R入門
第三回　プログラミングの基礎

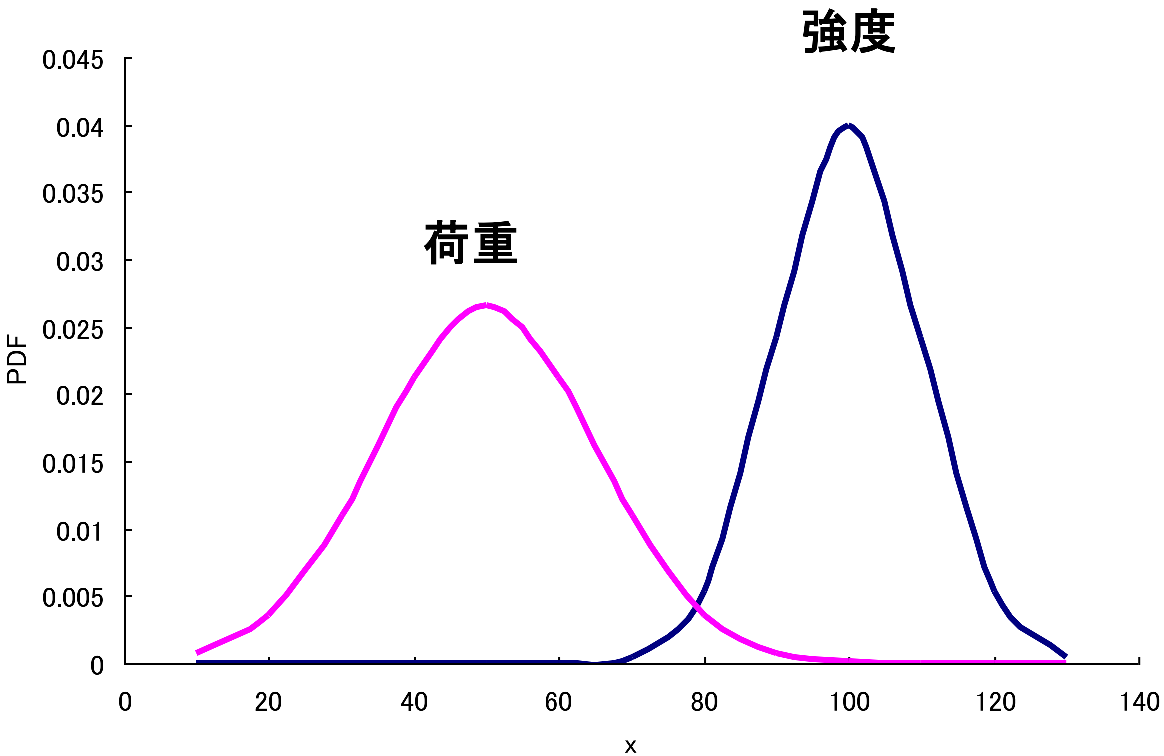
横浜国立大学
酒井信介

信頼性評価により破損確率評価をRにより行う手順

- 原理の理解
- 式による表現
- Rによるプログラミング
- 試行錯誤による現象のより深い理解

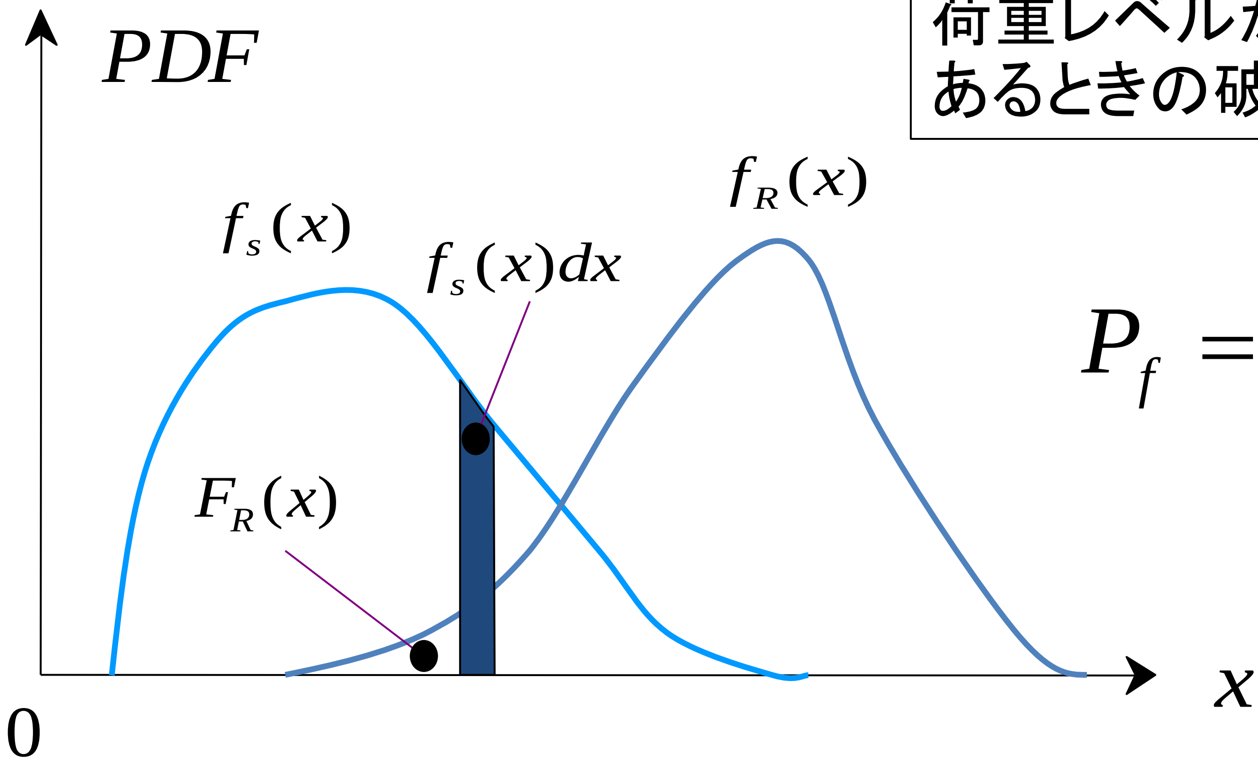
荷重と強度が正規分布するとき

課題：
荷重が$N(\mu_S, \sigma_S{}^2)$、強度が$N(\mu_R, \sigma_R{}^2)$のとき破損確率を求めよ



考え方

荷重レベルがあらゆるレベルにあるときの破損確率の総和は?



$$P_f = \int_0^\infty dP_f\, dx$$

$$P_f = \int_0^\infty F_R(x) f_S(x) dx = \int_0^\infty \left\{ \int_0^x f_R(\xi) d\xi \right\} f_S(x) dx$$

考え方

$$P_f = \int_0^\infty F_R(x) f_S(x) dx$$

計算むずかしい!

そこで覚えておくと便利な法則

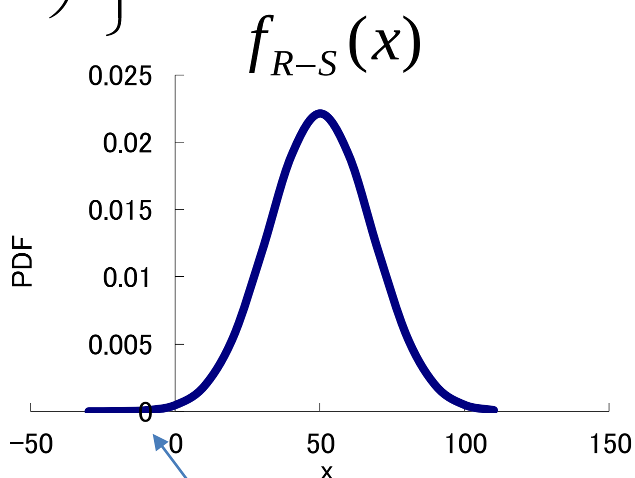
荷重Sが$N(\mu_S, \sigma_S^2)$、強度Rが$N(\mu_R, \sigma_R^2)$に従うとき
R-Sは$N(\mu_R - \mu_S, \sigma_R^2 + \sigma_S^2)$に従う!

$$\mu_{R-S} = \mu_R - \mu_S \qquad \sigma_{R-S} = \sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_S^2}$$

このとき、Pfを$\Phi(x)$を用いて表現せよ

$F_{R\text{-}S}(x)$の誘導

$$f_{R-S}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{R-S}} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}} \right)^2 \right\}$$



$$F_{R-S}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{R-S}(\xi)d\xi$$

変数変換 $\quad y = \dfrac{\xi - \mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}}$

$$F_{R-S}(x) = \int_{-\infty}^{(x-\mu_{R-S})/\sigma_{R-S}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{y^2}{2} \right\} dy$$

$$\boxed{P_f = F_{R-S}(0) = \Phi\left(-\frac{\mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}} \right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}} \right)}$$

正規分布関連コマンド

Rには種々の分布形表現があるが、分布形の名称がxxxであるとき、下記の約束事がある

dxxx() 確率密度関数、pxxx() 累積分布関数 qxxx() 確率点 rxxx() 乱数発生

xxxの代表的なものとしては、下記がある

norm 正規分布 lnorm 対数正規分布 weibull ワイブル分布

各コマンドのマニュアルを見たいときには下記のように?を使う

>?コマンド

例えば>?dnormと入力すると下記に対する説明が出ることを確認する事

```
dnorm(x, mean = 0, sd = 1, log = FALSE)
pnorm(q, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qnorm(p, mean = 0, sd = 1, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rnorm(n, mean = 0, sd = 1)
```

```
>dnorm(0)     #標準正規確率密度関数のx=0→0.3989423
>pnorm(0)     #標準正規累積分布関数のx=0→0.5
>qnorm(0.5)  #標準正規分布でquantileが0.5→  x=0
>rnorm(10)   #標準正規分布の乱数を10個発生する
```

例題1

荷重SがN(μ_S,$\sigma_S{}^2$)、強度RがN(μ_R,$\sigma_R{}^2$)に従うとき
R-SはN(μ_R-μ_S, $\sigma_R{}^2$ +$\sigma_S{}^2$)に従う

$$\boxed{P_f = F_{R-S}(0) = \Phi\left(-\frac{\mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\mu_{R-S}}{\sigma_{R-S}}\right)}$$

$$\mu_{R-S} = \mu_R - \mu_S \qquad \sigma_{R-S} = \sqrt{\sigma_R{}^2 + \sigma_S{}^2}$$

μ_R	σ_R	μ_S	σ_S
200	10	100	20

この条件での破損確率を評価するプログラムを書け

解答

まず、新しいプロジェクトExampleを作る

File -> New Fileにより、新しいプログラム用のタブが作成される。ここに下記プログラムを記入のこと。

```
#example 1
Ms<- 100;  Ss<-20
Mr<- 200;  Sr<-10
Mrs <- Mr-Ms
Srs <- sqrt(Sr*Sr+Ss*Ss)
Pf <- 1-pnorm(Mrs/Srs)
Pf
```

何気なく書いているこのプログラム。変数宣言していない!何故このようなことが可能なのか?実は、これはオブジェクト指向の恩恵。
「<-」には重要な意味がある。初学者はそのことを特に意識しなくともよい

これを実行するためにはプログラムを保存後に「Source」ボタンを押す。下記の値が出力されることを確認する事。

3.872108e-06

これが、この条件における破損確率

例題2

$Pf=10^{-6}$では過剰設計なので、$Pf=10^{-3}$程度となるような強度材料を選択したい。強度の標準偏差は同一として、平均値がどの程度の材料を使えばよいか?

以下の関数を作ることにより、合理化できることを体験せよ(関数の書き方)

```
#example 2
PfCalc <- function(Mr){
  Ms<- 100;  Ss<-20
  Sr<-10
  Mrs <- Mr-Ms
  Srs <- sqrt(Sr*Sr+Ss*Ss)
  Pf <- 1-pnorm(Mrs/Srs)
  Pf
}
```

exam2.RなどのファイルでSaveしてから「Source」ボタンを押す
まず、PfCalc(200)により、 3.872108e−06が出力されることを確認する
PfCalc()を使って$Pf=10^{-3}$となるμ_Rを探す

関数の記述法

fnameという名前の関数定義

```
fname    <- function(arg1,arg2,........){
  ....
  ....
}
```

利用法

```
fname(arg1,arg2,....)
```

使用例

```
Hollow  <- function(rout,rin)
a1 <- pi * rout * rout
a2 <- pi * rin * rin
return(a1-a2)
}
```

外径100内径80の中空断面の面積はHollow(100,80)

デフォールト値が設定される、引数の順番は気にしなくてよい

望ましい記述法

```
Hollow <- function(rout=200,rin=150){
....
}
```

呼び出し法

Hollow (rin=20) Hollow(rin=30,rout=150) など

例題3

Pf=10^{-3}となるμ_Rを探索するプロセスをNewton Raphson法で合理化せよ

```
f <- function(x){
  PfCalc(x)-1e-3
}
uniroot(f,c(100,200))  #100～200の範囲で、f()が0となるxの解を探索する
```

Exam3.Rとしてセーブ後に「source」ボタンの実行により、先に、求める強度値が一瞬で出ることを確認せよ

このように目標値(Pf=10^{-3})を与えて、これを満足する設計パラメータを決める考え方を信頼性設計と呼ぶ

出力結果の味方

- uniroot(f,c(100,200))
- $root [1] 169.0997 → 解
- $f.root [1] -3.170708e-11 → 誤差
- $iter [1] 12 → 収束に要した回数
- $init.it [1] NA
- $estim.prec [1] 6.103516e-05

PfCalc(169.1)により1e-3が出力されることを確認すること

例題4

例題3で得られた結果についてモンテカルロシミュレーションにより確認せよ。サンプルサイズは100000とする。

```
#example 4
n <- 100000
R <- rnorm(n,mean=169.0997,sd=10)
S <- rnorm(n,mean=100,sd=20)
Pf<-sum((R-S)<0)/n
Pf
```

配列宣言も不要!!

ベクトル計算、決してループ計算などしないこと

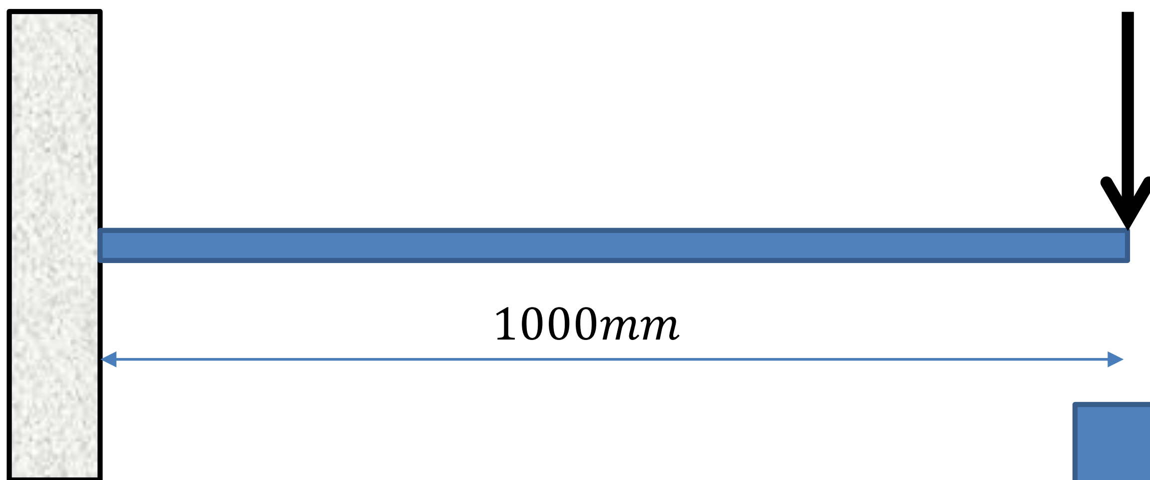
Pf=10^{-3}となることを確認せよ

モンテカルロシミュレーションがたった5行で実現できる!

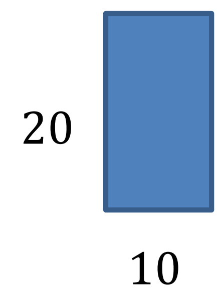
例題5

$P \quad N(100, 20^2)$

単位(N)



$\sigma_y \quad N(230, 10^2)$　単位(MPa)



$\sigma_{max} = \frac{M}{Z}$

$$Z = \frac{bh^2}{6}$$

- この梁の、支持部に発生する応力分布のヒストグラムを表示せよ
- 降伏する確率をモンテカルロ法で求めよ

解答例

```
# example 5
b<- 10; h<- 20
Z <- b*h*h / 6
Smax <- function(x){
  x*1000/Z
}
#Monte Carlo Similation
n <- 100000
P <- rnorm(n,mean=100,sd=20)
S <- Smax(P)
#Drawing Histogram
hist(S,main="example 5",xlab="S(MPa)")
R <- rnorm(n,mean=230,sd=10)
Pf<-sum((R-S)<0)/n
Pf
```

こんなに簡単にモンテカルロ法を実施できることを体験せよ!
ループ計算などは一切不要