に対して式を変形し $G(F)=aH(x)+b$ となるよう誘導する
- 縦軸に $G(F)$ 目盛りを、横軸に $H(x)$ 目盛りを付けたものが、この分布形状に対する確率紙となる
- この分布形に適合する場合 $(x_i, F_i)$ をプロットしたものは、直線に適合する

# 例:正規分布の場合

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left(-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \Phi(u)$$

変形すると

$$u = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

$$u = \Phi^{-1}(F)$$

つまり

$$\boxed{\Phi^{-1}(F)} = \frac{x - \mu_x}{\sigma_x}$$

縦軸:正規確率目盛り

横軸:線形目盛り  
確率システム

# 例:ワイブル分布

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right]$$

$\alpha$ :形状母数,  $\beta$ :尺度母数

第3種極小値分布, 故障関数  
Weakest link model

確率紙の考え方

$$1 - F = \exp\left[-\left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha\right]$$

縦軸:確率目盛り 横軸:対数目盛り

$$\log \log \frac{1}{1 - F} = \alpha(\log t - \log \beta)$$

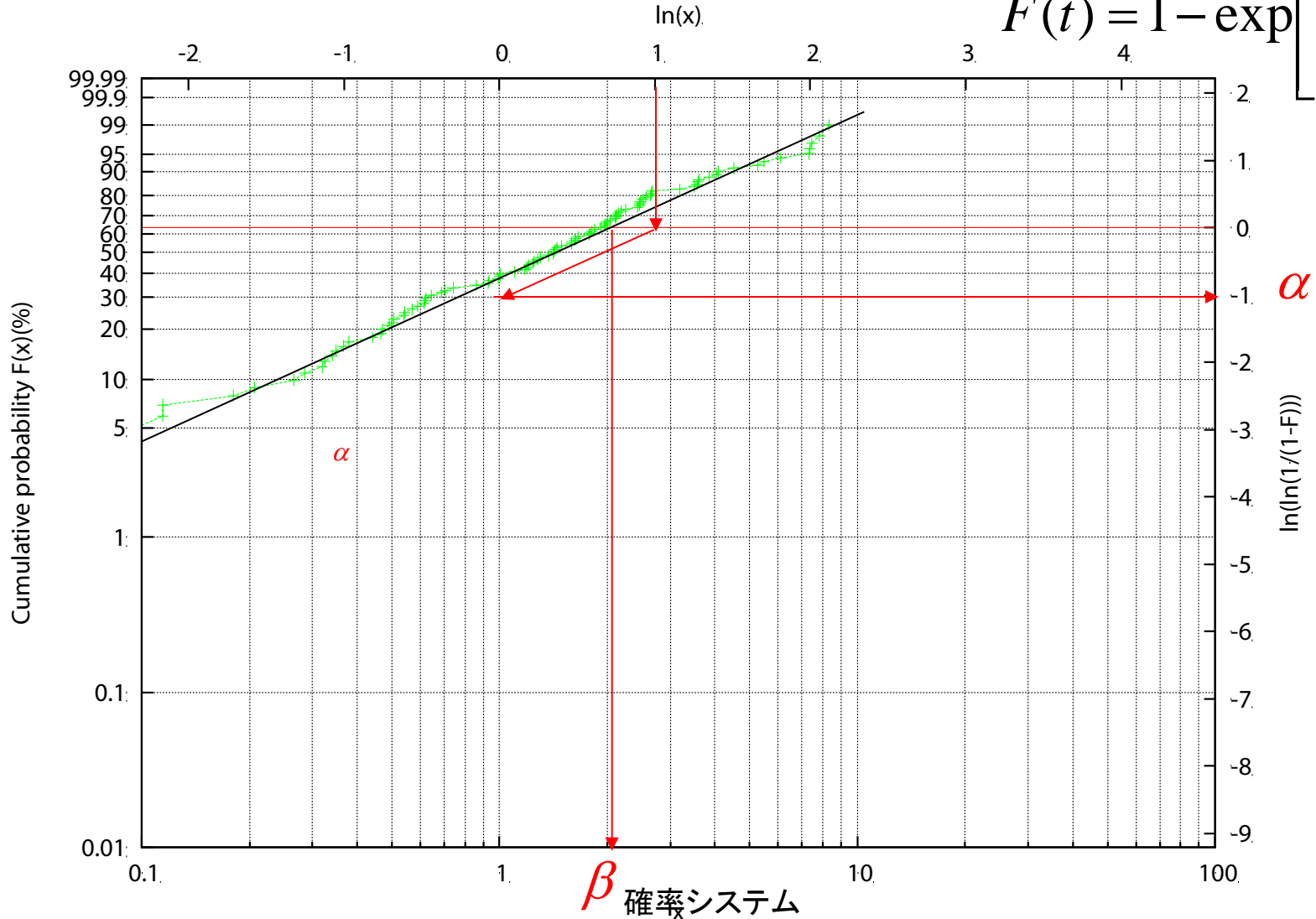
$$\log \frac{1}{1 - F} = \left(\frac{t}{\beta}\right)^\alpha$$

$\alpha$ :勾配

$\beta$ :  $\log \log \frac{1}{1 - F} = 0$ のときの横軸の値

# 母数の読み取り

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{2}\right)^1\right]$$





# データのプロット法

N個のデータが得られ、小さいほうから順番に並べて $x_1, x_2, \dots, x_n$ であるとする。

このとき $(x_1, F_1), (x_2, F_2), (x_3, F_3), \dots, (x_n, F_n)$ を確率紙にプロットするが、 $F_i$ をどのように考えたらよいか。

$F_i = i/n?$  → よくやる間違い

順序統計学によると $F_i$ はばらつきを持つ。その確率密度関数は

$$g(F_i) = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} F_i^{i-1} (1-F_i)^{n-i} dF_i$$

従って、 $F_i$ として割り当てるのは、このばらつきの代表値とすべき

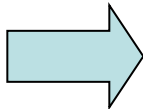
$$\text{ミーンランク } \bar{F}_i = \frac{i}{n+1} \qquad \text{メジアンランク } \tilde{F}_i \cong \frac{i-0.3}{n+0.4}$$

確率システム

# 確率紙例題

正規分布

6.1  
4.1  
7.6  
2.5  
6.3  
3.1  
4.5  
5.3  
5.0

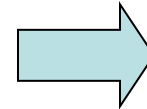


2.5 0.1  
3.1 0.2  
4.1 0.3  
4.5 0.4  
5.0 0.5  
5.3 0.6  
6.1 0.7  
6.3 0.8  
7.6 0.9



ワイブル分布

9.6  
4.2  
11.9  
6.5  
16.7  
8.1  
7.0  
11.2  
9.2

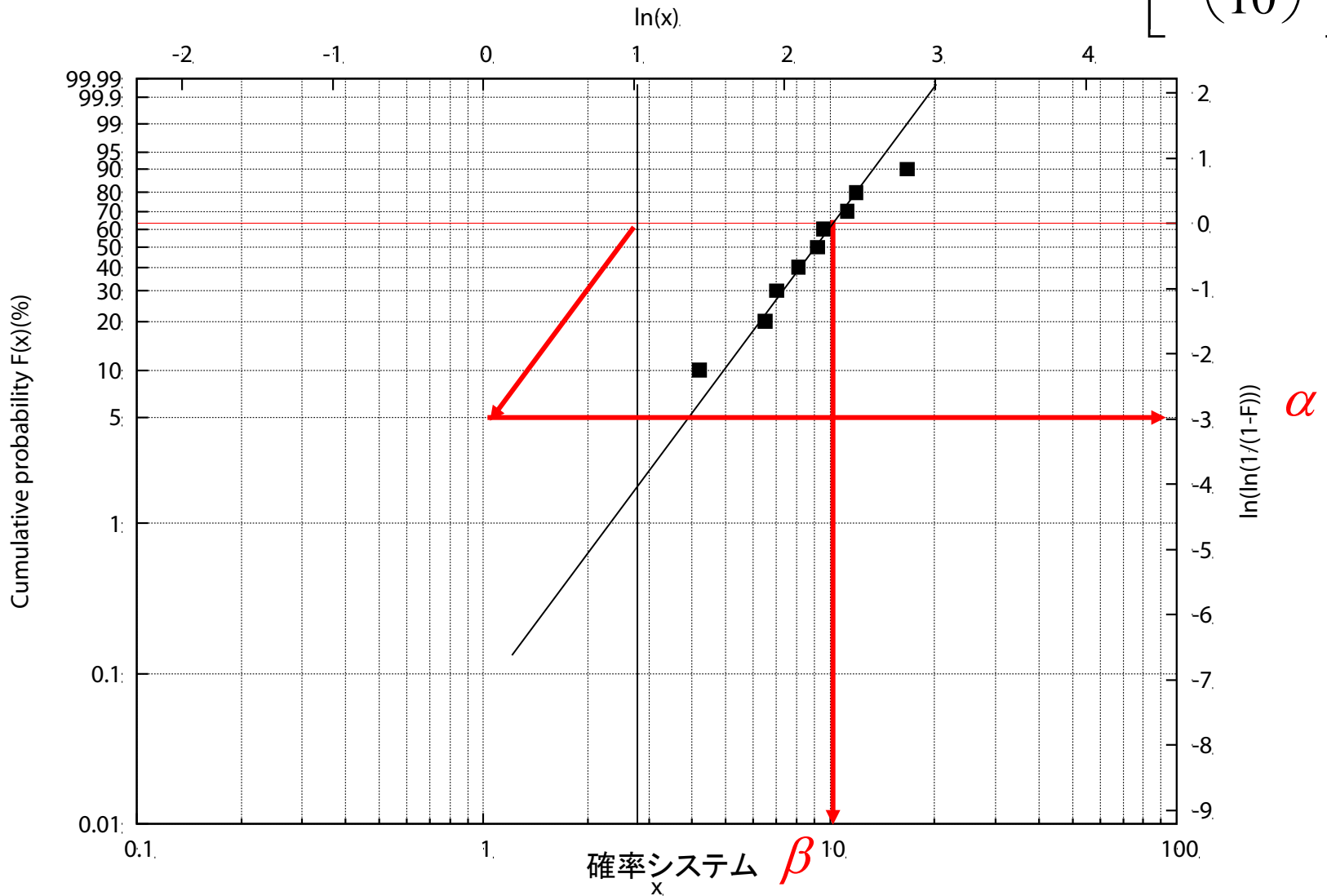


4.2 0.1  
6.5 0.2  
7.0 0.3  
8.1 0.4  
9.2 0.5  
9.6 0.6  
11.2 0.7  
11.9 0.8  
16.7 0.9

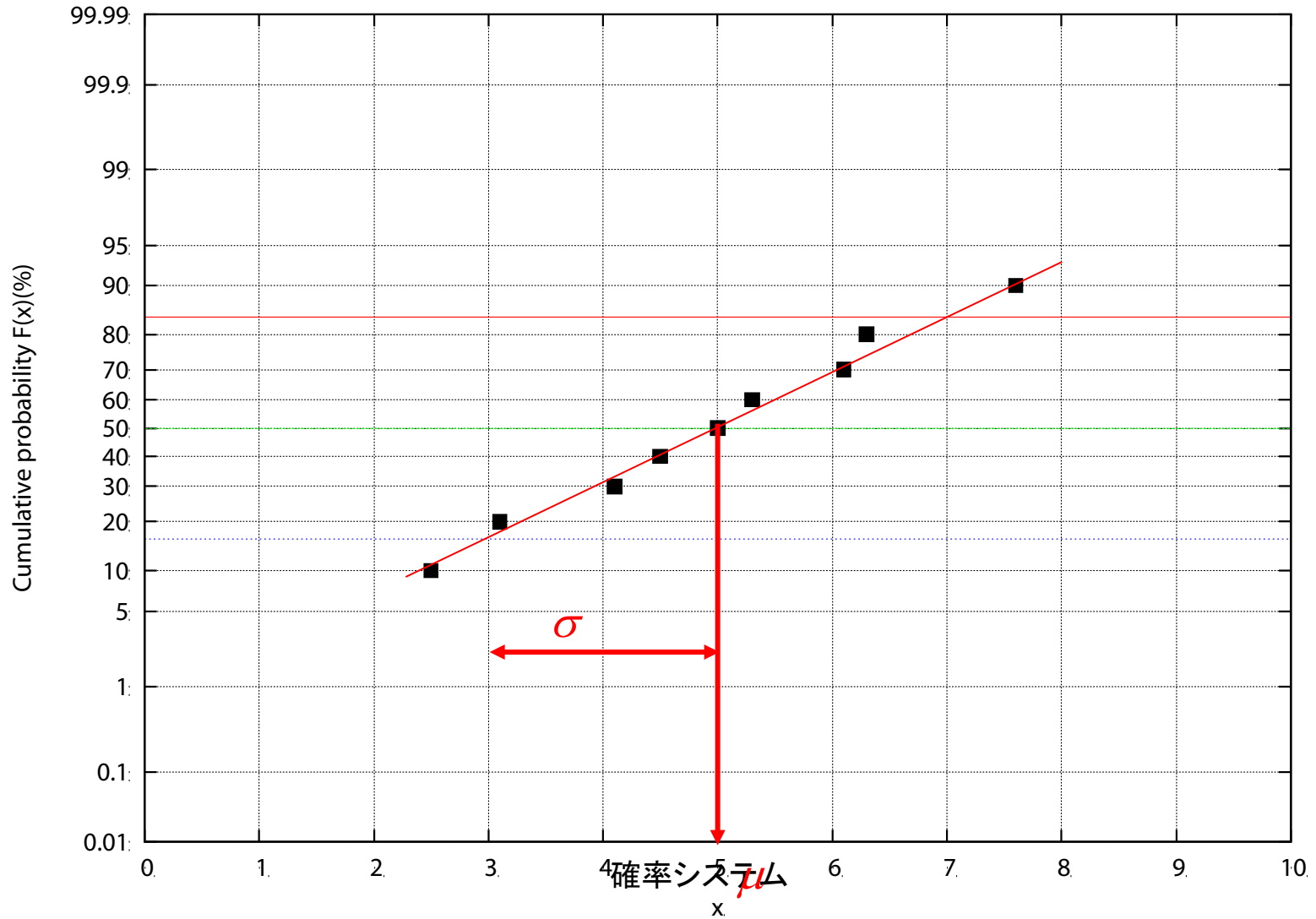


# ワイブル確率紙例題

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{10}\right)^3\right]$$



# 正規確率紙例題



# Rによる確率紙の利用法

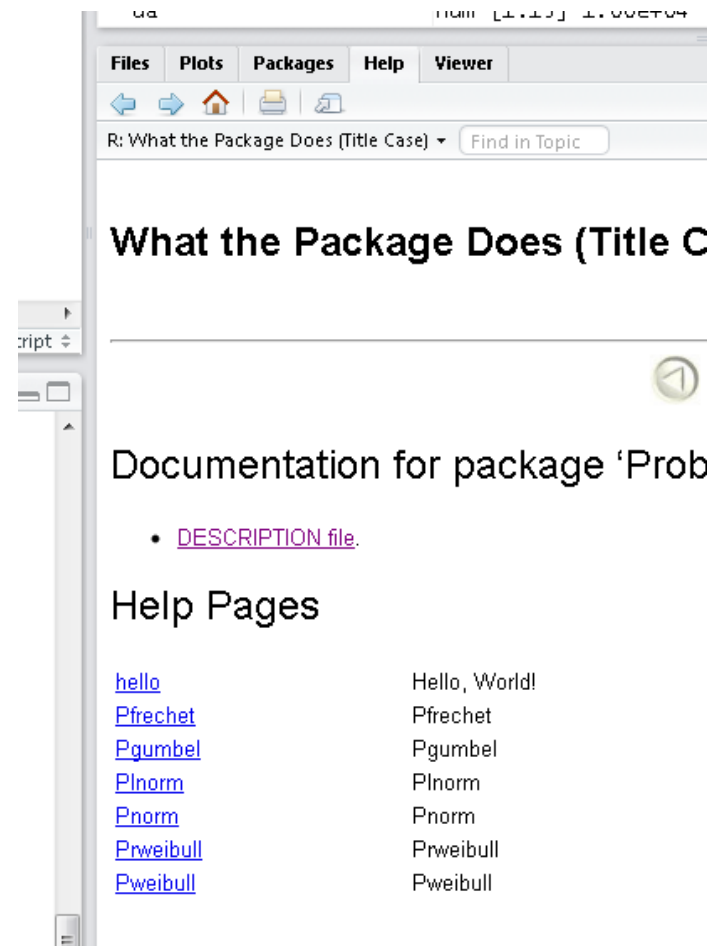
確率紙サポート  
パッケージ

```
>library(devtools)
>install_github("ShinsukeSakai0321/ProbPaper")
```

以後は使う度ごとに

```
>library(ProbPaper)
>help(package=ProbPaper)
```

Libraryに登録されている全コマンドを見ることができる  
Pnormをクリックすると説明を見ることができる



da num [1:15] 1.00e+04 5.00e+01 1.50e+01 9

Files Plots Packages Help Viewer

R: Pnorm Find in Topic

Pnorm (ProbPaper)

# Pnorm

## Usage

```
Pnorm(Variable, Xlabel="Observed Value", MainTitle="Normal Probab
```

## Arguments

Variable	Array for random variable to be plotted
Xlabel	Default is "Observed Value"
MainTitle	Default is "Normal Probability Paper"
color	Lattice color:default is "gray"

## Author(s)

Shinsuke Sakai

## Examples

```
x <- rnorm(100)
Pnorm(Variable=x, Xlabel="test var", MainTitle="Normal test")
```

ExampleをConsoleに  
コピペすると直ちに実  
行できる。学習ながら  
学べる！

### Normal test

